





TRAITÉ
D'ANALYSE.

TOME III.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS.
40176 Quai des Grands-Augustins, 55

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

TRAITÉ D'ANALYSE

PAR

ÉMILE PICARD,
MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

DEUXIÈME ÉDITION
REVUE ET AUGMENTÉE.

TOME III.

DES SINGULARITÉS DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.
ÉTUDE DU CAS OU LA VARIABLE RESTE RÉELLE; DES COURBES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.
ÉQUATIONS LINÉAIRES; ANALOGIES ENTRE LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES ET LES ÉQUATIONS LINÉAIRES.



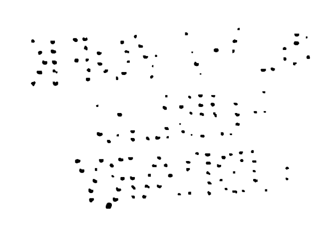


PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.



1908

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS.
40176 Quai des Grands-Augustins, 55



INTRODUCTION

DE LA PREMIÈRE ÉDITION.

Ce troisième Volume contient les Leçons que j'ai faites à la Faculté des Sciences dans ces trois dernières années. Il est, comme je l'avais annoncé, à peu près entièrement consacré à l'étude des équations différentielles. On ne trouvera pas cependant, dans ce Volume et dans ceux qui suivront, un Ouvrage didactique sur ce sujet qui est immense ; bien des points classiques ont été laissés de côté, et, à cet égard, le titre de *Traité d'Analyse,* s'il n'était consacré par la tradition, serait assez mal choisi. Le temps des encyclopédies semble passé ; j'ai eu surtout pour but d'exposer dans mes Leçons, avec les préliminaires nécessaires, quelques-unes des questions qui intéressent particulièrement aujourd'hui les analystes, et dont l'étude peut être utilement poursuivie.

Il suffira d'indiquer succinctement les principales subdivisions. L'étude des singularités des intégrales des équations différentielles ordinaires, qui trouve son origine dans le Mémoire classique de Briot et Bouquet, forme le sujet des premiers Chapitres. Cette partie importante de la Théorie a fait récemment

l'objet de divers travaux sur lesquels je m'étends assez longuement, en donnant quelques applications.

Le brillant développement de la théorie des fonctions d'une variable complexe avait fait un peu trop laisser de côté l'examen du cas où tous les éléments figurant dans les équations différentielles sont réels. Sous l'influence des travaux de M. Poincaré sur les courbes définies par des équations différentielles, ces questions, depuis quelques années, ont été reprises. Je reviens d'abord sur mes recherches relatives à diverses méthodes d'approximations successives, en me bornant pour le moment aux équations différentielles ordinaires, et je passe ensuite aux travaux de M. Poincaré sur les solutions périodiques et asymptotiques. Dans le même ordre d'idées, les profondes recherches de l'éminent géomètre, sur la forme des courbes satisfaisant à une équation différentielle du premier ordre et du premier degré et, en particulier, sa belle théorie des cycles limites trouvent ici leur place.

Le reste du Volume est consacré à la théorie des équations différentielles linéaires ; c'est un sujet qui a fait depuis trente ans l'objet d'un nombre considérable de travaux. Je dirai seulement ici un mot sur une digression qui pourra, au premier abord, étonner. Voulant étudier les analogies entre la théorie des équations différentielles linéaires et celle des équations algébriques, il m'a paru indispensable de reprendre les théories algébriques pour faciliter au lecteur la comparaison ; c'est ainsi que j'ai consacré un long Chapitre à la théorie des substitutions et aux idées fondamentales introduites dans la Science par Galois. On pourra suivre ainsi, j'espère, avec la plus grande facilité, le parallélisme entre le groupe de Galois pour une équation

algébrique et ce que j'ai appelé le groupe de transformations d'une équation différentielle linéaire, étude qui fait le principal objet du dernier Chapitre.

J'adresse encore à M. Simart mes affectueux remercîments pour les conseils qu'il m'a donnés en corrigeant les épreuves, et qui m'ont permis d'apporter d'heureuses modifications à ma rédaction primitive

ÉMILE PICARD.

Paris, le 25 mars 1896.

PRÉFACE

DE LA DEUXIÈME ÉDITION.

Le plan de cette deuxième édition ne diffère pas de la première. J'ai fait diverses additions, particulièrement dans la discussion des singularités des équations différentielles ordinaires, et dans l'étude de leurs solutions au point de vue de la stabilité, telle que l'entend M. Liapounoff. L'étude des représentations asymptotiques des intégrales des équations linéaires a reçu aussi divers compléments, et j'ai pu consacrer quelques pages à des travaux récents de M. Landau sur la théorie des fonctions.

Je remercie M. d'Adhémar, qui a bien voulu corriger les épreuves de ce Volume.

ÉMILE PICARD.

Paris, le 20 novembre 1908.

TRAITÉ
D'ANALYSE.

TOME III.

CHAPITRE I.
GÉNÉRALITÉS SUR LES SINGULARITÉS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

I. — Intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles dans le voisinage d'un système de valeurs singulières.

1. On peut, comme nous l'avons vu précédemment (t. II, p. 356), rattacher la recherche des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires à l'étude d'une équation linéaire aux dérivées partielles. Reprenons l'équation

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0, \tag{1}$$

où $X, X_1, \ldots, X_n$ sont fonctions des $n+1$ variables $x, x_1, \ldots, x_n$. Nous avons démontré que, si les coefficients de cette équation sont holomorphes dans le voisinage de $x^0, x_1^0, \ldots, x_n^0$ et si

$$X(x^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

n'est pas nul, il existe une fonction $f(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ satisfaisant

à l'équation (1), holomorphe dans le voisinage de $x^0, x_1^0, \ldots, x_n^0$, et se réduisant pour $x = x_0$ à une fonction donnée à l'avance

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

elle-même holomorphe dans le voisinage de $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$.

Nous avons déduit ce théorème (*voir* t. II, p. 360) d'une proposition plus générale. Si l'on a seulement en vue le théorème lui-même, on peut, tout en restant dans le même ordre d'idées, le démontrer plus rapidement comme il suit. Écrivons l'équation sous la forme

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Soit, pour abréger,

$$x^0 = x_1^0 = x_2^0 = \ldots = x_n^0 = 0.$$

Supposons, de plus, la fonction φ nulle pour $x_1 = \ldots = x_n = 0$, ce qui revient à remplacer f par f augmentée d'une constante convenable.

Si la fonction satisfaisant aux conditions de l'énoncé existe, on pourra, à l'aide de l'équation (E), effectuer son développement suivant les puissances de $x, x_1, \ldots, x_n$. On aura, en effet, les valeurs de toutes les dérivées partielles de f pour

$$x = x_1 = \ldots = x_n = 0;$$

c'est d'ailleurs ce que nous avons déjà dit (t. II, p. 361). Il faut montrer que le développement ainsi obtenu est convergent tant que les modules des x sont suffisamment petits.

La démonstration de la convergence va encore résulter d'une comparaison avec un système convenable. Soit M le module maximum des X quand x reste dans son plan à l'intérieur d'un cercle de rayon a ayant l'origine pour centre, et que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ restent respectivement dans leur plan à l'intérieur d'un cercle de rayon b. Nous pouvons prendre comme fonction de comparaison

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{b}\right)}.$$

Nous aurons alors à considérer l'équation

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x_1+\ldots+x_n}{b}\right)}\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial U}{\partial x_n}\right),$$

et nous prendrons comme valeur initiale de U pour $x = 0$

$$\frac{N}{1-\frac{x_1+\ldots+x_n}{b}} - N,$$

en désignant par N le module maximum de φ. Or l'existence de la fonction U se démontre immédiatement. On peut présumer de suite qu'elle se réduira à une fonction de x et de z en posant

$$z = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

On a donc à étudier l'équation

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{nM}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{z}{b}\right)}\frac{\partial U}{\partial z}$$

et l'intégration de cette dernière équation est immédiate. On peut, si l'on veut, la ramener à une équation à coefficients constants, en faisant sur x et sur z les changements de variable indiqués par les relations

$$\frac{dx}{1-\frac{x}{a}} = dx', \qquad \left(1-\frac{z}{b}\right)dz = dz',$$

$x' = 0$, $z' = 0$ correspondant à $x = 0$, $z = 0$. On a alors l'équation

$$\frac{\partial U}{\partial x'} = nM\frac{\partial U}{\partial z'},$$

dont l'intégrale est visiblement

$$U = \varphi(z' + nMx').$$

L'intégrale qui nous intéresse s'obtiendra donc immédiatement.

2. Nous allons maintenant étudier le cas où le théorème général qui précède ne trouverait pas son application. Prenons l'équation à

n variables indépendantes

$$(2) \qquad X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des fonctions des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si les X, holomorphes par hypothèse dans le voisinage de $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, s'annulent tous pour ces valeurs des variables indépendantes, le théorème précédent ne nous apprend rien sur l'existence des intégrales de l'équation (2) dans le voisinage des valeurs *zéro* des variables.

Nous remarquerons d'abord qu'on peut, en général, supposer que les termes du premier degré dans les développements des coefficients $X_1, \ldots, X_n$ se réduisent respectivement à

$$\lambda_1 x_1, \quad \lambda_2 x_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n x_n.$$

Soient, en effet,

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n + \ldots, \\ X_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_n &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n + \ldots. \end{aligned}$$

Faisons le changement de variables linéaire

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1n} x_n, \\ y_2 &= \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \ldots + \alpha_{2n} x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n &= \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \ldots + \alpha_{nn} x_n. \end{aligned}$$

Pour que, dans l'équation transformée en y, les termes du premier degré, dans les coefficients de

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial y_n},$$

soient respectivement

$$\lambda_1 y_1, \quad \lambda_2 y_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n y_n,$$

on devra avoir identiquement

$$\begin{aligned} (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n)\alpha_{i1} + \ldots + (a_{n1} x_1 + \ldots + a_{nn} x_n)\alpha_{in} \\ = \lambda_i(\alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \ldots + \alpha_{in} x_n). \end{aligned}$$

Il en résulte de suite que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Nous plaçant dans le cas général, nous supposons distinctes les racines de cette équation, et nous pourrons alors déterminer le changement de variables donnant à l'équation la forme indiquée.

3. Partons donc de l'équation

$$(3) \qquad (\lambda_1 x_1+\ldots)\frac{\partial f}{\partial x_1}+(\lambda_2 x_2+\ldots)\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+(\lambda_n x_n+\ldots)\frac{\partial f}{\partial x_n}=0,$$

les termes non écrits dans chacune des parenthèses étant de degré supérieur au premier en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Nous allons chercher à trouver une fonction satisfaisant à cette équation. On ne pourra pas, en général, trouver de fonction holomorphe au voisinage de $x_1=\ldots=x_n=0$.

Laissant, pour un moment, de côté l'équation (3), nous envisagerons l'équation suivante :

$$(\lambda_1 x_1+\ldots)\frac{\partial f}{\partial x_1}+\ldots+(\lambda_n x_n+\ldots)\frac{\partial f}{\partial x_n}=\lambda_1 f.$$

Peut-on obtenir une intégrale de cette dernière équation, holomorphe au voisinage de $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, intégrale qui devra nécessairement s'annuler pour ces valeurs? En dérivant successivement l'équation p_1 fois par rapport à x_1, p_2 fois par rapport à x_2, ..., p_n fois par rapport à x_n, et faisant $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, on obtiendra la valeur de

$$(4) \qquad \frac{\partial^{p_1+p_2+\ldots+p_n} f}{\partial x_1^{p_1}\ldots\partial x_n^{p_n}} \qquad (\text{pour } x_1=x_2=\ldots=x_n=0),$$

exprimée à l'aide des valeurs des dérivées partielles de f d'ordre inférieur à $p_1+p_2+\ldots+p_n$, correspondant aux mêmes valeurs des variables. Seule la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ (pour $x_1=\ldots=x_n=0$) ne se trouve pas déterminée par l'équation différentielle, tandis que les autres dérivées partielles du premier ordre ont une valeur nulle.

Ce que nous venons de dire suppose que le coefficient de l'expression (4) n'est pas nul; or ce coefficient se calcule immédiatement : il est égal à

$$\lambda_1(p_1-1)+\lambda_2 p_2+\ldots+\lambda_n p_n.$$

Nous devons donc supposer que *la somme précédente ne s'annule pour aucune valeur positive et entière de* $p_1, p_2, \ldots, p_n$, à l'exception, bien entendu, de

$$p_1=1, \qquad p_2=\ldots=p_n=0.$$

Dans ces conditions, ayant pris arbitrairement le coefficient de x_1 dans le développement, tous les autres coefficients sont déterminés. *Il s'agit de savoir si ce développement est convergent,* les x ayant des modules suffisamment petits.

4. Nous ferons, en premier lieu, une observation d'un caractère géométrique. Considérons le quotient

$$(5) \qquad \frac{\lambda_1(p_1-1)+\lambda_2 p_2+\ldots+\lambda_n p_n}{p_1-1+p_2+\ldots+p_n}.$$

Nous aurons besoin, pour la démonstration de la convergence, de supposer que le module de ce quotient reste supérieur à un nombre fixe différent de zéro (les p étant des entiers positifs quelconques, en excluant seulement la combinaison $p_1=1, p_2=p_3=\ldots=p_n=0$). On aperçoit facilement un cas dans lequel il en sera certainement ainsi. Marquons sur un plan les points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, et supposons qu'on puisse tracer un contour *convexe* C comprenant à son intérieur les points précédents, mais ne comprenant point l'origine. On est alors assuré que

$$\left|\frac{\lambda_1 p_1+\lambda_2 p_2+\ldots+\lambda_n p_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}\right|$$

reste supérieur à un nombre fixe, car le quotient entre crochets est l'affixe du centre de gravité de masses $p_1, p_2, \ldots, p_n$ respectivement placées aux points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, et ce centre de gravité est certainement à l'intérieur de C. Écrivons maintenant l'expression (5) sous la forme

$$\frac{\dfrac{\lambda_1 p_1+\ldots+\lambda_n p_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}-\dfrac{\lambda_1}{p_1+p_2+\ldots+p_n}}{1-\dfrac{1}{p_1+p_2+\ldots+p_n}}.$$

Or les seconds termes du numérateur et du dénominateur deviennent de plus en plus petits à mesure que les p augmentent. Donc, quand $p_1+p_2+\ldots+p_n$ est supérieure à un certain nombre assignable, l'expression (5) n'est certainement pas nulle. D'autre part, quand la somme des p reste inférieure à un nombre déterminé, le module du numérateur de (5) doit nécessairement avoir un minimum, et ce minimum ne peut pas être nul d'après la supposition du numéro précédent. Nous sommes donc assuré, sous la condition des deux hypothèses faites, que *le module de l'expression* (5) *reste supérieur à un nombre fixe que nous désignerons par* ε.

5. Nous allons démontrer que le développement obtenu est convergent en adoptant les hypothèses indiquées ci-dessus. Posons

$$f = \mathrm{A}x_1 + v,$$

v commençant par des termes du second degré et A étant une constante arbitraire. Nous aurons

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda_1 x_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_n x_n \frac{\partial v}{\partial x_n} - \lambda_1 v \\ &\quad = \varphi_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + \varphi_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + \ldots + \varphi_n \frac{\partial v}{\partial x_n} + \psi, \end{aligned}\right.$$

les développements de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et ψ commençant par des termes du second degré.

Désignons par M le module maximum de φ_1, φ_2, ..., φ_n et ψ quand les variables sont respectivement dans leur plan à l'intérieur d'un cercle de rayon a. Nous considérons l'équation

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\varepsilon\left(x_1 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_n} - \mathrm{V}\right) \\ &= \left(\frac{\mathrm{M}}{1 - \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{a}} - \mathrm{M} - \mathrm{M}\frac{x_1 + \ldots + x_n}{a}\right) \\ &\quad \times \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_n} + 1\right). \end{aligned}\right.$$

Nous allons voir dans un moment qu'il existe une intégrale V de cette équation s'annulant, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Or la comparaison des équa-

tions (6) et (7) est immédiate; le coefficient de

$$\frac{\partial^{p_1+\ldots+p_n} v}{\partial x_1^{p_1}\ldots\partial x_n^{p_n}} \quad (\text{pour } x_1 = \ldots = x_n = 0),$$

dans le calcul des dérivées successives à l'aide de l'équation (6), est, comme nous l'avons vu, égal à

$$\lambda_1(p_1 - 1) + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_n p_n,$$

tandis que, pour l'équation (7), le coefficient correspondant est

$$\varepsilon(p_1 - 1 + p_2 + \ldots + p_n).$$

Il est donc clair, d'après la définition même de ε, et en remarquant que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et ψ ont été remplacées par des fonctions de comparaison jouissant des propriétés que l'on sait relativement aux valeurs de leurs dérivées partielles, que la série v tirée de (6) convergera quand la série V tirée de (7) sera elle-même convergente. Nous n'avons donc plus qu'à étudier l'équation (7).

Nous pouvons présumer que V est une fonction de u, en posant

$$u = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

L'équation (7) devient alors

$$\varepsilon\left(u\frac{dV}{du} - V\right) = \left(\frac{M}{1 - \frac{u}{a}} - M - M\frac{u}{a}\right)\left(n\frac{dV}{du} + 1\right),$$

que nous pouvons écrire

$$u\frac{dV}{du} - V = \frac{M' u^2}{a - u}\left(n\frac{dV}{du} + 1\right),$$

M' étant une constante. Il faut voir si cette équation admet une intégrale holomorphe dans le voisinage de $u = 0$, et s'annulant pour cette valeur ainsi que sa dérivée première. Or l'équation précédente est une équation linéaire du premier ordre que nous mettons sous la forme

$$\left(u - \frac{nM'u^2}{a - u}\right)\frac{dV}{du} - V = \frac{nM'u^2}{a - u}.$$

Une intégrale de l'équation sans second membre est

$$u\varphi(u),$$

$\varphi(u)$ représentant une fonction holomorphe autour de l'origine $[\varphi(o) \neq o]$. Posant alors $V = Cu\varphi(u)$, nous trouvons pour $\frac{dC}{du}$ une fonction holomorphe; C sera complètement déterminé par la condition de s'annuler pour $u = o$, et nous aurons bien pour V une fonction holomorphe dont le développement commence par un terme en u^2. Notre démonstration est donc complète.

6. Nous pouvons élargir un peu l'hypothèse faite au § 3. Il a été admis dans ce numéro que l'expression

$$\lambda_1(p_1 - 1) + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_n p_n$$

ne s'annulait pour aucune valeur positive ou nulle des p, autre que $p_1 = 1$, $p_2 = \ldots = p_n = o$. Cette somme pourrait s'annuler pour des valeurs positives des p correspondant à

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1,$$

sans que notre démonstration subît de modification importante. Ceci revient à dire qu'*une des quantités* $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *pourrait être égale* à λ_1. Qu'arriverait-il, en effet, dans ce cas?

Si l'on a, par exemple, $\lambda_i = \lambda_1$ $(i \geqq 2)$, la dérivée partielle du premier ordre $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ pour les valeurs nulles des variables ne sera pas déterminée par l'équation différentielle, elle restera donc arbitraire; à ce point près, rien ne sera changé dans la démonstration. On posera seulement

$$f = Ax_1 + Bx_i + V,$$

A et B étant des constantes arbitraires, et la démonstration se poursuivra comme au § 5.

En résumé, l'équation

$$(\alpha) \quad (\lambda_1 x_1 + \ldots)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (\lambda_2 x_2 + \ldots)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + (\lambda_n x_n + \ldots)\frac{\partial f}{\partial x_n} = \lambda_1 f$$

admettra une intégrale holomorphe dépendant au moins d'une constante arbitraire, si les conditions suivantes sont remplies :

1° *La relation*

$$\lambda_1(p_1 - 1) + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_n p_n = o$$

n'est vérifiée pour aucune valeur entière et positive des entiers p satisfaisant à l'inégalité

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n \geqq 2;$$

2° *Si l'on marque sur un plan les points correspondant aux affixes* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, *on peut tracer un contour convexe comprenant ces points à son intérieur, mais ne comprenant pas l'origine.*

On peut évidemment substituer à la seconde condition la suivante : *Une certaine droite passant par l'origine laisse tous les points d'un même côté.*

7. En supposant remplies les conditions indiquées, cherchons maintenant ce que nous pourrons tirer du théorème précédent pour l'étude de l'équation proposée

$$(\beta) \quad (\lambda_1 x_1 + \ldots)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (\lambda_2 x_2 + \ldots)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + (\lambda_n x_n + \ldots)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Désignons par f_1 une intégrale holomorphe de l'équation (α), par f_2 une intégrale holomorphe de l'équation analogue à (α), mais où λ_1 a été remplacé par λ_2. Nous avons

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots)\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + (\lambda_2 x_2 + \ldots)\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \ldots + (\lambda_n x_n + \ldots)\frac{\partial f_1}{\partial x_n} = \lambda_1 f_1,$$

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots)\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + (\lambda_2 x_2 + \ldots)\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \ldots + (\lambda_n x_n + \ldots)\frac{\partial f_2}{\partial x_n} = \lambda_2 f_2,$$

ce qui peut s'écrire

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots)\frac{\partial \log f_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}{\partial x_1} + \ldots + (\lambda_n x_n + \ldots)\frac{\partial \log f_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}{\partial x_n} = 1,$$

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots)\frac{\partial \log f_2^{\frac{1}{\lambda_2}}}{\partial x_1} + \ldots + (\lambda_n x_n + \ldots)\frac{\partial \log f_2^{\frac{1}{\lambda_2}}}{\partial x_n} = 1;$$

par suite, en retranchant ces deux équations, on voit que

$$\log \frac{f_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}{f_2^{\frac{1}{\lambda_2}}} \quad \text{et par suite} \quad \frac{f_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}{f_2^{\frac{1}{\lambda_2}}}$$

satisfont à l'équation (β).

Il n'est pas inutile de remarquer que cette intégrale ne devient pas *illusoire* quand $\lambda_1 = \lambda_2$. En effet, dans ce cas, les termes du premier degré en x_1 et x_2 sont arbitraires dans f_1 et dans f_2 (*voir* § 6); on a donc

$$f_1 = A x_1 + B x_2 + \ldots,$$
$$f_2 = A' x_1 + B' x_2 + \ldots,$$

en n'écrivant que les termes du premier degré; les A et les B étant arbitraires, le quotient $\frac{f_1}{f_2}$ ne se réduit certainement pas à une constante.

En mettant successivement dans le second membre de l'équation (α), à la place de λ_1, les autres valeurs des λ, on obtiendra n fonctions holomorphes

$$f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_n,$$

et, d'après ce que nous venons de dire, on aura $n - 1$ intégrales de l'équation (β), à savoir :

$$\frac{f_2^{\frac{1}{\lambda_2}}}{f_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}, \quad \frac{f_3^{\frac{1}{\lambda_3}}}{f_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}, \quad \ldots, \quad \frac{f_n^{\frac{1}{\lambda_n}}}{f_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}.$$

Ces $n - 1$ intégrales sont distinctes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas entre elles de relations. Dans le cas contraire, on aurait une relation entre $f_1, f_2, \ldots, f_n$, et, par suite, le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

serait identiquement nul. Pour démontrer qu'il n'en est pas ainsi, prenons d'abord le cas où tous les λ sont distincts; on aura alors

$$f_1 = A_1 x_1 + \ldots,$$
$$f_2 = A_2 x_2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f_n = A_n x_n + \ldots,$$

en n'écrivant que les termes du premier degré. Les A étant arbitraires, le déterminant fonctionnel de ces fonctions ne peut être identiquement nul.

Si l'on suppose que deux ou plusieurs des quantités λ sont égales entre elles, il n'y a pas plus de difficultés, puisqu'on peut encore donner cette même forme aux f.

En résumé, on pourra obtenir, dans le voisinage de

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

un système de $n-1$ intégrales distinctes de l'équation

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (\lambda_2 x_2 + \ldots)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + (\lambda_n x_n + \ldots)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

quand les conditions du § 3 *seront vérifiées* [1]. Il faut ajouter, bien entendu, qu'à la première condition mentionnée dans ce numéro doivent s'ajouter celles qui en dérivent par permutation des nombres $1, 2, \ldots, n$.

II. — Applications aux équations différentielles.

8. Nous pouvons déduire des théorèmes précédents des résultats intéressants concernant les équations différentielles ordinaires. Envisageons le système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}, \tag{8}$$

les X s'annulant pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$; nous allons indiquer un cas étendu où nous aurons des *courbes intégrales* passant par l'origine. Il ne sera pas inutile de préciser cette expression de courbes intégrales. Tout système de quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$, satisfaisant aux équations différentielles précédentes, forme une multiplicité à *une* dimension (c'est-à-dire dépendant d'un paramètre), et l'on peut, si l'on veut, considérer cette multiplicité comme une *courbe* dans l'espace à n dimensions. C'est dans ce sens que nous parlons d'une

[1] Ce théorème, sous sa forme générale, a été démontré par M. Poincaré dans sa Thèse *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences p rtielles* (Paris, 1879). La forme géométrique donnée aux conditions est particulièrement intéressante.

courbe intégrale : nous ne faisons qu'étendre à n quelconque une expression dont le sens est immédiat dans le cas de *deux* et *trois* dimensions. Le système (8) étant l'équivalent de l'équation aux dérivées partielles

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

nous sommes assuré de pouvoir, en général, par un changement linéaire de variables, réduire les équations à d'autres, dans lesquelles on aura

$$\begin{aligned} X_1 &= \lambda_1 x_1 + \ldots, \\ X_2 &= \lambda_2 x_2 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_n &= \lambda_n x_n + \ldots, \end{aligned}$$

en nous bornant à écrire les termes du premier degré. Plaçons-nous donc dans cette hypothèse. Je considérerai alors le système suivant :

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dt}{t},$$

t étant une variable en fonction de laquelle nous voulons exprimer $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous avons un système de même forme. On a à considérer ici les $n+1$ équations

$$X_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n} + t \frac{\partial f_i}{\partial t} = \lambda_i f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$X_1 \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_n} + t \frac{\partial f_{n+1}}{\partial t} = f_{n+1};$$

on pourra prendre pour les f_i des fonctions indépendantes de t et qui seront précisément celles que nous avons étudiées dans la Section précédente, *dans l'hypothèse où les* λ *satisfont aux conditions indiquées*. La fonction f_i contient simplement un terme en x_i comme terme du premier degré; nous regarderons les fonctions f_i comme parfaitement déterminées, en donnant aux constantes désignées précisément par A_i (§ 7) des valeurs numériques.

Nous pouvons ensuite prendre pour $n+1^{\text{ième}}$ fonction

$$f_{n+1} = t.$$

Nous avons donc les n intégrales

$$\frac{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{t^{\lambda_1}} = C_1,$$

$$\frac{f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{t^{\lambda_2}} = C_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{t^{\lambda_n}} = C_n.$$

9. Des équations précédentes *on peut tirer des développements de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *suivant les puissances entières et positives de* t^{λ_1}, t^{λ_2}, ..., t^{λ_n}, puisque le déterminant fonctionnel des f ne s'annule pas pour les valeurs nulles des x. Le développement sera convergent si les modules de

$$C_1 t^{\lambda_1}, \quad C_2 t^{\lambda_2}, \quad \ldots, \quad C_n t^{\lambda_n}$$

sont suffisamment petits. Des circonstances très diverses pourront à cet égard se présenter. Un cas très favorable serait celui où les parties réelles de tous les λ seraient positives. Dans ce cas, t tendant vers zéro dans une direction quelconque, les modules précédents tendraient vers zéro, et x_1, x_2, ..., x_n tendraient eux-mêmes vers zéro.

Nous avons donc alors un ensemble de courbes intégrales passant à l'origine et dépendant de $n - 1$ constantes arbitraires (l'élimination de t ne laissant manifestement que $n - 1$ constantes).

Le cas où les parties réelles des λ seraient toutes négatives n'est pas différent du précédent, puisqu'il suffit de changer t en $\frac{1}{t}$ pour y être ramené.

Supposons maintenant que les parties réelles soient seulement positives pour

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_p \qquad (p < n).$$

On fera $C_{p+1} = \ldots = C_n = 0$, et l'on aura des développements de x_1, x_2, ..., x_n suivant les puissances de t^{λ_1}, t^{λ_2}, ..., t^{λ_p}, ce qui donne un ensemble de courbes intégrales passant à l'origine et dépendant de $p - 1$ constantes arbitraires. En changeant t en $\frac{1}{t}$, et faisant alors $C_1 = C_2 = \ldots = C_p = 0$, on aura un autre ensemble de courbes intégrales passant à l'origine et dépendant de $n - p$ arbitraires.

Nous nous sommes placé dans les cas les plus simples, de manière à pouvoir faire tendre t vers *zéro* dans une direction quelconque (l'argument seulement restant fini).

On pourra avoir d'autres intégrales qui correspondent à *t tendant vers zéro suivant une certaine loi*. Ainsi, soit $\lambda_1 = 1$, ce qui ne diminue en rien la généralité, puisqu'on peut diviser les X par λ_1, et soit

$$\lambda_2 = a + bi,$$

a étant négatif. Pour ne pas m'occuper des autres valeurs des λ, je fais

$$C_3 = \ldots = C_n = 0.$$

Supposons, pour fixer les idées, $b > 0$. En posant

$$t = re^{\theta i},$$

on a

$$| t^{\lambda_2} | = e^{a \log r - b\theta}.$$

Faisons suivre au point (r, θ) la spirale

$$r = e^{-m\theta} \qquad (m > 0),$$

θ tendant vers l'infini positif. On aura

$$a \log r - b\theta = -(am + b)\theta.$$

Si donc m a été choisi de telle sorte que l'on ait

$$am + b > 0$$

(et il suffit pour cela de le prendre assez petit), on est assuré que $|t|$ et $|t^{\lambda_2}$ tendent vers zéro.

Si l'on avait eu $b < 0$, on aurait pris une spirale

$$r = e^{m\theta} \qquad (m > 0),$$

θ tendant vers l'infini négatif.

On obtient donc ainsi, dans tous les cas, un ensemble de courbes intégrales dépendant d'une constante arbitraire, qui ne rentrera pas, en général, dans les ensembles de courbes intégrales considérés plus haut.

10. Nous pouvons facilement généraliser les résultats précédents

en considérant le système

$$t\frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),$$
$$t\frac{dx_2}{dt} = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$t\frac{dx_n}{dt} = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),$$

les φ étant des fonctions holomorphes dans le voisinage de

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = t = 0$$

et s'annulant pour ces valeurs. On voit bien aisément, comme plus haut, qu'en général [1] les termes du premier degré en $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ peuvent être supposés respectivement réduits dans $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ à $\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n$: c'est ce à quoi l'on parvient, en gardant la variable t et en effectuant sur les x un changement de la forme

$$x'_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 t,$$
$$x'_2 = a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 t,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x'_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n t.$$

Nous considérons donc le système

$$t\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 x_1 + \ldots,$$
$$t\frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 x_2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$t\frac{dx_n}{dt} = \lambda_n x_n + \ldots,$$

mais où les termes du second degré ou de degré supérieur peuvent renfermer t; c'est ce qui distingue le cas actuel de celui que nous avons examiné dans les deux numéros précédents. Si les $n+1$ quantités

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n, \quad 1$$

---

(1) Il y a des cas particuliers où cette réduction est impossible, mais nous ne nous y arrêtons pas pour n quelconque. Nous en ferons l'étude approfondie pour $n = 2$.

satisfont aux conditions requises pour l'application de la théorie développée ci-dessus (première Section de ce Chapitre), nous aurons le système d'intégrales

$$\frac{f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)}{t^{\lambda_i}} = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les f étant des fonctions holomorphes en t, x_1, x_2, ..., x_n, et le développement de f_i ne renfermant que x_i comme terme du premier degré. On peut étendre à ce système les remarques du numéro précédent : les x se présenteront sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances entières de

$$t, \quad t^{\lambda_1}, \quad t^{\lambda_2}, \quad \ldots, \quad t^{\lambda_n},$$

et l'on doit ici supprimer ce qui était relatif au changement de t en $\frac{1}{t}$, qui n'aurait plus aucune application, puisque les f dépendent de t.

III. — Étude directe de la forme des intégrales des équations différentielles ordinaires.

11. Les développements de x_1, x_2, ..., x_n suivant les puissances de t^{λ_1}, t^{λ_2}, ..., t^{λ_n}, d'où nous venons de tirer (n°s 8 et 9) des conséquences importantes relativement aux intégrales du système

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

n'ont été établis que *si les* λ *satisfont aux conditions indiquées dans la première Section de ce Chapitre.* Dans le cas contraire, rien ne subsiste de nos résultats. Il y a là une lacune que nous allons, autant que possible, chercher à combler.

Reprenons donc les équations du n° 8:

$$(9) \qquad t\frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad t\frac{dx_2}{dt} = X_2, \qquad \ldots, \qquad t\frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

les X ne dépendant que de x_1, x_2, ..., x_n et ayant respectivement pour termes du premier degré $\lambda_1 x_1$, $\lambda_2 x_2$, ..., $\lambda_n x_n$. Supposons que parmi les quantités λ on puisse en trouver ν,

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_\nu \qquad (\nu \leqq n),$$

satisfaisant aux conditions suivantes, dont les deux premières rappellent celles de la Section I.

1° On peut tracer une droite passant par l'origine et laissant d'un même côté les points du plan ayant pour affixes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$.

2° Aucune des équations

$$\begin{aligned} \lambda_1(p_1 - 1) + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_\nu p_\nu &= 0, \\ \lambda_1 p_1 + \lambda_2(p_2 - 1) + \ldots + \lambda_\nu p_\nu &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_\nu(p_\nu - 1) &= 0 \end{aligned}$$

ne peut être vérifiée pour des valeurs des p entières et positives satisfaisant à l'inégalité

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_\nu \geqq 2.$$

3° Nous supposons enfin que pour aucune valeur des entiers positifs p on n'ait

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_\nu p_\nu = \lambda_i \qquad (i = \nu + 1, \ldots, n),$$

les p satisfaisant à la même inégalité.

12. Nous allons démontrer qu'*on peut trouver pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des développements procédant suivant les puissances de*

$$t^{\lambda_1}, \quad t^{\lambda_2}, \quad \ldots, \quad t^{\lambda_\nu},$$

et convergents si les modules de ces quantités sont suffisamment petits.

Soient

$$y_1 = t^{\lambda_1}, \qquad y_2 = t^{\lambda_2}, \qquad \ldots, \qquad y_\nu = t^{\lambda_\nu}.$$

On va considérer pour un moment les x comme fonctions des variables indépendantes y (¹). En écrivant que les équations (9) sont vérifiées, nous obtenons le système d'équations aux dérivées

(¹) J'ai, pour la première fois, appliqué cette idée de substituer, pour l'étude de leurs intégrales, à des équations différentielles ordinaires des équations aux dérivées partielles convenables, dans deux Notes *Sur la forme des équations différentielles du second ordre dans le voisinage de certains points critiques* (*Comptes rendus*, t. LXXXVII, 1878). L'analyse qui suit n'est que le développement de cette idée.

partielles

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 y_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \lambda_2 y_2 \frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \ldots + \lambda_\nu y_\nu \frac{\partial x_1}{\partial y_\nu} = \lambda_1 x_1 + \ldots,\\
&\lambda_1 y_1 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \lambda_2 y_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \ldots + \lambda_\nu y_\nu \frac{\partial x_2}{\partial y_\nu} = \lambda_2 x_2 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\lambda_1 y_1 \frac{\partial x_n}{\partial y_1} + \lambda_2 y_2 \frac{\partial x_n}{\partial y_2} + \ldots + \lambda_\nu y_\nu \frac{\partial x_n}{\partial y_\nu} = \lambda_n x_n + \ldots.
\end{aligned}$$

Montrons qu'on peut satisfaire à ces équations en prenant pour les x des fonctions holomorphes des y. La démonstration présente une grande analogie avec celle qui nous a occupé au § 5.

Les équations précédentes permettent de calculer de proche en proche les dérivées partielles des x pour les valeurs *zéro* des variables y. Seules les valeurs des dérivées du premier ordre

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial y_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x_\nu}{\partial y_\nu}$$

restent arbitraires ([1]).

Le coefficient d'une dérivée d'une quelconque des fonctions x,

$$\frac{\partial^{p_1+p_2+\ldots+p_\nu} x_h}{\partial y_1^{p_1}\, dy_2^{p_2} \ldots \partial y_\nu^{p_\nu}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

est de la forme

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_h (p_h - 1) + \ldots + \lambda_\nu p_\nu \qquad (\text{pour } h \leqq \nu)$$

et de la forme

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_\nu p_\nu - \lambda_h \qquad (\text{pour } h > \nu).$$

D'après les hypothèses faites au numéro précédent, les modules de ces coefficients sont supérieurs à

$$\varepsilon(p_1 + p_2 + \ldots + p_\nu - 1),$$

ε étant un nombre fixe. On le voit en raisonnant absolument comme au § 4 de ce Chapitre.

Il est facile maintenant de trouver des équations de comparaison permettant d'établir la convergence des développements que nous

---

([1]) En disant ceci, je suppose tous les λ différents; mais le cas où deux ou plusieurs λ sont égaux ne présente pas ici plus de difficultés que dans la Section I.

venons de former. Écrivons d'abord les équations sous la forme

$$\lambda_1 y_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \lambda_2 y_2 \frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \ldots + \lambda_\nu y_\nu \frac{\partial x_1}{\partial y_\nu} - \lambda_1 x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\lambda_1 y_1 \frac{\partial x_n}{\partial y_1} + \lambda_2 y_2 \frac{\partial x_n}{\partial y_2} + \ldots + \lambda_\nu y_\nu \frac{\partial x_n}{\partial y_\nu} - \lambda_n x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

les φ ne renfermant pas de termes du premier degré. Nous formons alors le système

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon\left[y_1 \frac{\partial V_i}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial V_i}{\partial y_2} + \ldots + y_\nu \frac{\partial V_i}{\partial y_\nu} - V_i\right] \\ &= \frac{M}{1 - \dfrac{V_1 + \ldots + V_n}{a}} - M - M\frac{V_1 + \ldots + V_n}{a} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Par raison de symétrie, tous les V sont égaux, et nous avons seulement une seule équation, qui se réduit à une équation à une seule variable V, ne dépendant manifestement que de

$$u = y_1 + y_2 + \ldots + y_n.$$

On a finalement une équation de la forme

$$u\frac{dV}{du} - V = \frac{M'V^2}{a - nV},$$

et cette équation admet une intégrale holomorphe s'annulant pour $u = 0$, et dont la dérivée première prend, pour cette valeur de u, une valeur arbitrairement donnée.

Nous avons donc, pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$, des fonctions holomorphes de $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ dans le voisinage de

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_\nu = 0.$$

En remplaçant $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ respectivement par

$$t^{\lambda_1}, \quad t^{\lambda_2}, \quad \ldots, \quad t^{\lambda_\nu},$$

on obtient, *s'il est possible de faire tendre t vers zéro, de manière que les modules de toutes ces puissances de t tendent en même temps vers zéro,* des intégrales du système (9) tendant vers zéro avec la variable t. Ces intégrales dépendent de ν constantes arbitraires.

On voit que le résultat que nous venons d'établir est plus étendu,

tout en étant de même forme, que celui de la Section précédente. Les hypothèses essentielles portent seulement sur ν *des constantes* λ, au lieu de porter sur toutes ces quantités.

13. La généralisation est immédiate pour le cas où les X contiendraient t, et où nous aurions, comme au § **10**, le système

$$t\frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),$$
$$t\frac{dx_2}{dt} = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$t\frac{dx_n}{dt} = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t).$$

Nous pouvons, comme au paragraphe cité, supposer que les termes du premier degré en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et t se réduisent respectivement, dans $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, à $\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n$.

Nous cherchons ici un développement ordonné suivant les puissances de

$$t, \quad t^{\lambda_1}, \quad t^{\lambda_2}, \quad \ldots, \quad t^{\lambda_\nu} \qquad (\nu \leqq n).$$

Nous aurons les mêmes hypothèses à faire que plus haut, sauf que nous avons ici $\nu + 1$ quantités

$$1, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_\nu.$$

On devra donc pouvoir mener par l'origine une droite laissant d'un même côté les $\nu + 1$ points ayant ces affixes. De plus, on supposera qu'il n'existe aucune relation de la forme

$$p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \ldots + (p_h - 1)\lambda_h + \ldots + p_\nu\lambda_\nu + p_{\nu+1} = 0 \qquad (\text{pour } h \leqq \nu),$$

les p étant des entiers positifs dont la somme est au moins égale à *deux*.

Enfin on n'a pas de relation de la forme

$$p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \ldots + p_\nu\lambda_\nu + p_{\nu+1} = \lambda_i \qquad (i = \nu + 1, \ldots, n),$$

les p étant assujettis aux mêmes conditions.

Il n'est pas besoin de recommencer un nouveau raisonnement.

Nous sommes ramené au cas précédent en considérant le système

$$
\begin{aligned}
t\frac{dx_1}{dt} &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
t\frac{dx_n}{dt} &= \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}),\\
t\frac{dx_{n+1}}{dt} &= x_{n+1},
\end{aligned}
$$

et en prenant la constante qui figure dans x_{n+1}, de manière que celle-ci se réduise à t.

Nous trouvons ainsi des séries ordonnées suivant les puissances de

$$t,\quad t^{\lambda_1},\quad t^{\lambda_2},\quad \ldots,\quad t^{\lambda_\nu},$$

et qui dépendent de ν *constantes arbitraires.*

On pourra toujours tirer parti du théorème précédent, ne fût-ce qu'en se bornant à $\nu = 0$. On aura alors pour les x des fonctions holomorphes, qui ne dépendront d'ailleurs d'aucune arbitraire.

CHAPITRE II.

DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES DU PREMIER ORDRE A DEUX VARIABLES.

I. — Examen du cas général.

1. Nous allons appliquer à l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

les résultats généraux qui viennent d'être établis dans le Chapitre précédent.

On suppose que X et Y s'annulent pour $x = y = 0$ et sont des fonctions holomorphes de x et y dans le voisinage de ces valeurs. Soient

$$X = ax + by + \ldots,$$
$$Y = a'x + b'y + \ldots.$$

D'après ce que nous avons dit (Chap. I, § 2), on pourra faire un changement linéaire de variables sur x et y, si l'équation du second degré

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ a' & b' - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

a ses deux racines distinctes, de telle sorte que l'équation devienne

$$\frac{dx_1}{\lambda_1 x_1 + \ldots} = \frac{dx_2}{\lambda_2 x_2 + \ldots},$$

les termes non écrits dans les dénominateurs étant au moins du second degré; les deux coefficients λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation (1). On peut évidemment supposer que l'une d'elles se réduit à

l'unité. Nous écrirons alors, comme précédemment, le système d'équations

$$t\frac{dx_1}{dt} = \lambda x_1 + \ldots,$$
$$t\frac{dx_2}{dt} = x_2 + \ldots,$$

et nous n'avons qu'à appliquer, dans ce cas particulier, nos conclusions générales.

Reportons-nous au Chapitre précédent; nous avons à considérer les deux points

$$1 \quad \text{et} \quad \lambda \qquad (\text{on suppose } \lambda \neq 0).$$

Si λ *n'est pas une quantité réelle négative,* on pourra évidemment mener par l'origine une droite laissant les points d'un même côté. Supposons de plus que λ ne soit pas *un entier positif ou l'inverse d'un entier positif.* Dans ces hypothèses, aucune des égalités

$$\lambda(p_1 - 1) + p_2 = 0,$$
$$\lambda p_1 + p_2 - 1 = 0$$

ne peut se trouver vérifiée, les p étant des entiers positifs dont la somme est supérieure ou égale à *deux*. Nous aurons donc des développements de x_1 et x_2 suivant les puissances de

$$Ct \quad \text{et} \quad C't^\lambda \qquad (\text{C et C' constantes arbitraires}),$$

développements convergents si Ct et $C't^\lambda$ sont de modules suffisamment petits.

Une distinction est manifestement à faire, suivant que la partie réelle de λ est positive ou négative. On pourra, dans le premier cas, faire tendre t vers zéro d'une manière quelconque (son argument restant fini). Dans le second cas, il faut, au contraire, faire tendre t vers zéro d'une manière convenable. Soit

$$\lambda = a + bi \qquad (a < 0),$$

et supposons $b > 0$. En posant $t = re^{\theta i}$, on a

$$|t^\lambda| = e^{a \log r - b\theta};$$

faisons suivre au point (r, θ) la spirale

$$r = e^{-m\theta} \qquad (m > 0),$$

θ tendant vers l'infini positif. On aura

$$a \log r - b\theta = -(am + b)\theta.$$

Si donc m a été choisi (il suffit de le prendre assez petit) pour que

$$am + b > 0,$$

$|t^\lambda|$ et $|t|$ tendront tous deux vers zéro.

Si l'on avait eu $b < 0$, on aurait pris une spirale

$$r = e^{m\theta} \quad (m > 0),$$

θ tendant vers l'infini négatif.

Ainsi, avec les hypothèses faites plus haut, nous pouvons dire que l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

a une infinité de courbes intégrales, dépendant d'une constante arbitraire, *passant par l'origine ou s'en rapprochant indéfiniment*, suivant que la partie réelle de λ est *positive* ou *négative*.

Je rappelle, comme je l'ai expliqué (Chap. I, § 8), que j'entends par *courbe intégrale* la multiplicité réelle ou imaginaire à une dimension, satisfaisant à l'équation différentielle.

Ajoutons la remarque très importante qu'*il n'existe pas d'autres courbes intégrales passant par l'origine ou s'en rapprochant indéfiniment* que celles que nous venons d'obtenir. Pour le démontrer, il suffit de généraliser le raisonnement fait au Tome II (p. 356) pour établir, en dehors des points singuliers, l'existence unique d'un système d'intégrales par les valeurs initiales. Reportons-nous à la forme de l'intégrale générale (Chap. I, § 7)

$$\frac{f_1(x, y)^{\frac{1}{\lambda}}}{f_2(x, y)} = C,$$

f_1 et f_2 étant holomorphes dans le voisinage de $x = 0$, $y = 0$ et s'annulant pour ces valeurs. La première fonction f_1 renferme seulement un terme en y comme terme du premier degré, et f_2 un terme en x.

Or on peut poser

$$f_2(x, y) = t;$$

on aura alors nécessairement

$$f_1(x, y) = Ct^\lambda.$$

Pour une courbe intégrale passant à l'origine, ou s'en rapprochant indéfiniment, t et t^λ tendront nécessairement vers zéro, et *les développements précédents donnent, par suite, toutes les courbes intégrales* (¹).

2. Briot et Bouquet ont, les premiers, entrepris l'étude des courbes intégrales de l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

passant par $x = 0$, $y = 0$, dans le cas où X et Y s'annulent pour ces valeurs des variables. Dans leur mémorable Mémoire (²), sur lequel nous reviendrons bientôt, ces éminents géomètres montrent que, *en général*, cette étude peut se ramener à celle de l'équation

$$x\frac{dy}{dx} = ax + by + \ldots,$$

les termes non écrits étant de degré supérieur à *un*.

Les racines λ sont égales à *un* et b. On peut ici prendre $t = x$, et, d'après le § 1, nous aurons, pour y, un développement ordonné suivant les puissances de

$$x \quad \text{et} \quad C'x^b,$$

la constante que nous avons désignée par C étant égale à l'unité. Cette conclusion suppose que b n'est ni un entier positif, ni l'inverse d'un entier positif, ni une quantité réelle négative, comme on le voit en se reportant au § 1. Sauf quand b est un entier positif, l'équation admettra toujours une intégrale *holomorphe*, qu'on obtiendra en faisant $C' = 0$.

Sans se servir de développements en séries, Briot et Bouquet ob-

---

(¹) Outre les Notes citées (p. 18), je mentionnerai encore sur cette question un article de M. Poincaré [*Sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles* (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XLV; 1878)] et une Note que j'ai publiée dans le *Bulletin de la Société mathématique* en 1884 (*Sur la forme des équations différentielles du premier ordre dans le voisinage de certains points critiques*).

(²) Briot et Bouquet, *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles* (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXI; 1856).

tiennent les résultats que nous venons d'indiquer. Je veux seulement faire une remarque sur une contradiction apparente entre un résultat du Mémoire que nous citons et un des résultats du § 1. Ainsi on trouve dans le Mémoire de Briot et Bouquet le théorème suivant :

Quand dans l'équation

$$x\frac{dy}{dx} = ax + by + \ldots$$

la partie réelle de b est négative, l'équation n'admet pas d'autre intégrale s'annulant pour $x = 0$ *que l'intégrale holomorphe.*

Ce résultat suppose implicitement que x tende vers zéro en décrivant un chemin de longueur finie et correspondant à un argument restant fini. Nous avons vu, au contraire (§ 1), qu'il y a (b étant complexe) une infinité de courbes intégrales se rapprochant indéfiniment de l'origine. Mais, et c'est ce qui explique l'apparente contradiction, elles correspondent à x tendant vers *zéro* en tournant une infinité de fois autour de l'origine.

Briot et Bouquet démontrent de la manière suivante (*loc. cit.*) leur théorème. Ils ont établi précédemment l'existence d'une intégrale holomorphe y_1. En posant

$$y = y_1 + z,$$

l'équation prend la forme

$$x\frac{dz}{dx} = z(b + \alpha z + \beta x + \ldots),$$

que l'on peut encore écrire

$$x\frac{dz}{dx} = bz(1 + \alpha' z + \beta' z^2 + \ldots) + zx\,\varphi(z, x),$$

et, par suite,

$$\frac{dz}{z(1 + \alpha' z + \ldots)} = b\frac{dx}{x} + \psi(z, x)\,dx,$$

$\psi(z, x)$ étant, comme $\varphi(z, x)$, holomorphe dans le voisinage de $z = x = 0$. En intégrant le long d'un arc de courbe aboutissant à l'origine et désignant par z_0 la valeur de z en un point x_0 de cette

courbe, on a

$$\log \frac{z}{z_0} + \varphi(z) = \log\left(\frac{x}{x_0}\right)^b + \int_{x_0}^{x} \psi(z, x)\, dx,$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe dans le voisinage de $z = 0$. Puisque l'arc a, par hypothèse, une longueur finie, l'intégrale qui figure dans le second membre restera inférieure à une limite fixe; d'autre part, l'argument de x restant fini, la partie réelle de

$$\log\left(\frac{x}{x_0}\right)^b$$

grandit indéfiniment en étant positive. Dans le premier membre, au contraire, la partie réelle grandit indéfiniment en étant négative; il y a donc une contradiction qui établit l'impossibilité que nous voulions mettre en évidence. La même conclusion serait encore applicable si la partie réelle de b était nulle.

3. Nous avons exclu, au § 1, le cas où λ était une constante réelle négative. Nous ne pourrons plus faire usage des mêmes développements *si λ est réel et négatif,* ou du moins ils ne peuvent être, en général, convergents que si C ou C' est nul.

En faisant d'abord $C' = 0$, on aura pour x et y des développements suivant les puissances de t, convergents pour t assez petit et qui tendront vers zéro en même temps que t. Nous avons ainsi une *première* courbe intégrale ne renfermant aucun arbitraire.

Une *seconde* intégrale nous sera fournie en posant

$$C = 0:$$

les développements sont alors convergents pour $|t|$ suffisamment grand, et x et y tendent vers zéro en même temps que $\frac{1}{t}$.

Nous obtenons donc ici *deux courbes intégrales passant à l'origine.*

Il est facile de voir que, dans l'hypothèse où nous sommes placé, il n'y a pas d'autre courbe intégrale de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a'x + b'y + \ldots}{ax + by + \ldots}$$

passant à l'origine, avec une tangente déterminée, c'est-à-dire avec une limite finie et déterminée pour $\frac{y}{x}$ quand le point (x, y) se rap-

proche de l'origine, et de plus x se rapprochant indéfiniment de l'origine en suivant un arc de longueur finie. Soit, en effet,

$$y = tx;$$

l'équation devient

$$(\text{E}) \qquad x\frac{dt}{dx} = \frac{(a' + b't) - t(a + bt) + x\varphi(x, t)}{a + bt + x\psi(x, t)},$$

t tendant, *par hypothèse,* vers une limite quand x tend vers *zéro;* cette limite ne peut être que l'une ou l'autre racine de l'équation du second degré

$$a' + b't - t(a + bt) = 0.$$

En effet, si la limite était une quantité t_0 différente d'une racine de cette équation, l'équation précédente pourrait s'écrire

$$\frac{dx}{dt} = x\chi(t, x),$$

$\chi(t, x)$ étant holomorphe dans le voisinage de $t = t_0$, $x = 0$. Pour cette équation, on aurait une intégrale x tendant vers *zéro* quand t tend vers t_0; mais ceci est impossible, car l'intégrale de cette équation s'annulant pour $t = t_0$ est nécessairement $x = 0$ identiquement.

L'équation (E) aura la forme de celle que nous avons considérée au § 2 avec Briot et Bouquet. En désignant par t_1 une racine de l'équation du second degré et posant $t = t_1 + \theta_1$, nous avons

$$x\frac{d\theta_1}{dx} = A_1 x + B_1\theta_1 + \ldots,$$

et, pour la seconde racine t_2, nous avons une équation analogue

$$x\frac{d\theta_2}{dx} = A_2 x + B_2\theta_2 + \ldots.$$

Or l'équation en λ,

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ a' & b' - \end{vmatrix} = 0,$$

a, comme nous l'avons supposé au § 1, pour racines 1 et λ. Un calcul très facile montre alors que

$$B_1 = -\frac{\lambda - 1}{\lambda}, \qquad B_2 = \lambda - 1,$$

B_1 et B_2 étant négatifs : les conclusions du § 2 sont alors applicables, et nous n'avons pas d'autres intégrales pour les deux équations en θ que les intégrales holomorphes, ce qui montre que l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a'x + b'y + \ldots}{ax + by + \ldots}$$

n'a pas d'autres intégrales *satisfaisant aux hypothèses faites* que les deux intégrales signalées plus haut.

On a longtemps présumé que ces deux intégrales sont, *en dehors de toute hypothèse,* les seules *qui passent à l'origine ou qui s'en rapprochent indéfiniment.*

Dans un excellent travail sur les points singuliers des équations différentielles ([1]), M. Dulac a montré que la question était très complexe. Prenons, par exemple, l'équation

$$x\frac{dy}{dx} + y(\nu + \ldots) = 0,$$

où ν est positif, équation à laquelle peut toujours se ramener le cas où λ est négatif.

M. Dulac examine particulièrement le cas où ν est un nombre rationnel $\frac{p}{q}$, et montre qu'*il y a alors, en général, une infinité d'intégrales pour lesquelles x et y tendent vers zéro.* Citons, comme exemple, l'équation

$$x\,dy + y(1 - xy)\,dx = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$Cxy = 1 + xy\log x,$$

C étant la constante arbitraire.

II. — Étude d'un cas particulier remarquable.

4. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que l'équation (1) en λ avait ses deux racines distinctes. Reprenons donc l'équation

---

([1]) H. Dulac, *Recherches sur les points singuliers des équations différentielles* (*Journal de l'École Polytechnique,* IXe Cahier, 1904). *Voir* aussi la suite des recherches de cet auteur dans les *Annales de l'Université de Grenoble,* t. XVII, 1905 et *Journal de Mathématiques* de M. Jordan, 1906.

différentielle

$$\frac{dx}{ax+by+\ldots}=\frac{dy}{a'x+b'y+\ldots},$$

en supposant que l'équation en λ

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ a' & b'-\lambda \end{vmatrix}=0$$

ait une racine double. On peut alors effectuer sur x et y une substitution linéaire de telle sorte que les équations prennent la forme

$$\frac{dx}{\lambda x+\ldots}=\frac{dy}{\mu x+\lambda y+\ldots}.$$

Considérons, en effet, l'équation

$$(ax+by+\ldots)\frac{\partial f}{\partial x}+(a'x+b'y+\ldots)\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Faisons le changement de variables

$$x_1=\alpha x+\beta y,$$
$$y_1=\gamma x+\delta y;$$

nous avons

$$(ax+by+\ldots)\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x_1}+\gamma\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)+(a'x+b'y+\ldots)\left(\beta\frac{\partial f}{\partial x_1}+\delta\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)=0.$$

On détermine α et β par la condition que

$$\alpha(ax+by)+\beta(a'x+b'y)=\lambda(\alpha x+\beta y),$$

ce qui donne pour λ la racine de l'équation du second degré écrite plus haut. Posons ensuite

$$\gamma(ax+by)+\delta(a'x+b'y)=\mu(\alpha x+\beta y)+\lambda(\gamma x+\delta y),$$

c'est-à-dire

$$\gamma(a-\lambda)+\delta a'=\mu\alpha,$$
$$\gamma b+\delta(b'-\lambda)=\mu\beta,$$

et ces deux équations se réduisent à une seule, comme on le vérifie aisément, en s'appuyant sur ce que l'équation du second degré a une racine double.

On a, par suite, à considérer les deux équations (en divisant les

dénominateurs par λ, ce qui revient à faire $\lambda = 1$)

$$(2)\qquad \begin{cases} t\dfrac{dx}{dt} = x + \ldots, \\ t\dfrac{dy}{dt} = \mu x + y + \ldots. \end{cases}$$

5. Nous allons chercher si l'on peut obtenir des intégrales de cette équation ordonnées suivant les puissances de

$$u = -t, \qquad v = t\log t.$$

Nous formons ainsi le système d'équations aux dérivées partielles

$$(3)\qquad \begin{cases} u\dfrac{\partial x}{\partial u} + v\dfrac{\partial x}{\partial v} - u\dfrac{\partial x}{\partial v} = x + \ldots, \\ u\dfrac{\partial y}{\partial u} + v\dfrac{\partial y}{\partial v} - u\dfrac{\partial y}{\partial v} = \mu x + y + \ldots, \end{cases}$$

en substituant dans les équations, pour x et y, des fonctions de u et v, que nous allons pour un moment considérer comme des variables indépendantes.

Les équations (3) admettent-elles un système d'intégrales holomorphes dans le voisinage de $u = 0$, $v = 0$? Nous remarquons d'abord qu'elles permettent de calculer les dérivées partielles successives de x et y pour $u = 0$, $v = 0$.

En différentiant, en effet, p fois par rapport à u et n fois par rapport à v, la première équation nous donne l'expression

$$(n + p - 1)\frac{\partial^{n+p} x}{\partial u^p \partial v^n} - p\frac{\partial^{n+p} x}{\partial u^{p-1} \partial v^{n+1}} \qquad (\text{pour } u = 0,\ v = 0),$$

exprimée en fonction des dérivées partielles de x et y d'ordre inférieur à $n + p$. Donc, on pourra calculer toutes les dérivées partielles de x d'un ordre déterminé en fonction des dérivées d'ordre inférieur de x et y; la seconde équation donnera alors les dérivées partielles du même ordre de y en fonction des mêmes dérivées. La seule dérivée partielle restant arbitraire est la dérivée $\dfrac{\partial x}{\partial u}$.

Nous pourrons donc former des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de u et v, et il reste à démontrer que ces séries convergent pour des valeurs suffisamment petites de u et v. Nous nous trouvons ici dans des circonstances assez différentes de celles que nous avons précédemment rencontrées.

6. Considérons, au lieu du système (2), le système

$$(4)\quad \begin{cases} t\dfrac{dx}{dt} = x + \ldots, \\ t\dfrac{dy}{dt} = \mu x + \lambda y + \ldots, \end{cases}$$

qui ne diffère de (2) qu'en ce que, dans le second membre, le coefficient de y est λ au lieu de *un*; λ désigne une constante positive inférieure à *un*.

Avec le système (4), nous rentrons dans le cas général, et nous avons des intégrales développées suivant les puissances de

$$t \quad \text{et} \quad t^{\lambda}.$$

Nous pouvons aussi considérer ces intégrales comme développées suivant les puissances de

$$-t \quad \text{et} \quad \frac{t^{\lambda} - t}{\lambda - 1}.$$

En posant

$$u = -t, \qquad v = \frac{t^{\lambda} - t}{\lambda - 1},$$

on est conduit à former le système d'équations aux dérivées partielles

$$(5)\quad \begin{cases} u\dfrac{\partial x}{\partial u} + \lambda v\dfrac{\partial x}{\partial v} - u\dfrac{\partial x}{\partial v} = x + \ldots, \\ u\dfrac{\partial y}{\partial u} + \lambda v\dfrac{\partial y}{\partial v} - u\dfrac{\partial y}{\partial v} = \mu x + \lambda y + \ldots, \end{cases}$$

et, ce système correspondant au cas général, nous sommes assuré qu'on peut y satisfaire par des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de u et v.

Or la comparaison des systèmes (3) et (5) est très facile; le coefficient de la dérivée

$$\frac{\partial^{n+p} x}{\partial u^p\, \partial v^n}$$

est, pour le premier système, $p + n - 1$, tandis qu'il est, pour le second,

$$p + \lambda n - 1.$$

Donc, dans le développement tiré de (5), les coefficients auront des dénominateurs numériques plus petits ($\lambda < 1$) que dans le déve-

loppement tiré de (3). *La convergence des développements que nous avons déduits des équations* (3) *est donc assurée.*

Les intégrales du système (2) *se présentent donc sous forme de séries ordonnées suivant les puissances croissantes de*

$$t \quad \text{et} \quad t\log t;$$

elles dépendent d'une constante arbitraire.

7. Dans les conclusions générales du paragraphe 1 de ce Chapitre, a été exclu le cas où λ est un entier positif ou l'inverse d'un entier positif. Ces cas se ramènent au cas particulier que nous venons d'étudier. Pour le faire voir, considérons le système

$$t\frac{dx}{dt} = x + \ldots,$$
$$t\frac{dy}{dt} = my + \alpha x + \ldots,$$

les termes non écrits étant de degrés supérieurs au premier, et m étant un entier positif. En posant,

$$y = x\left(y' + \frac{\alpha}{1-m}\right),$$

on ramène ce système au suivant,

$$t\frac{dx}{dt} = x + \ldots,$$
$$t\frac{dy'}{dt} = (m-1)y' + \alpha' x + \ldots;$$

c'est un système de la même forme où m est remplacé par $m - 1$. On pourra donc, en opérant de proche en proche, être ramené au cas où $m = 1$, que nous venons d'étudier.

III. — Réduction de l'équation à des formes simples.

8. Nous avons dit (§ 2) que Briot et Bouquet [1] réduisent, en général, l'équation à une forme plus simple, moyennant, il est vrai,

---

[1] *Journal de l'École Polytechnique*, t. XXI, p. 161.

quelques hypothèses complémentaires. Reprenons l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

que nous écrirons

$$(A' y^{\alpha'} x^{\beta'} + \ldots) \frac{dy}{dx} = A y^{\alpha} x^{\beta} + \ldots.$$

Les quantités x et y s'annulent en même temps. Supposons que y soit d'un degré déterminé μ par rapport à x, et de telle sorte que $\frac{dy}{dx}$ soit de degré $\mu - 1$. Il devra, dans ces conditions, y avoir dans les deux membres de l'équation précédente des termes de même degré, à savoir les termes de moindre degré. On aura alors une relation de la forme

$$\alpha' \mu + \beta' + \mu - 1 = \alpha \mu + \beta,$$

ce qui donne

$$\mu = \frac{\beta + 1 - \beta'}{\alpha' + 1 - \alpha}.$$

Le degré μ est donc alors un nombre commensurable ([1]).

Soit $\mu = \frac{p}{q}$; posons

$$x = t^q,$$
$$y = v t^p,$$

il viendra

$$(A' v^{\alpha'} t^{p\alpha' + q\beta'} + \ldots)\left(p t^{p-1} v + t^p \frac{dv}{dt}\right) - (A v^{\alpha} t^{p\alpha + q\beta} + \ldots) q t^{q-1} = 0;$$

mais on a

$$(\alpha' + 1)\mu + \beta' = \alpha\mu + \beta + 1$$

ou

$$p(\alpha' + 1) + q\beta' = p\alpha + q(\beta + 1).$$

La variable t entre donc au même degré dans tous les termes du premier groupe, et à un degré plus élevé dans les autres termes.

([1]) Nous supposons que l'équation donnant μ ne se réduise pas à une identité. Cette circonstance peut se présenter; c'est ce qui arrive, par exemple, pour l'équation

$$x \frac{dy}{dx} = k y,$$

où k représente une constante. Le degré de y par rapport à x, qui est k, n'est pas, en général, commensurable.

Après division par la puissance de t en facteur dans chaque terme, on aura

$$(A'v^{\alpha'}+\ldots)\left(pv+t\frac{\partial v}{\partial t}\right)-q(Av^{\alpha}+\ldots)=0.$$

Considérons alors l'équation

$$f(v)=p(A'v^{\alpha'}+\ldots)v-q(Av^{\alpha}+\ldots)=0.$$

Soit v_0 une racine de cette équation; en posant

$$v=v_0+u,$$

nous avons pour u l'équation

$$t\frac{du}{dt}=\varphi(u,t),$$

φ étant holomorphe dans le voisinage de $u=0$, $t=0$ et s'annulant pour ces valeurs. Ceci suppose que v_0 n'annule pas séparément les deux polynomes

$$Av^{\alpha}+\ldots \quad \text{et} \quad A'v^{\alpha'}+\ldots.$$

9. Pour trouver l'ensemble des termes correspondant au moindre degré, Briot et Bouquet procèdent comme dans l'étude des fonctions algébriques. Dans un plan, traçons deux axes rectangulaires Ox et Oy, et marquons les points qui ont pour coordonnées $(\alpha, \beta+1)$, $(\alpha'+1, \beta')$, ... Nous voyons d'abord qu'à des termes de même degré infinitésimal correspondent des points placés en ligne droite; et, en effet, la valeur de μ trouvée précédemment montre que la droite qui joint les points correspondant à deux termes de même degré a une direction constante; cette droite fait avec l'axe des x un angle obtus dont la tangente en valeur absolue est égale à μ. Si, par un point quelconque, $(\alpha''+1, \beta'')$ ou $(\alpha'', \beta''+1)$, on fait passer une droite parallèle à la direction constante, cette droite ayant pour équation

$$y-\beta''=-\mu(x-\alpha''-1)$$

ou

$$y-\beta''-1=-\mu(x-\alpha''),$$

son ordonnée à l'origine $\beta''+\mu(\alpha''+1)$ ou $\beta''+1+\mu\alpha''$ surpasse d'une unité le degré du terme correspondant. Il en résulte que les droites parallèles sur lesquelles sont placés les points qui corres-

pondent aux divers groupes de termes s'éloignent de l'origine à mesure que le degré de ces termes augmente; par conséquent, la droite qui passe par des points d'un groupe de moindre degré laisse à sa droite tous les autres.

Nous sommes donc conduits, comme dans l'étude des courbes algébriques, à former une ligne polygonale, aux différents côtés de laquelle correspondront des termes de même degré. Que l'on imagine une droite coïncidant d'abord avec Oy et se mouvant parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'elle rencontre un premier point; qu'on la fasse alors tourner autour de ce premier point en diminuant son ordonnée à l'origine jusqu'à ce qu'elle rencontre un deuxième point; qu'on la fasse tourner autour de ce deuxième point dans le même sens jusqu'à ce qu'elle en rencontre un troisième, et ainsi de suite jusqu'à ce que la droite devienne parallèle à Ox. On formera ainsi une ligne polygonale dont chaque côté passe par deux ou plusieurs points et laisse tous les autres à sa droite. Chacun des côtés de cette ligne convexe donnera une manière d'établir un groupe de termes permettant de faire la transformation du paragraphe précédent, et l'on aura ainsi les diverses intégrales répondant aux conditions initiales.

10. Revenons à l'équation

$$t\frac{du}{dt} = \varphi(u, t), \qquad \varphi(0, 0) = 0.$$

Son étude complète se trouve faite dans les deux Sections précédentes, pour le cas général où, posant

$$\varphi(u, t) = at + bu + \ldots,$$

le coefficient b n'est pas nul.

Nos théories générales ne s'appliquent pas à ce cas particulier. Nous savons seulement qu'il y a, dans ce cas, une intégrale holomorphe dans le voisinage de $t = 0$ et s'annulant pour $t = 0$; son existence se trouve établie par la même analyse que celle qui a été employée dans l'étude des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de t et t^b, au cas où b n'était pas nul (on ne considère ici qu'un développement suivant les puissances de t). En désignant par u_0 l'intégrale holomorphe, et posant

$$u = u_0 + v$$

on aura une équation de la forme

$$t\frac{dv}{dt} = v(Av^m + Bt + \ldots),$$

le terme $Av^m (m \geqq 1)$ étant le terme de moindre degré en v se rencontrant dans la parenthèse. Pour avoir quelque renseignement sur les intégrales de cette équation, posons

$$t = \lambda v^{m+1};$$

on aura une équation de la forme

$$v^{m+1}\frac{d\lambda}{dv} = \lambda\psi(\lambda, v),$$

$\psi(\lambda, v)$ étant holomorphe dans le voisinage de $\lambda = 0$, $v = 0$, et étant différente de zéro pour ces valeurs de λ et v. Écrivons l'équation précédente

$$v^{m+1}\frac{d\lambda}{dv} = \lambda[A + Bv + \ldots + Hv^m + Kv^{m+1} + \ldots + \lambda f(\lambda, v)],$$

et considérons d'abord l'équation

$$v^{m+1}\frac{d\lambda}{dv} = \lambda(A + Bv + \ldots + Hv^m).$$

L'intégration est immédiate.

Nous aurons

$$\lambda = w_0 v^H e^{-\varphi(v)};$$

en posant

$$\varphi(v) = \frac{A}{mv^m} + \frac{B}{(m-1)v^{m-1}} + \ldots.$$

Si l'on fait tendre v vers *zéro, dans une direction convenable,* λ tendra vers zéro. Prenons alors

$$\lambda = wv^H e^{-\varphi(v)};$$

l'équation à laquelle satisfera w sera

$$\frac{dw}{dv} = w[K + Lv + \ldots + wv^{H-m-1}e^{-\varphi(v)}f(w, v)].$$

On aura pour cette équation une intégrale tendant vers une valeur arbitraire w_0, quand v tend vers zéro dans une direction telle que $e^{-\varphi(v)}$

tende vers zéro en même temps que v, ce qui est évidemment possible. Mais on a

$$t = w v^{m+1+H} e^{-\varphi(v)}.$$

Donc t tendra aussi vers zéro, en tournant d'ailleurs, en général, une infinité de fois autour de l'origine. Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

L'équation

$$t\frac{du}{dt} = \varphi(u, t) \qquad [\varphi(0, 0) = 0],$$

$\varphi(u, t)$ étant holomorphe dans le voisinage de $u = 0$, $t = 0$ et ne renfermant pas de terme du premier degré en u, admet une infinité de courbes intégrales se rapprochant indéfiniment de l'origine.

11. En faisant la réduction du § 8, nous avons supposé que v_0 n'annulait pas à la fois deux polynomes en v. S'il en était ainsi, l'équation entre u et t prendrait, en général, la forme

$$t\frac{du}{dt} = \frac{au + bt + \ldots}{a'u + b't + \ldots}.$$

En posant

$$au + bt = wt,$$

elle devient

$$(6) \qquad t^2\frac{dw}{dt} = \alpha w + \beta t + \ldots.$$

C'est là un type d'équations pour lequel se présentent des circonstances toutes différentes de celles que nous avons rencontrées jusqu'ici. Le point $t = 0$ est ici, en général, *une singularité essentielle,* comme le montre l'exemple simple de l'équation

$$t^2\frac{dw}{dt} = \alpha w.$$

L'équation (6) *n'admettra pas, en général, d'intégrale holomorphe;* c'est une circonstance qui mérite d'être signalée, car le calcul des coefficients du développement peut se faire de proche en proche, et cependant le développement n'est pas convergent. Il

suffira, pour prouver cette assertion, de considérer l'équation

$$t^2 \frac{dw}{dt} = \alpha w + \beta t.$$

Soit

$$w = A_1 t + A_2 t^2 + \ldots + A_n t^n + \ldots,$$

on aura

$$\alpha A_1 + \beta = 0, \qquad A_2 \alpha = A_1, \qquad \ldots, \qquad A_n \alpha = (n-1) A_{n-1}, \qquad \ldots;$$

donc

$$A_n \alpha^{n-1} = 1.2\ldots(n-1) A_1;$$

on a donc la série de terme général

$$\frac{1.2\ldots(n-1)}{\alpha^{n-1}} x^n,$$

qui ne converge manifestement que pour $x = 0$.

12. Dans les réductions faites dans cette Section, nous avons supposé, avec Briot et Bouquet, que certaine variable était de degré déterminé par rapport à certaine autre. Pour une étude plus approfondie, nous renverrons aux Mémoires de M. H. Dulac, que nous avons cités à la fin de la première Section de ce Chapitre.

En étudiant plus loin le cas où x et y restent réelles, nous reviendrons sur les équations différentielles de la forme

$$x^m \frac{dy}{dx} = F(x, y),$$

$F(x, y)$ étant holomorphe autour de $x = 0$, $y = 0$, et s'annulant pour ces valeurs

IV. — Équations différentielles du premier ordre non résolues par rapport au coefficient différentiel.

13. Nous avons considéré jusqu'ici des équations différentielles pour lesquelles la dérivée $\frac{dy}{dx}$ était une fonction uniforme de x et y, tout au moins dans le voisinage d'un certain système de valeurs de x et y. Considérons maintenant une équation non résolue

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{E}$$

f désignant un polynome en $\frac{dy}{dx}$. Soit un système de valeurs (x_0, y_0) de (x, y). Si l'équation

$$f(x, y, \mathrm{Y}) = 0$$

admet, pour $x = x_0$, $y = y_0$, une racine simple Y_0, on pourra regarder Y comme une fonction uniforme de x et y dans le voisinage de $x = x_0$, $y = y_0$, et nous nous trouverons, pour l'étude de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{Y},$$

dans un cas simple : l'intégrale y devenant égale à y_0 pour $x = x_0$ sera une fonction holomorphe de x dans le voisinage de x_0 (si Y_0 est fini); si Y_0 est infini (simple) pour $x = x_0$, $y = y_0$, l'intégrale devenant égale à y_0 pour $x = x_0$ a, en ce point, un point critique algébrique.

Supposons, au contraire, que Y_0 soit une racine multiple d'ordre m de l'équation

$$f(x_0, y_0, \mathrm{Y}) = 0;$$

les circonstances seront tout autres. Soit

$$\mathrm{Y} = \mathrm{Y}_0 + \mathrm{Y}', \qquad x = x_0 + x', \qquad y = y_0 + y';$$

nous avons d'une manière générale, en développant,

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} x' + \frac{\partial f}{\partial y_0} y' + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{Y}_0} \mathrm{Y}' + \ldots = 0;$$

toutes les dérivées $\frac{\partial f}{\partial \mathrm{Y}_0}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} f}{\partial \mathrm{Y}_0^{m-1}}$ étant nulles.

Posons

$$y' = \mathrm{Y}_0 x' + y'',$$

ce qui conduit à la relation

$$\mathrm{Y}_0 + \mathrm{Y}' = \mathrm{Y}_0 + \frac{dy''}{dx'} \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy''}{dx'} = \mathrm{Y}'.$$

Nous avons alors

$$x'\left(\frac{\partial f}{\partial x_0} + \mathrm{Y}_0 \frac{\partial f}{\partial y_0}\right) + \frac{\partial^m f}{\partial \mathrm{Y}_0^m} \mathrm{Y}'^m + \ldots = 0,$$

équation différentielle entre x', y'' et $Y' = \frac{dy''}{dx'}$. Nous poserons enfin

$$y'' = tx', \qquad x' = x''^m,$$

et, par conséquent, en supposant

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} + Y_0 \frac{\partial f}{\partial y_0} \neq 0,$$

on aura

$$x'' \frac{dt}{dx''} = -mt + x'' \varphi(x'', t),$$

$\varphi(x'', t)$ étant holomorphe dans le voisinage de $x'' = 0$, $t = 0$. Or nous savons que cette équation en t admet une intégrale holomorphe s'annulant pour $x'' = 0$.

Donc, l'intégrale de l'équation (E), *prenant pour x_0 la valeur y_0, sera, en général, une fonction ayant m valeurs autour du point x_0.*

14. Dans le cas où l'on aurait

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} + Y_0 \frac{\partial f}{\partial y_0} = 0$$

en même temps que

$$\frac{\partial f}{\partial Y_0} = \ldots = \frac{\partial^{m-1} f}{\partial Y_0^{m-1}} = 0 \qquad (m \geqq 2),$$

des circonstances différentes pourraient se présenter. On aurait alors à chercher l'ordre infinitésimal de Y' par rapport à x'; il faudrait pour cela employer des considérations analogues, quoique dans des cas plus compliqués, à celles dont nous nous sommes servi au commencement de la Section précédente. Mais nous renverrons, pour ce point, au Mémoire déjà cité de Briot et Bouquet, et nous terminerons ce Chapitre par quelques remarques sur les singularités des intégrales des équations différentielles du premier ordre, ayant pour objet de compléter ce que nous avons déjà dit à ce sujet (t. II, 2e édition, p. 367 et suiv.).

Ajoutons seulement que la racine multiple Y_0 a été supposée finie; mais, en regardant x comme fonction de y, la discussion précédente trouvera son application.

15. Supposons que le premier membre de (E) soit un polynome en y, $\frac{dy}{dx}$ et même en x (cette dernière hypothèse ne serait pas indispensable). Cherchons quelles circonstances pourraient nous arrêter quand nous effectuons le prolongement analytique d'une intégrale. Tant que Y ne cesse pas d'être une fonction bien déterminée ayant une valeur (finie ou infinie) pour le système correspondant de valeurs de x et y, il n'y a aucune difficulté; l'intégrale y sera une fonction de x qui ne présentera que des pôles ou des points critiques algébriques. Dans le cas où Y cesse d'être une fonction uniforme de x et y pour un certain système de valeurs de ces grandeurs, il en est encore de même en général, comme nous venons de le voir au paragraphe précédent. Ceci peut cesser d'être vrai dans des cas particuliers, mais alors les systèmes de valeurs de x et y devant satisfaire aux trois équations

$$f(x, y, \mathrm{Y}) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{Y}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

sont, sauf des cas très particuliers [1], en nombre limité, et les valeurs de (x) pour lesquelles il peut en être ainsi sont déterminées.

Changeons, dans (E), y en $\frac{1}{y}$, il y aura certains systèmes de valeurs de (x, y) où y sera nul, et présentant le caractère singulier de satisfaire à la fois à un système de trois équations : nous serons ainsi conduit à considérer un certain nombre de valeurs parfaitement déterminées de x.

Si maintenant nous écartons les diverses valeurs de x sur lesquelles nous venons d'appeler l'attention et que nous pouvons appeler *valeurs singulières*, nous sommes assuré que toute intégrale prenant en un point X différent de ces *points singuliers* une valeur *déterminée* aura en X un point ordinaire, un pôle ou un point critique algébrique.

On est donc conduit à cet énoncé que, *en dehors de certains points qu'on peut marquer à l'avance, toute intégrale d'une équation algébrique du premier ordre ne peut avoir comme singularités que des pôles ou des points critiques algébriques.*

---

[1] Nous y reviendrons dans le Chapitre suivant, où nous traiterons des solutions singulières.

Ce théorème est fondamental, et l'on s'est souvent borné, pour l'établir, à des raisonnements équivalents à ceux que nous venons de faire. La démonstration manque cependant de rigueur; car on pourrait se demander si un point X, différent des valeurs singulières que nous avons réservées, ne pourrait pas être pour une intégrale un point d'indétermination où cette intégrale ne prendrait pas une valeur déterminée.

Nous avons déjà examiné cette question dans le cas où l'équation est du premier degré en $\frac{dy}{dx}$. Comme je l'ai dit alors (t. II, *loc. cit.*), c'est M. Painlevé qui a, le premier, approfondi la difficulté qui subsistait. La marche suivie pour établir le théorème de M. Painlevé peut se transporter ici sans modification, comme on le voit immédiatement.

Au point X correspondent certaines valeurs de Y

$$Y_1, \quad Y_2, \quad \ldots, \quad Y_\mu$$

(parmi lesquelles peut se trouver l'infini) telles que l'intégrale y, *prenant* pour $x = X$ une de ces valeurs, ait en X un pôle ou un point critique algébrique; nous avons vu plus haut comment on pourrait obtenir ces valeurs. Il n'y a qu'à répéter alors ce que nous avons dit (t. II, p. 368 et suiv.).

CHAPITRE III.

DES SOLUTIONS SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.

I. — Équations du premier ordre [1].

1. Considérons, pour plus de netteté, une équation différentielle algébrique entre x, y et y',

$$f(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

On envisage une fonction y de x satisfaisant à cette équation. Si, pour une valeur de x et la valeur correspondante de y, y' est une fonction uniforme et continue de x et y dans le voisinage de ces valeurs, la solution qui nous occupe pourra, dans le voisinage au moins de la valeur considérée de x, être obtenue par l'application du théorème fondamental relatif à l'existence des intégrales. Mais si, pour l'ensemble des valeurs de x et y correspondant à une solution, y' n'est jamais une fonction uniforme et continue de x et y, nous ne pourrons, en appliquant le théorème fondamental, faire dans le voisinage d'aucune valeur de x le développement en série de cette solution. Si une telle solution existe, *on la dira une solution singulière*.

Ces solutions s'obtiendront en écrivant que l'équation (1), considérée comme équation en y', a une racine multiple. On aura donc à

[1] Cette Section n'est que la reproduction d'une Leçon faite en 1886 sur ce sujet et reproduite dans mon Cours lithographié (Cours d'Analyse de la Faculté des Sciences, 1886-1887).

éliminer y' entre les deux équations

$$f(x, y, y') = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

On est ainsi conduit à la relation

$$Q(x, y) = 0,$$

qui peut se décomposer en plusieurs courbes. Les solutions singulières doivent satisfaire à cette équation. Mais celle-ci ne donnera pas nécessairement des fonctions y de x satisfaisant à l'équation différentielle; il suffit, pour s'en assurer, de prendre le cas particulier de l'équation

$$(2) \qquad y'^2 = Q(x, y),$$

où $Q(x, y)$ est un polynome arbitraire en x et y; la fonction définie par l'équation $Q(x, y) = 0$ ne satisfait pas, en général, à l'équation (2).

Nous pouvons donc affirmer que *l'équation* (1) ***n'a pas, en général,*** *de solution singulière.*

2. On pourrait en rester là et se borner à dire qu'il n'y a qu'une vérification à faire; mais la question mérite d'être approfondie, même dans le cas où il n'y a pas de solution singulière.

Reprenons l'équation (1) et l'équation

$$Q(x, y) = 0,$$

obtenue par l'élimination indiquée, et *supposons que la courbe* $Q = 0$ *ne corresponde pas à une intégrale de l'équation différentielle,* ce qui, nous l'avons dit, est le cas général.

Soit $x = \alpha$, $y = \beta$ un point *arbitraire* de la courbe $Q = 0$. Nous allons chercher les intégrales de (1) qui pour $x = \alpha$ deviennent égales à β, et telles que la dérivée correspondante y' soit précisément la racine multiple de l'équation en y' pour $x = \alpha$, $y = \beta$.

En restant dans la généralité, nous supposons que cette racine multiple est double. L'équation

$$f(x, y, y') = 0$$

a alors, pour $x = \alpha$, $y = \beta$, une racine double, et deux racines de cette équation se permutent autour de $x = \alpha$, $y = \beta$.

La somme et le produit de ces deux racines seront des fonctions uniformes de x et y dans le voisinage de (α, β); y' pourra donc être considéré comme racine d'une équation du second degré dont les coefficients sont holomorphes dans le voisinage de (α, β). Nous pouvons, par suite, écrire

$$y' = A(x, y) + C(x, y)\sqrt{B(x, y)},$$

A, C et B étant des séries ordonnées suivant les puissances de $x - \alpha$ et $y - \beta$. De plus, la fonction y de x définie par $Q(x, y) = 0$ et prenant pour $x = \alpha$ la valeur β annulera identiquement $B(x, y)$, puisque, pour les points de la courbe Q, les deux valeurs de y' doivent être égales.

Nous pouvons, pour abréger l'écriture, supposer $\alpha = \beta = 0$; on aura alors

$$B(x, y) = ax + by + \ldots,$$
$$A(x, y) = A + a_1 x + b_1 y + \ldots.$$

Pour $x = y = 0$, on a $y' = A$. Cette valeur doit être distincte du coefficient angulaire de la courbe $Q = 0$ à l'origine; car, autrement, comme cette origine est un point *arbitraire* de la courbe Q, celle-ci satisferait à l'équation différentielle, ce qui est contre l'hypothèse.

Mais nous avons dit qu'on avait $B(x, y) = 0$ pour tout point de la courbe Q; donc le coefficient angulaire de la tangente à l'origine est donné par $-\frac{a}{b}$; nous devons donc supposer

$$a + bA \neq 0.$$

Ceci étant bien compris, posons

$$y = \lambda x'^2, \qquad x = x'^2;$$

on aura

$$(3) \qquad \begin{cases} x'\dfrac{d\lambda}{dx'} = -2\lambda + 2A + 2x'^2(a_1 + b_1\lambda) + \ldots \\ \qquad + C(x'^2, \lambda x'^2)2x'\sqrt{a + b\lambda + x'(\ldots)}. \end{cases}$$

On peut trouver une intégrale de cette équation différentielle qui, pour $x' = 0$, prend la valeur A; car le second membre est une fonction holomorphe de x' et λ dans le voisinage de $x' = 0$, $\lambda = A$ (puisque $a + bA \neq 0$); de plus, il s'annule pour ces valeurs. L'équation (3) rentre donc dans le type de celles que nous avons étudiées

(Chap. II, § 2); le coefficient b, qui jouait le rôle essentiel, est ici égal à -2. Nous avons donc une intégrale holomorphe de cette équation prenant pour $x' = 0$ la valeur A, soit

$$\lambda = A + px' + qx'^2 + \ldots.$$

Donc on aura

$$y = Ax + px^{\frac{3}{2}} + \ldots.$$

En employant le langage géométrique, on voit que le point $x = 0$, $y = 0$ est un point de rebroussement pour cette intégrale; d'où cet important théorème :

La courbe $Q = 0$ (*qui est supposée ne pas satisfaire à l'équation différentielle*) *est, en général, le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales* ([1]).

3. Attachons-nous maintenant au cas où il y aurait des solutions singulières. Ces solutions proviennent de l'élimination de y' entre les équations

$$f(x, y, y') = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

Lagrange a remarqué qu'à ces deux équations on doit en adjoindre une troisième, obtenue en différentiant la première et tenant compte de la seconde :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0.$$

Ainsi, la solution singulière devra satisfaire aux trois équations

$$f(x, y, y') = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0.$$

Ces trois équations, considérées comme équations en y', ne pourront pas, en général, être vérifiées pour une succession de valeurs de x et y correspondant à une courbe. Une condition nécessaire pour l'existence des solutions singulières est donc qu'il y ait une succes-

---

([1]) On trouvera une démonstration géométrique de ce théorème dans un Mémoire fondamental de M. Darboux sur cette théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre (*Bulletin des Sciences mathematiques*, 1873).

sion de valeurs de x et y correspondant à une courbe $P(x, y) = 0$, pour lesquelles les trois équations aient une solution commune. Cette courbe pourra constituer une partie de la courbe $Q(x, y) = 0$ précédemment considérée. D'ailleurs, *l'équation* $P(x, y) = 0$ *donnera certainement une solution singulière*, si $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas identiquement nul pour la valeur y de x tirée de l'équation $P = 0$. Soient, en effet, les trois équations

$$f(x, y, \lambda) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

qui ont une solution commune en λ, si $P(x, y) = 0$. Cette solution commune peut être considérée comme fonction de x ; en différentiant la première, on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

et, par suite,

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\lambda - \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

On a donc, si $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas nul identiquement quand on remplace y et λ par leur valeur en fonction de x,

$$\lambda = \frac{dy}{dx},$$

ce qui montre que la fonction y de x tirée de l'équation $P(x, y) = 0$ satisfait à l'équation différentielle

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

4. Nous avons tout à l'heure cherché les solutions de (1) qui, pour $x = \alpha$, devenaient égales à β quand (α, β) était sur la courbe Q, cette courbe n'étant pas une courbe intégrale.

Proposons-nous maintenant la même question en supposant, au contraire, qu'il existe une solution singulière $P(x, y) = 0$. Soit (α, β) un point *arbitraire* de cette courbe. Nous allons chercher les intégrales de l'équation différentielle proposée qui, pour $x = \alpha$, prennent la valeur β.

Parmi ces intégrales, il y a, bien entendu, la fonction algébrique y_1,

définie par l'équation

$$P(x, y_1) = 0,$$

et pouvant être développée suivant les puissances de $x - \alpha$. Nous allons voir qu'outre cette solution il y a une seconde solution. Reprenons, à cet effet, l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = A(x, y) + C(x, y)\sqrt{B(x, y)}.$$

Comme nous supposons que y_1 est une solution singulière, on aura à la fois

$$B(x, y_1) = 0, \qquad \frac{dy_1}{dx} = A(x, y_1).$$

Posons

$$y = y_1 + z,$$

l'équation deviendra

$$\frac{dz}{dx} = z\varphi_1(x) + z^2\varphi_2(x) + \ldots + C(x, y_1 + z)\sqrt{z\psi_1(x) + z^2\psi_2(x) + \ldots}:$$

les fonctions φ et ψ sont des séries ordonnées suivant les puissances de $x - \alpha$, et $\psi_1(x)$, en général, ne s'annule pas pour $x = \alpha$. Nous avons à étudier les intégrales de cette équation en z, s'annulant pour $x = \alpha$. Il y a évidemment la solution $z = 0$. Posant alors

$$z = z'^2,$$

on aura l'équation

$$2\frac{dz'}{dx} = z'\varphi_1(x) + z'^3\varphi_2(x) + \ldots + C(x, y_1 + z'^2)\sqrt{\psi_1(x) + z'^2\psi_2(x) + \ldots}.$$

Dans le voisinage de $x = \alpha$, $z' = 0$, le second membre est holomorphe, puisque $\psi_1(\alpha) \neq 0$; on fixera d'ailleurs arbitrairement le signe du radical. Cette équation donnera, d'après le théorème fondamental, z' en série ordonnée suivant les puissances de $x - \alpha$, et l'on aura

$$z = a(x - \alpha)^2 + b(x - \alpha)^3 + \ldots.$$

Il est clair que les deux déterminations du radical donnent, pour z', des valeurs égales et de signes contraires, par suite, une même valeur pour z. Nous avons donc la solution non singulière

$$y = y_1 + a(x - \alpha)^2 + b(x - \alpha)^3 + \ldots$$

et il est évident que la courbe $P(x, y) = 0$ est tangente au point (α, β) à la courbe représentée par la dernière équation; d'où ce théorème :

Quand il existe une solution singulière, elle est tangente en chacun de ses points à une solution non singulière.

Ce théorème peut encore s'énoncer, sous forme géométrique, de la manière suivante :

La solution singulière, quand elle existe, est l'enveloppe des courbes intégrales.

5. Dans cette question des solutions singulières, on s'est longtemps placé, *a priori*, au point de vue de la théorie des enveloppes. Partant de la conception de l'intégrale générale

$$F(x, y, C) = 0,$$

Lagrange remarque que cette famille de courbes, dépendant d'un paramètre arbitraire, a une enveloppe et, puisque l'enveloppe est tangente à chacune des enveloppées, cette enveloppe satisfera, comme les enveloppées, à l'équation différentielle

$$f(x, y, y') = 0.$$

Il semblerait donc, à ce point de vue, et c'était l'opinion de Lagrange, que les équations du premier ordre ont, en général, des solutions singulières; ce résultat est tout à fait opposé à ce que nous avons dit plus haut.

L'explication de cette contradiction est facile. A une équation différentielle arbitraire $f(x, y, y') = 0$ ne correspond pas, comme intégrale générale, une famille de courbes

$$F(x, y, C) = 0$$

à laquelle on puisse appliquer la théorie des enveloppes; je veux dire que l'enveloppe donnée par la théorie classique ne sera pas en chacun de ses points tangente à une enveloppée, mais sera un lieu de points singuliers. Il peut paraître étrange au premier abord qu'à une équation différentielle *arbitraire* corresponde une famille de courbes jouissant, au point de vue de la théorie des enveloppes, de propriétés

spéciales, tandis qu'à une famille *arbitraire* de courbes pour laquelle on pourra appliquer la théorie des enveloppes correspondra une équation différentielle *spéciale*, qui aura une solution singulière. Mais, comme le remarque Clebsch, ceci n'est pas plus étonnant que le fait auquel nous sommes si habitués relativement aux coordonnées ponctuelles et tangentielles. Nous savons en effet qu'une courbe *générale* en coordonnées ponctuelles a des *singularités* tangentielles, et inversement une courbe *générale* en coordonnées tangentielles a des *singularités* ponctuelles.

6. Indiquons un exemple des théorèmes généraux démontrés plus haut. Soit l'équation

$$y - 2xy' - y'^2 = 0:$$

les trois équations du § 3 sont ici

$$y - 2xy' - y'^2 = 0, \qquad x + y' = 0, \qquad y' = 0.$$

Ces trois équations n'ont de solution commune en y' que pour $x = y = 0$. Il n'y a donc pas de solution singulière.

En éliminant y' entre les deux premières, il vient

$$Q(x, y) = y + x^2 = 0.$$

La théorie générale (§ 2) nous apprend que la courbe

$$y + x^2 = 0$$

est le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales. Dans le cas actuel, l'intégration complète est facile à effectuer, l'équation étant de celles qui s'intègrent par différentiation. On trouve ainsi pour intégrale générale

$$(3xy + 2x^3 + C)^2 - 4(y + x^2)^3 = 0,$$

et l'on voit bien que $y + x^2 = 0$ est le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales.

II. — Systèmes d'équations simultanées.

7. L'analyse développée dans la Section précédente s'étend d'elle-même à un système d'équations simultanées du premier ordre. Con-

sidérons le système de m équations

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} f_1\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \dfrac{dy_1}{dx}, \ldots, \dfrac{dy_m}{dx}\right) = 0, \\ f_2\left(x, y_1, \quad \ldots, y_m, \dfrac{dy_1}{dx}, \ldots, \dfrac{dy_m}{dx}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_m\left(x, y_1, \quad \ldots, y_m, \dfrac{dy_1}{dx}, \ldots, \dfrac{dy_m}{dx}\right) = 0, \end{array}\right.$$

les f étant des polynomes. Les dérivées $\frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_m}{dx}$ sont des fonctions algébriques de x, y_1, y_2, ..., y_m; elles peuvent donc, d'après un théorème élémentaire d'Algèbre, se mettre sous la forme

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx} = R_1\,(x, y_1, \ldots, y_m, z), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = R_2\,(x, y_1, \ldots, y_m, z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dy_m}{dx} = R_m(x, y_1, \ldots, y_m, z), \end{array}\right.$$

les R étant *rationnelles* en x, y_1, ..., y_m et z. Quant à z, il représente une irrationnelle, fonction algébrique de x, y_1, y_2, ..., y_m, définie par une équation algébrique

$$(6)\qquad f(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, z) = 0.$$

8. Envisageons ce que nous avons appelé précédemment *une courbe intégrale,* c'est-à-dire un ensemble de valeurs de x, y_1, y_2, ..., y_m satisfaisant aux équations différentielles. Si pour tout *point* $(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ de cette courbe intégrale la valeur correspondante de z tirée de l'équation (6) est une racine multiple de cette équation, de telle sorte que z cesse d'être une fonction uniforme des $m+1$ lettres, dont il est fonction algébrique, dans le voisinage de ce point, la solution considérée ne pourra pas être obtenue par l'application du théorème fondamental relatif à l'existence des intégrales; nous la dirons *une solution singulière*.

Il est clair qu'ici, comme dans le cas d'une seule équation, *il n'y aura pas en général de solution singulière*. Pour avoir une solution singulière, on devra d'abord évidemment éliminer z entre les

deux équations

$$f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

on obtient ainsi une relation

$$(7) \qquad Q(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0.$$

C'est une certaine *surface* sur laquelle doit se trouver la courbe intégrale singulière. On aura alors à chercher si l'on peut satisfaire simultanément aux équations (4) et (7). Plusieurs circonstances pourront se présenter. L'élimination d'une des fonctions, y_m par exemple, entre (4) et (7) conduira à un système de m équations à $m-1$ fonctions $y_1, \ldots, y_{m-1}$,

$$\varphi_1\left(x, y_1, \ldots, y_{m-1}, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_{m-1}}{dx}\right) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_m\left(x, y_1, \ldots, y_{m-1}, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_{m-1}}{dx}\right) = 0,$$

et ces m équations seront en général incompatibles. De simples dérivations et éliminations permettront de reconnaître si ces équations sont ou non compatibles et quel est le degré de généralité des solutions communes. Celles-ci pourront, suivant les cas, être complètement déterminées ou dépendre d'une, deux, ... ou $m-1$ constantes arbitraires. Si les solutions ne sont pas complètement déterminées, elles seront données par un système d'équations différentielles.

9. Examinons d'abord le cas où il n'y aurait pas de solution singulière; nous prenons un point *arbitraire* $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ sur la *surface*

$$Q(x, y_1, \ldots, y_m) = 0,$$

et nous allons chercher les courbes intégrales passant par ce point. Nous n'avons qu'à raisonner comme dans la Section précédente. En supposant, pour rester dans la généralité, que la racine correspondante z soit une racine double, nous aurons pour z une expression de la forme

$$z = A(x, y_1, \ldots, y_m) + C(x, y_1, \ldots, y_m)\sqrt{B(x, y_1, \ldots, y_m)},$$

et nous aurons par suite

$$\frac{dy_1}{dx} = A_1(x, y_1, \ldots, y_m) + C_1(x, y_1, \ldots, y_m)\sqrt{B(x, y_1, \ldots, y_m)},$$
$$\frac{dy_2}{dx} = A_2(x, y_1, \ldots, y_m) + C_2(x, y_1, \ldots, y_m)\sqrt{B(x, y_1, \ldots, y_m)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dy_m}{dx} = A_m(x, y_1, \ldots, y_m) + C_m(x, y_1, \ldots, y_m)\sqrt{B(x, y_1, \ldots, y_m)},$$

les A, C et B étant des fonctions holomorphes de $x, y_1, \ldots, y_m$ dans le voisinage de $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$. De plus, on a nécessairement $B(x, y_1, \ldots, y_m) = 0$ pour tout point de la surface $Q = 0$ voisin de $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Nous pouvons, pour simplifier l'écriture, supposer $\alpha = \alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$; on aura alors

$$A_i(x, y_1, \ldots, y_m) = A_i + h_i x + a_{1i} y_1 + a_{2i} y_2 + \ldots + a_{mi} y_m + \ldots$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m),$$
$$B(x, y_1, \ldots, y_m) = kx + k_1 y_1 + \ldots + k_m y_m + \ldots.$$

Pour $x = y_1 = \ldots = y_m = 0$, on a

$$\frac{dy_i}{dx} = A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

On devra avoir

$$k + k_1 A_1 + k_2 A_2 + \ldots + k_m A_m \neq 0 ;$$

dans le cas contraire, en effet, le point considéré étant un point arbitraire de $Q = 0$, on aurait l'identité

$$(8) \quad \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y_1} A_1(x, y_1, \ldots, y_m) + \ldots + \frac{\partial B}{\partial y_m} A_m(x, y_1, \ldots, y_m) = 0,$$

vérifiée pour tout système de valeurs de $x, y_1, \ldots, y_m$ satisfaisant à l'équation $Q = 0$ ou, ce qui revient au même, à l'équation $B = 0$. Les équations différentielles

$$\frac{dy_1}{dx} = A_1(x, y_1, \ldots, y_m),$$
$$\frac{dy_2}{dx} = A_2(x, y_1, \ldots, y_m),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dy_m}{dx} = A_m(x, y_1, \ldots, y_m),$$

en prenant pour système de valeurs initiales un point de la surface Q, donneraient alors une courbe intégrale située sur cette surface; pour le voir bien nettement, il suffit de prendre les m équations

$$\frac{dy_1}{dx} = A_1 \quad (x, y_1, \ldots, y_m),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dy_{m-1}}{dx} = A_{m-1}(x, y_1, \ldots, y_m),$$
$$B(x, y_1, \ldots, y_m) = 0.$$

Une intégrale est complètement déterminée par le système indiqué de valeurs initiales, et l'identité (8) montre que l'on aura

$$\frac{dy_m}{dx} = A_m(x, y_1, \ldots, y_m).$$

10. Nous n'avons plus maintenant qu'à poser

$$x = x'^2, \qquad y_1 = \lambda_1 x'^2, \qquad y_2 = \lambda_2 x'^2, \qquad \ldots, \qquad y_m = \lambda_m x'^2.$$

Le système d'équations différentielles devient

$$x' \frac{d\lambda_i}{dx'} = -2\lambda_i + 2A_i + \ldots$$
$$+ C_i(x'^2, \lambda_1 x'^2, \ldots, \lambda_m x'^2) 2x' \sqrt{k + k_1\lambda_1 + \ldots + k_m\lambda_m + x'(\;)}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Il y aura un système d'intégrales holomorphes prenant respectivement les valeurs A_1, A_2, ..., A_m. Il en résulte les intégrales

$$y_1 = A_1\, x + p_1\, x^{\frac{3}{2}} + \ldots,$$
$$y_2 = A_2\, x + p_2\, x^{\frac{3}{2}} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$y_m = A_m x + p_m x^{\frac{3}{2}} + \ldots.$$

On voit donc que l'*on obtient une courbe intégrale présentant un rebroussement au point considéré de la surface* Q. C'est le résultat que nous avions obtenu dans le cas d'une seule équation.

11. Supposons maintenant qu'il y ait une solution singulière. Nous transformerons d'abord les équations en posant

$$B(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) = z,$$

d'où l'on tirera y_m en fonction holomorphe de $x, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ et z, dans le voisinage des valeurs *zéro*. Les équations deviennent

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy_i}{dx} &= D_i\,(x, y_1, \ldots, y_{m-1}, z) + E_i\,(x, y_1, \ldots, y_{m-1}, z)\sqrt{z} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1), \\ \frac{dz}{dx} &= D_m(x, y_1, \ldots, y_{m-1}, z) + E_m(x, y_1, \ldots, y_{m-1}, z)\sqrt{z}, \end{aligned}\right.$$

les D et E étant des fonctions holomorphes de $x, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$, z dans le voisinage des valeurs *zéro* de ces grandeurs.

Différents cas peuvent se présenter.

Supposons d'abord que la fonction D_m s'annule identiquement pour $z = 0$; on voit que l'on pourra satisfaire aux équations en faisant $z = 0$ et en prenant pour les y des intégrales du système

$$\frac{dy_i}{dx} = D_i(x, y_1, \ldots, y_{m-1}, 0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Nous sommes alors dans le cas où l'intégrale singulière dépend de $m - 1$ constantes arbitraires. Considérons une de ces intégrales singulières, celle, par exemple, qui correspond pour $x = 0$ à

$$y_1 = \ldots = y_{m-1} = z = 0.$$

Nous allons chercher s'il y a une autre intégrale de (9) prenant pour $x = 0$ ces mêmes valeurs. Écrivons de nouveau les équations

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dx} &= D_i(x, y_1, \ldots, y_{m-1}, z) + E_i\,(x, y_1, \ldots, y_{m-1}, z)\sqrt{z}, \\ \frac{dz}{dx} &= \varphi\,(x, y_1, \ldots, y_{m-1}, z)z + E_m(x, y_1, \ldots, y_{m-1}, z)\sqrt{z}. \end{aligned}$$

Or, il suffit de poser $z = z'^2$ pour avoir un système qui se présente sous la forme ordinaire. Nous obtenons donc un système d'intégrales autre que le système considéré d'intégrales singulières, prenant les mêmes valeurs initiales, et il est manifeste que, pour l'un et l'autre de ces systèmes, les dérivées de premier ordre ont les mêmes valeurs initiales : *nous pouvons donc dire que l'on a une courbe intégrale tangente à la solution singulière.*

12. Nous avons supposé, dans le paragraphe précédent, que

$$D_m(x, y_1, \ldots, y_{m-1}, 0)$$

était identiquement nul. S'il n'en est pas ainsi, nous poserons

$$D_m(x, y_1, \ldots, y_{m-1}, 0) = u.$$

On pourra tirer de là, en général, y_{m-1} en fonction holomorphe de $x, y_1, \ldots, y_{m-2}, u$, et le système prendra la forme

$$\frac{dy_i}{dx} = \Delta_i(x, y_1, \ldots, y_{m-2}, u, z) + \varepsilon_i(x, y_1, \ldots, y_{m-2}, u, z)\sqrt{z} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-$$

$$\frac{du}{dx} = \Delta_{m-1}(x, y_1, \ldots, y_{m-2}, u, z) + \varepsilon_{m-1}(x, y_1, \ldots, y_{m-2}, u, z)\sqrt{z},$$

$$\frac{dz}{dx} = \psi_1 z + \psi_2 u + \ldots + \varepsilon_m(x, y_1, \ldots, y_{m-2}, u, z)\sqrt{z},$$

les ψ étant holomorphes en $x, y_1, \ldots, y_{m-2}$. Supposons que l'on ait

$$\Delta_{m-1}(x, y_1, \ldots, y_{m-2}, 0, 0)$$

identiquement nul. Les deux dernières équations seront vérifiées pour $u = 0$, $z = 0$; quant aux y, ils seront déterminés par le système

$$\frac{dy_i}{dx} = \Delta_i(x, y_1, \ldots, y_{m-2}, 0, 0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-2),$$

et l'on aura, dans ce cas, des solutions singulières dépendant de $m - 2$ constantes arbitraires. Prenons l'une de ces solutions; on peut toujours supposer que c'est la solution correspondant aux valeurs initiales *zéro*. Posons

$$z = z'^2, \qquad u = \mu z',$$

et considérons $x, y_1, \ldots, y_{m-2}, \mu$ comme fonctions de z'; on aura

$$\frac{1}{2}\frac{dx}{dz'} = \frac{1}{\psi_1 z' + \psi_2 \mu + \ldots + \varepsilon_m(x, \ldots, \mu z', z'^2)},$$

$$z'\frac{d\mu}{dz'} = \frac{2z'[\ldots] - \mu[\psi_1 z' + \psi_2 \mu + \ldots + \varepsilon_m(x, \ldots, \mu z', z'^2)]}{\psi_1 z' + \psi_2 \mu + \ldots + \varepsilon_m(x, \ldots, \mu z', z'^2)},$$

$$\frac{dy_i}{dz'} = \chi_i,$$

les χ_i étant holomorphes dans le voisinage de

$$x = y_1 = \ldots = y_{m-2} = \mu = z' = 0.$$

Nous supposons, pour prendre le cas le plus général, que ε_m ne s'an-

nule pas pour les valeurs *zéro* des lettres dont il dépend. L'étude des équations précédentes ne présente alors aucune difficulté; le coefficient de μ dans la seconde équation, étant égal à -1, est négatif; nous aurons un système d'intégrales x, μ, y_1, y_2, ..., y_{m-2}, fonctions holomorphes de z' et s'annulant pour $z' = 0$. En revenant aux équations primitives, nous aurons donc *une intégrale tangente à la solution singulière*. Le contact des deux solutions est évident, puisque les dérivées du premier ordre ont les mêmes valeurs initiales pour l'une et pour l'autre.

13. On peut continuer de la même façon dans le cas où les solutions singulières dépendraient de $m-2$, $m-3$, ... ou *zéro* constantes arbitraires. La conclusion est toujours la même :

Si l'on prend un point arbitraire sur une courbe intégrale singulière, on pourra, en général, faire passer par ce point une seconde courbe intégrale non singulière et tangente à la première.

Le cas extrême où il y aurait *une seule* solution singulière ne dépendant pas d'une constante arbitraire serait celui des équations (en nous bornant à deux équations)

$$\frac{du}{dx} = \alpha\, u + \beta\, v + \ldots + \varepsilon_1(x, u, v)\sqrt{v},$$

$$\frac{dv}{dx} = \alpha' u + \beta' v + \ldots + \varepsilon_2(x, u, v)\sqrt{v},$$

les α, β, α', β', ... étant des fonctions de x; la seule solution singulière est ici donnée par

$$u = 0, \qquad v = 0.$$

14. Nous avons vu que, dans le cas du plan, la théorie des solutions singulières se rattache à la théorie des enveloppes. Il en est de même pour un espace à un nombre quelconque de dimensions. Nous nous contenterons de considérer le cas de trois dimensions. M. Goursat ([1]) a montré, comme il suit, comment la théorie des solutions singulières se rattachait à la théorie des congruences de courbes. Pre-

([1]) E. Goursat, *Sur la théorie des solutions singulières des équations différentielles simultanées* (*American Journal of Mathematics*, t. XI).

nons la famille de courbes

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} f(x, y, z, a, b) = 0, \\ \varphi(x, y, z, a, b) = 0, \end{cases}$$

dépendant des deux constantes arbitraires a et b. En considérant y et z comme des fonctions de x, on définit ainsi un système de fonctions y et z de x satisfaisant à deux équations différentielles

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} F\left(x, y, z, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}\right) = 0, \\ \Phi\left(x, y, z, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}\right) = 0. \end{cases}$$

Rappelons les points fondamentaux de la théorie des congruences de courbes. On cherche d'abord à déterminer b en fonction de a, soit

$$b = \lambda(a),$$

de façon que la famille de courbes

$$(10) \qquad \begin{cases} f[x, y, z, a, \lambda(a)] = 0, \\ \varphi[x, y, z, a, \lambda(a)] = 0 \end{cases}$$

ait une enveloppe. On sait qu'il faut et suffit pour cela que les quatre équations (10) et (11)

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a} + \dfrac{\partial f}{\partial b}\lambda'(a) = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial a} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial b}\lambda'(a) = 0 \end{cases}$$

aient une solution commune en x, y et z, quel que soit a. L'élimination de x, y, z entre ces quatre équations conduit à une relation

$$\chi[a, \lambda(a), \lambda'(a)] = 0;$$

la fonction $\lambda(a)$ est donc donnée par une équation différentielle du premier ordre. Chaque courbe de la congruence appartient donc à une ou plusieurs familles de courbes de cette même congruence qui dépendent d'un paramètre arbitraire et ont une enveloppe. Désignons, d'une manière générale, par Γ ces courbes enveloppes. Celles-ci seront nécessairement situées sur la surface définie par les

trois équations

$$f(x, y, z, a, b) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0,$$

comme on le voit en éliminant $\lambda'(a)$ entre les équations (11). Cette surface s'appelle la *surface focale de la congruence,* et toute courbe de la congruence est tangente aux différentes nappes de cette surface focale.

L'ensemble des courbes Γ est évidemment donné par une équation différentielle du premier ordre, puisque ces courbes sont données par les équations (10) et (11), et l'équation $\chi = 0$. Or, considérons une courbe Γ et un point arbitraire sur cette courbe; par ce point, passe une courbe de la congruence C tangente à Γ. En considérant donc y et z comme fonctions de x, pour l'une et l'autre de ces deux courbes, on peut dire que pour elles

$$x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$$

ont les mêmes valeurs aux points considérés. Nous en concluons que *les courbes* Γ *satisfont aux équations différentielles* E.

En général, les courbes Γ n'appartiendront pas à la congruence; *elles seront les solutions singulières du système* (E).

CHAPITRE IV.

SUR CERTAINES CLASSES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

I. — Équations de Briot et Bouquet.

1. Dans un de leurs Mémoires sur les équations différentielles (¹), Briot et Bouquet ont considéré les équations de la forme

$$f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0,$$

f étant un polynome, et ont cherché dans quels cas l'intégrale de cette équation est une fonction uniforme de z.

Nous allons suivre une tout autre voie que Briot et Bouquet et nous allons démontrer *a priori* le théorème suivant, déduit par M. Hermite (²) des recherches de Briot et Bouquet :

Quand l'intégrale de l'équation précédente est uniforme, le genre de la courbe

$$f(u, u') = 0$$

est nécessairement égal à zéro ou à l'unité.

J'ai déjà indiqué la méthode que je vais suivre, dans mon Mémoire : *Sur les fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (³), en l'appliquant aux équations différentielles du second ordre qui ne renferment pas explicitement la variable indépendante.

(¹) Briot et Bouquet, *Intégrations des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques* (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXI).

(²) Hermite, *Cours lithographié de l'École Polytechnique*, 1873.

(³) *Journal de Mathématiques*, 1889.

Nous allons nous appuyer sur les théorèmes généraux relatifs aux courbes algébriques démontrés dans le Tome II; j'ai seulement une remarque à ajouter.

2. Nous avons étudié les transformations *birationnelles* d'une courbe en une autre ou d'une courbe en elle-même. Soient deux courbes algébriques

$$f(x, y) = 0, \qquad F(X, Y) = 0.$$

On peut concevoir qu'il existe, entre les points (x, y) et (X, Y) de ces deux courbes ou des surfaces de Riemann correspondantes, une transformation *biuniforme*, c'est-à-dire telle qu'à un point *arbitraire* (x, y) de la première ne corresponde qu'un point (X, Y) de la seconde et inversement. On suppose que cette transformation biuniforme n'ait d'autres singularités possibles que des *points essentiels isolés*. Il est facile de voir que, dans ces conditions, *la transformation biuniforme sera nécessairement birationnelle.*

Supposons, en effet, que la transformation ait un point singulièrement essentiel; soit $x = a, y = b$ un tel point, qu'on peut toujours supposer un point ordinaire de la surface de Riemann. Alors X et Y seront des fonctions uniformes de x dans le voisinage de $x = a$, ce point étant un point singulier essentiel pour ces fonctions : soient

$$X = \varphi(x), \qquad Y = \psi(x).$$

A une valeur arbitraire de X correspond, dans le voisinage de $x = a$, une *infinité* de racines de l'équation

$$X = \varphi(x),$$

d'après un théorème que nous avons énoncé (t. II, p. 127); pour ces racines la fonction $\psi(x)$ ne pourra avoir qu'un nombre limité de valeurs, celles qui correspondent à l'équation

$$F(X, Y) = 0.$$

Donc, à un point arbitraire (X, Y) de la courbe F se trouve correspondre une infinité de points (x, y) de la première dans le voisinage de $x = a$, $y = b$; la substitution ne serait donc pas biuniforme, et le théorème est par suite démontré.

Nous pouvons remarquer que le théorème précédent *ne subsiste pas*

pour deux surfaces algébriques. Entre les points de deux surfaces on peut avoir une correspondance biuniforme qui ne soit pas birationnelle. Il suffit pour s'en assurer de prendre la correspondance entre deux plans

$$Y = \frac{y}{x}, \qquad X = xe^{-\frac{y}{x}},$$

qui est biuniforme, mais non birationnelle.

3. Reprenons maintenant l'équation

$$f(u, u') = 0, \qquad \left(\frac{du}{dz} = u'\right),$$

dont l'intégrale, par hypothèse, est une fonction uniforme de z. Désignons par U et U' ce que deviennent u et u' quand on remplace z par $z + h$, h étant une constante quelconque.

Il est facile de voir qu'à une valeur (u, u') ne correspond qu'une valeur de (U, U') et inversement. En effet, une intégrale est complètement déterminée si l'on se donne sa valeur et celle de sa dérivée en un point z, valeurs liées nécessairement par la relation $f = 0$; cette intégrale sera donc déterminée au point $z + h$, et il est manifeste, d'après la formule de Taylor, que U et U' ne dépendent que de u, u' et h et nullement de z. Nous pouvons donc dire que la courbe

$$f(u, u') = 0$$

admet une transformation *biuniforme* en elle-même, dépendant d'un paramètre arbitraire h. Les seuls couples (u, u') auxquels pourraient correspondre plus d'un point (U, U') sont les valeurs de (u, u') qui donnent les points de ramification ou les points singuliers de f; ce sont des points *isolés* qui pourraient être des singularités essentielles pour la transformation biuniforme; mais nous venons de voir au paragraphe précédent que cette circonstance ne peut se présenter. Nous arrivons donc à la conclusion suivante : *la courbe f admet une transformation birationnelle en elle-même, dépendant d'un paramètre arbitraire h*. Il en résulte, d'après le théorème de M. Schwarz (t. II, p. 480), que *la courbe f est du genre* ZÉRO *ou du genre* UN.

4. Le résultat que nous venons d'établir *a priori* permet de se

rendre compte bien facilement de la nature des fonctions uniformes de z satisfaisant à l'équation différentielle

$$f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0.$$

Supposons d'abord que cette relation algébrique soit de genre *zéro*. Nous pourrons poser

$$u = R(\theta),$$
$$\frac{du}{dz} = R_1(\theta),$$

R et R_1 étant rationnelles, et de telle sorte que θ soit une fonction rationnelle de u et $\frac{du}{dz}$ (t. II, p. 547), et, par suite, fonction uniforme de z.

En dérivant la valeur de u et l'égalant à la valeur donnée par la seconde ligne, nous sommes amené à l'équation

$$\frac{d\theta}{dz} = \varphi(\theta),$$

$\varphi(\theta)$ étant une fonction rationnelle de θ, et nous avons à chercher dans quel cas une telle équation peut donner pour θ une fonction uniforme de z.

Il est d'abord évident que $\varphi(\theta)$ devra être un polynome; ou sinon $\frac{d\theta}{dz}$ deviendrait infinie pour une certaine valeur a et l'intégrale de l'équation devenant, pour une valeur arbitraire d'ailleurs z_0, égale à a, aurait en z_0 un point critique algébrique (t. II, p. 367) et, par suite, ne serait pas uniforme. Pour la même raison, en changeant θ en $\frac{1}{\theta'}$, on voit que le degré du polynome $\varphi(\theta)$ ne peut surpasser *deux;* sinon, dans l'équation en θ', l'intégrale devenant nulle pour z_0 aurait en ce point un point critique algébrique. On a donc

$$\frac{d\theta}{dz} = a\theta^2 + b\theta + c,$$

ce qui donne immédiatement pour θ, soit une fonction linéaire de e^{kz}, k étant une constante, soit une fonction linéaire de z. Nous arrivons donc à la conclusion suivante : *quand la courbe f est du genre*

zéro, la fonction u supposée uniforme ne peut être qu'une fonction rationnelle de z ou une fonction rationnelle de e^{kz}.

5. Examinons maintenant le cas où la courbe

$$f(u, u') = 0$$

est de genre *un*. Soit

$$\int R(u, u')\,du$$

l'intégrale de première espèce relative à cette courbe. Nous avons dit qu'une certaine transformation birationnelle contenant un paramètre arbitraire h transforme en elle-même la courbe f. On a ainsi la transformation

$$\begin{aligned} U &= \psi(u, u', h), \\ U' &= \psi_1(u, u', h), \end{aligned}$$

U et U' étant ce que deviennent u et u' quand on remplace z par $z+h$. On aura nécessairement

$$R(u, u')\,du = A.R(U, U')\,dU,$$

la transformation birationnelle devant nécessairement transformer une intégrale de première espèce en elle-même à un facteur près. *A priori* A peut dépendre de h; mais, comme nous l'avons vu d'une manière plus générale (t. II, p. 482), il n'en dépend pas, et, puisque, pour $h = 0$, l'on a

$$U = u, \qquad U' = u',$$

A est nécessairement égal à *un*. Nous avons donc

$$R(u, u')\,du = R(U, U')\,dU,$$

et, par suite,

$$R(u, u')\frac{du}{dz} = R(U, U')\frac{dU}{d(z+h)}.$$

Il résulte de cette égalité que la fonction de z

$$R(u, u')\frac{du}{dz}$$

ne change pas quand on change z en $z+h$, h étant une constante arbitraire ; il faut donc qu'elle ne dépende pas de z et nous avons

$$R(u, u')\frac{du}{dz} = a,$$

a étant une constante. Ainsi

$$\int R(u, u')du = az.$$

La fonction u s'obtient donc par l'inversion d'une intégrale de première espèce relative à une courbe de genre *un*. *Elle est une fonction doublement périodique de* z.

6. En résumé, nous avons étudié tous les cas qui peuvent se présenter pour l'équation de Briot et Bouquet

$$f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0.$$

Quand l'intégrale de cette équation est uniforme, cette fonction uniforme ne peut être qu'une fonction doublement périodique de z, *ou une fonction rationnelle de* e^{kz} (*k étant une constante*), *ou une fonction rationnelle de* z.

II. — Généralisation des équations de Briot et Bouquet.

7. Le problème de Briot et Bouquet peut se poser sous une autre forme qui va nous conduire à une généralisation intéressante. Si nous reprenons l'équation

$$f(u, u') = 0,$$

nous aurons

$$\int^{(u, u')} \frac{du}{u'} = z.$$

Le premier membre est une intégrale abélienne relative à la courbe f, et l'on a à considérer les cas où l'inversion précédente donne pour u et u' des fonctions uniformes de z. On peut donc d'une manière plus générale prendre une courbe algébrique

$$f(x, y) = 0,$$

et se demander si l'on peut trouver une intégrale abélienne convenable

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} R(x, y)\, dx,$$

telle que *l'équation*

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \mathrm{R}(x,y)\,dx = u$$

donne pour x et y des fonctions uniformes de u.

8. C'est la question qui vient d'être posée que nous allons généraliser. Envisageons, à cet effet, les expressions de la forme

$$(1) \qquad u = \int^{(x,y)} e^{\int^{(x,y)} \lambda(x,y)\,dx}\, dx,$$

$\lambda(x,y)$ étant une fonction rationnelle des variables x et y liées par la relation

$$f(x,y) = 0,$$

et en supposant de plus que *la fonction u n'ait sur la surface de Riemann que des pôles ou des infinis logarithmiques,* de telle sorte que les singularités de u soient absolument de même nature que celles des intégrales abéliennes attachées à la courbe f (¹).

Nous allons chercher (²) *dans quels cas l'inversion de l'expression* (1) *donne, quelles que soient les constantes initiales, pour x et y des fonctions uniformes de u et quelle sera la nature de ces fonctions uniformes.* La conclusion de notre recherche va être que *la courbe f doit être nécessairement de genre zéro ou un,* et les fonctions uniformes de u se ramènent aux fonctions doublement périodiques ou à leurs dégénérescences.

Je tiens à rappeler que M. Appell faisait, en même temps que moi, une étude approfondie des expressions (1) dans son grand Mémoire sur les fonctions à multiplicateurs (*Acta mathematica,* t. XIII) sans toutefois se poser le problème qui nous occupe ici.

9. Commençons par faire l'étude des expressions u définies plus haut, en la réduisant à ce qui sera indispensable pour notre démonstration. Nous supposerons, comme d'habitude, que la courbe f n'a

---

(¹) Nous nous placerons, au § 16, dans un cas un peu plus général.

(²) J'ai fait pour la première fois cette recherche dans le Chapitre VI (§ 1, 2, 3, 5, 6) de mon Mémoire sur les fonctions algébriques de deux variables; je suis revenu sur ce sujet dans l'*American Journal of Mathematics* (Vol. XVI, n° 1).

que des points doubles et a ses directions asymptotiques distinctes; m désignera son degré.

L'expression u peut avoir des pôles et des infinis logarithmiques. Il est évidemment permis de supposer que ces points ne se trouvent ni à l'infini, ni en un point de ramification de la surface de Riemann correspondant à la fonction algébrique y de x, car il est possible d'effectuer préalablement une transformation birationnelle convenable pour éviter ces circonstances.

Cela dit, envisageons les infinis de $\lambda(x, y)$. Soit d'abord (a, b) un infini qui ne soit pas un point de ramification. Le point a sera un pôle de $\lambda(x, y)$, et *son résidu devra être un entier positif ou négatif*, pour que le point a soit un point ordinaire, un pôle ou un infini logarithmique de la fonction u. Ce pôle ne pourra d'ailleurs être qu'un pôle simple, sinon la fonction u aurait en ce point une singularité essentielle. Désignons par k le nombre des points (a, b) et appelons

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_k$$

les résidus (entiers positifs ou négatifs) correspondant à ces différents points.

Considérons maintenant un point de ramification (x_1, y_1) de la surface de Riemann, rendant λ infini. On a

$$y - y_1 = \mathrm{H}\sqrt{x - x_1 + \ldots} \qquad (\mathrm{H} \neq 0).$$

Donc $\lambda(x, y)$ se développera suivant les puissances de $(x - x_1)^{\frac{1}{2}}$, et, pour que le point (x_1, y_1) de la surface de Riemann soit un point ordinaire pour u, on doit avoir pour $\lambda(x, y)$ le développement

$$\lambda(x, y) = \frac{\mathrm{A}_1}{x - x_1} + \frac{\mathrm{B}_1}{(x - x_1)^{\frac{1}{2}}} + \mathrm{C}_1 + \ldots,$$

A_1 étant de la forme $\frac{\mu_1}{2}$, μ_1 *étant un entier au moins égal à* -1 (t. II, p. 427).

Il nous reste à parler des points à l'infini qui sont, par hypothèse, comme les précédents, des points ordinaires pour u. Sur un quelconque des m feuillets, nous devrons avoir, pour x très grand, un développement de la forme

$$\lambda(x, y) = \frac{\mathrm{R}}{x} + \frac{\mathrm{R}'}{x^2} + \ldots,$$

R *étant un entier au plus égal à* -2. Pour chaque feuillet, on aura un nombre R.

Ainsi nous avons trois catégories d'entiers

$$\alpha, \mu, R.$$

Comme il est bien connu, on a entre eux la relation

$$\Sigma\alpha + \Sigma\mu = \Sigma R, \tag{2}$$

en écrivant

$$\int \lambda(x, y)\, dx = 0,$$

l'intégrale étant prise le long du contour fermé rendant la surface simplement connexe, contour classique dans la théorie des surfaces de Riemann (t. II, p. 429).

10. Les expressions u, que nous étudions, se partagent naturellement en fonctions de première espèce, de seconde espèce et de troisième espèce. Les fonctions de première espèce restent toujours finies, celles de seconde espèce n'ont sur la surface de Riemann d'autres infinis que des pôles, enfin il y a des infinis logarithmiques pour les fonctions de troisième espèce.

On voit immédiatement à quelles conditions l'expression (1) sera une fonction *de première espèce*. Tous les entiers α *doivent être positifs,* afin que le point a, b) ne soit pas un pôle ou un infini logarithmique.

11. Nous pouvons maintenant aborder la démonstration du théorème énoncé. On va donc supposer que l'inversion de l'expression (1) donne pour x et y des fonctions uniformes de u, *et l'on veut démontrer que la courbe sera du genre zéro ou du genre un.*

12. Ecrivons de nouveau la relation

$$\int^{(x,y)} e^{\int^{(x,y)} \lambda(x,y)\,dx}\, dx = u.$$

Supposons d'abord que le premier membre soit une fonction de première espèce. Il est immédiat qu'il ne peut y avoir pour

$\lambda(x, y)$ de pôles (a, b), car le développement de u suivant les puissances croissantes $(x - a)$ est de la forme

$$u = u_0 + C(x - a)^{\alpha+1} + \ldots,$$

et l'inversion ne peut conduire à une fonction uniforme que si $\alpha = 0$. *Tous les nombres α sont donc nuls,* et l'on a alors, d'après la relation (2),

$$(3) \qquad \Sigma\mu = \Sigma R.$$

Passons maintenant aux points (x_1, y_1). Comme $y - y_1$ et $x - x_1$ doivent être des fonctions uniformes de u, il en sera de même de $\sqrt{x - x_1}$, et il en résulte de suite que tous les μ doivent être égaux à -1. *Ainsi le nombre μ correspondant à chacun des points de ramification doit être égal à* -1.

Il ne nous reste plus qu'à considérer les points à l'infini. On voit encore immédiatement que tous les R doivent avoir la valeur -2.

Ainsi nous avons

$$\Sigma\mu = -[m(m-1) - 2d],$$

en désignant par d le nombre des points doubles de f, et de plus

$$\Sigma R = -2m.$$

La relation (3) donne donc

$$d = \frac{m(m-3)}{2}.$$

La courbe sera par suite du genre un, comme nous voulions l'établir.

Allons plus loin, en cherchant quelle sera la forme de l'expression u. Soient $\lambda(x, y)$ et $\lambda_1(x, y)$ deux fonctions rationnelles, conduisant à une expression u, qui satisfassent aux conditions que nous venons de trouver. La différence

$$\int^{(x,y)} [\lambda(x, y) - \lambda_1(x, y)]\, dx$$

sera une intégrale abélienne n'ayant pas d'infinis; elle se réduira donc à une intégrale de première espèce. Ainsi, quand on aura une fonction $\lambda(x, y)$ satisfaisant aux conditions requises, on les obtiendra

toutes bien facilement. Or, appelons ν l'intégrale de première espèce de la courbe f de genre *un*; l'intégrale ν est une expression u, car on peut poser

$$\nu = \int \frac{d\nu}{dx} dx = \int e^{\int \frac{\nu''}{\nu'} dx} dx \qquad \left(\nu' = \frac{d\nu}{dx}, \quad \nu'' = \frac{d^2\nu}{dx^2}\right).$$

Une forme particulière de $\lambda(x, y)$ sera donc $\frac{\nu''}{\nu'}$ et sa forme générale sera, par suite,

$$\lambda(x, y) = \frac{\nu''}{\nu'} + a\nu',$$

a étant une constante, et l'on a, comme forme générale de u,

$$u = \int e^{a\nu} \nu' \, dx.$$

Il en résulte que u se réduit, soit à l'intégrale de première espèce (pour $a = 0$), soit à

$$e^{a\nu},$$

abstraction faite d'un facteur constant sans intérêt. *Les fonctions inverses sont donc, soit des fonctions doublement périodiques de u, soit des fonctions doublement périodiques de la combinaison linéaire*

$$A \log u + B,$$

A *et* B *étant des constantes.*

13. Nous avons supposé que u était de première espèce. Supposons-la maintenant de *seconde espèce*. Nous allons montrer d'abord qu'elle ne peut avoir qu'un seul pôle. Supposons, en effet, que u ait sur la surface de Riemann deux pôles A et A'. Quand (x, y) s'approche de A, u augmente indéfiniment et inversement; aux valeurs de u, d'un module suffisamment grand, correspond uniformément un certain domaine autour de A. Allons de A en A' par un chemin déterminé, d'ailleurs quelconque; u augmentera indéfiniment quand (x, y) se rapprochera de A', et aux valeurs de u d'un module suffisamment grand correspondra uniformément un certain domaine autour de A'. A une même valeur de u suffisamment grande correspondront ainsi deux valeurs de (x, y), l'une dans le voisinage de A, l'autre dans le voisinage de A', et il est clair qu'on pourra passer de l'une à

l'autre en faisant décrire à u un chemin convenable dans son plan, chemin qui correspondra au déplacement de (x, y) depuis la première valeur jusqu'à la seconde sans s'éloigner du chemin déterminé tracé plus haut entre A et A'. L'inversion ne donnera donc pas, pour x et y, des fonctions uniformes de u si l'expression (1) a plus d'un pôle.

Le pôle unique est nécessairement compris parmi les points (a, b), et l'inversion ne peut être uniforme que si la valeur de α correspondante est égale à -2. L'inversion uniforme exige aussi qu'il n'y ait pas d'autres points (a, b), pour la raison donnée au paragraphe précédent. Pareillement, tous les nombres μ sont égaux à -1 et les nombres R à -2. La relation (2) nous donne alors

$$-2-[m(m-1)-2d]=-2m,$$

d'où l'on conclut

$$d=\frac{(m-1)(m-2)}{2},$$

c'est-à-dire que *la courbe est unicursale* (¹).

Puisqu'il n'y a pas de cycles, la fonction de u, qui est de seconde espèce, est une fonction rationnelle de x et y et, par suite, du paramètre θ en fonction rationnelle duquel on peut exprimer x et y. Il est donc évident que x et y *seront des fonctions rationnelles de* u.

14. Supposons enfin que u soit une fonction de *troisième espèce*. Tout d'abord, dans le voisinage d'un point a, la partie de u devenant infinie ne peut avoir une partie polaire et une partie logarithmique, car l'inversion ne pourrait, dans ce cas, être uniforme.

Supposons, en effet, que l'on ait une partie polaire et une partie

---

(¹) On pourrait arriver à ce résultat, d'une manière plus rapide, sans commencer par établir qu'il n'y a qu'un seul pôle. Supposons, en effet, qu'il y ait λ pôles; on aurait

$$-2\lambda-[m(m-1)-2d]=-2m,$$

c'est-à-dire

$$d=\frac{m(m-3)}{2}+\lambda.$$

λ, s'il n'est pas nul, ne peut donc être égal qu'à l'unité, puisque d ne peut surpasser $\frac{m(m-3)}{2}+1$.

logarithmique. On aurait

$$A\varphi(x) + A\log(x-a) + \ldots = u,$$

la partie $\varphi(x)$ étant une somme de termes de la forme $\frac{A_i}{(x-a_i)^{\alpha_i}}$. Cette équation peut s'écrire

$$(x-a)e^{\varphi(x)+\ldots} = e^{\frac{u}{A}}.$$

Le premier membre aura en a un point singulier essentiel isolé. Donc, pour une valeur arbitraire de $e^{\frac{u}{A}}$, nous aurons une infinité de racines de cette équation dans le voisinage de a (t. II, p. 127). Donc, pour une infinité de valeurs de x autour de a, l'expression

$$A\varphi(x) + A\log(x-a) + \ldots$$

a la même valeur, à des multiples près de $2\pi i A$. On peut faire disparaître ce multiple de $2\pi i A$ en faisant tourner x autour de a, et nous pouvons, par conséquent, dire qu'à une valeur de u correspond un nombre infini de valeurs de x. Dans l'hypothèse faite, l'inversion ne se ferait donc pas d'une manière uniforme.

Donc, dans le voisinage d'un point (a, b), nous aurons

$$(4) \qquad A\log(x-a) + \ldots = u,$$

la partie non écrite étant holomorphe en $x-a$.

Posons

$$u = u' + iu'', \qquad x - a = \rho(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad A = \alpha + i\beta;$$

on aura

$$u' = \alpha\log\rho - \beta\theta + \ldots,$$
$$u'' = \beta\log\rho + \alpha\theta + \ldots$$

les parties non écrites tendant vers des valeurs finies déterminées quand x tend vers a. On tire des deux égalités précédentes

$$\alpha u' + \beta u'' = (\alpha^2 + \beta^2)\log\rho + \ldots.$$

Donc, quand x est suffisamment voisin de a, on a

$$\alpha u' + \beta u'' < 0.$$

Reprenons alors l'équation

$$A\log(x-a) + \ldots = u,$$

que nous écrirons

$$(x-a)e^{\psi(x)} = e^{\frac{u}{A}},$$

$\psi(x)$ étant holomorphe dans le voisinage de a. La partie réelle de $\frac{u}{A}$ est

$$\frac{\alpha u' + \beta u''}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Par suite, en désignant par γ une quantité *positive* suffisamment grande, on voit qu'il y a, par la relation précédente, une correspondance uniforme entre un cercle d'un rayon suffisamment petit décrit autour de a et le demi-plan défini dans le plan de u par l'inégalité

$$(5) \qquad \alpha u' + \beta u'' + \gamma < 0.$$

Ceci posé, on voit d'abord, en raisonnant comme au paragraphe précédent, que u ne peut avoir à la fois un pôle et un infini logarithmique, car au voisinage de ce dernier correspond un certain demi-plan, tandis qu'au voisinage du pôle correspond tout le domaine du plan u où le module est suffisamment grand; ces deux régions ont une partie commune et, par suite, à une même valeur de u correspondraient deux valeurs de (x, y).

Nous devons donc seulement examiner le cas où u aurait un ou plusieurs infinis logarithmiques; ces infinis seront des points (a, b) et la valeur correspondante de α sera égale à -1. D'ailleurs il n'y aura pas d'autres points (a, b), car, si un point (a, b) était un point ordinaire pour u, l'inversion ne se ferait pas d'une manière uniforme (déjà dit plus haut). On voit d'abord qu'il ne peut y avoir *un seul* point logarithmique : on devrait avoir en effet, d'après la relation (2),

$$-1 - [m(m-1) - 2d] = -2m,$$

égalité impossible, puisqu'elle donne pour d un nombre qui n'est pas entier.

Peut-il y avoir pour u deux infinis logarithmiques? En désignant par des lettres accentuées les constantes se rapportant au second infini, on fera correspondre, comme il a été dit plus haut, au voisinage de ce second point un certain demi-plan

$$(6) \qquad \alpha' u' + \beta' u'' + \gamma' < 0.$$

Pour que l'inversion se fasse d'une manière uniforme, les plans (5) et (6) ne doivent pas avoir de partie commune. Ce constance se présentera si l'on a

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'},$$

c'est-à-dire si les deux droites limitant les demi-plans sont pa et si de plus α et β sont respectivement de signes contraires à les constantes positives γ et γ' étant d'ailleurs suffisamment g Rien ne s'oppose donc à ce qu'il y ait *deux* infinis logarithi mais notre raisonnement va nous montrer qu'*il ne peut y e trois*. En effet, le demi-plan correspondant à ce troisièm aurait nécessairement une partie commune avec l'un ou l'au demi-plans précédents, et, par suite, l'inversion ne se ferait pa manière uniforme. Pour abréger, nous ne montrons pas, com haut, que les diverses valeurs de (x, y) se permuteraient bie elles, car il n'y a rien à changer à cette partie du raisonneme

Il y a donc deux α égaux à -1, et nous avons donc

$$-1-1-[m(m-1)-2d] = -2m,$$

d'où l'on conclut encore que *la courbe est unicursale* (1).

Si l'on exprime x et y en fonctions rationnelles d'un para l'expression (1) sera alors ici une fonction de θ, holomorphe voisinage de tout point du plan, sauf de deux points θ_0 et θ_1 (des infinis logarithmiques; on aura donc

$$A \log \frac{\theta-\theta_0}{\theta-\theta_1} = u,$$

et, par suite, x et y seront des fonctions rationnelles de e^{au},

---

(1) On pourrait encore ici se dispenser de prouver *a priori* que le no nfinis logarithmiques est *deux*. En le désignant par λ, on aura

$$-\lambda-[m(m-1)-2d] = -2m$$

ou

$$d = \frac{m(m-3)}{2} + \frac{\lambda}{2}.$$

Si donc λ n'est pas nul, on a

$$\lambda = 2.$$

Cette démonstration est beaucoup plus rapide que celle du texte.

une constante. La démonstration est achevée. *La courbe f est du genre zéro ou du genre un, et nous avons indiqué les formes très simples des fonctions x et y de u* (¹).

15. Comme nous l'avons remarqué au début, l'étude du cas où l'inversion d'une intégrale abélienne

$$\int^{(x,y)} R(x,y)\,dx = u \qquad [f(x,y)=0] \tag{7}$$

donne pour x et y des fonctions uniformes de u est un cas particulier de la proposition que nous venons d'établir. Mais ici la démonstration est encore plus simple, et l'on arrive ainsi de la manière la plus rapide et la plus rigoureuse aux résultats obtenus par Briot et Bouquet dans leur Mémoire classique sur les équations de la forme

$$\Phi\left(x, \frac{dx}{du}\right) = 0.$$

Aussi ne sera-t-il pas inutile de reprendre dans ce cas particulier la démonstration.

Si l'intégrale (7) est de première espèce, la courbe f est nécessairement de genre *un*, si x et y sont fonctions uniformes de u. C'est le cas le plus facile, où la démonstration ne présente aucune difficulté, puisqu'on a alors

$$R(x,y) = \frac{Q(x,y)}{f'_y},$$

$Q(x,y)$ désignant un polynome adjoint d'ordre $m-3$. En dehors des points doubles, il y aurait des points de rencontre de $Q=0$ avec f, si le genre de f dépassait l'unité, et, par suite, x cesserait d'être fonction uniforme de u. *Le genre de f est donc égal à un.* Les deux fonctions x et y sont doublement périodiques.

Si l'intégrale (7) est de seconde espèce, on peut supposer (§ 1) que

(¹) Le résultat général que nous venons d'obtenir est en définitive un résultat négatif. En considérant les expressions (1), mon but avait été d'obtenir des transcendantes uniformes ne changeant pas quand on y remplace la variable u par certaines expressions de la forme $au+b$ (les a et b étant des constantes, et les expressions formant nécessairement un groupe). On voit en effet immédiatement que u se change en $au+b$ quand (x, y) décrit un cycle sur la surface de Riemann. On vient de voir que les fonctions cherchées se ramènent à des fonctions connues.

ses pôles sont à distance finie et sont distincts des points de ramification. Raisonnant alors comme au § 5, nous montrons que u ne peut avoir qu'*un seul* pôle. Ce pôle simple de u sera pour $R(x, y)$ un pôle double. A l'infini, sur chacun des feuillets, on doit avoir un développement de la forme

$$R(x, y) = \frac{h}{x^2} + \frac{h'}{x^3} + \ldots \qquad (h \neq 0).$$

Ensuite $R(x, y)$ deviendra infinie aux points de ramification et en ces points seulement, de telle sorte que, pour un point de ramification (x, y), on aura

$$R(x, y) = \frac{k}{\sqrt{x - x_1}} + k' + \ldots \qquad (k \neq 0).$$

Dans toute autre hypothèse, en effet, x et y ne pourraient être fonctions uniformes de u. Enfin $R(x, y)$ ne s'annulera que pour les points à l'infini.

Ceci posé, considérons l'intégrale

$$(8) \qquad \int d \log R,$$

étendue à un contour rendant la surface simplement connexe. Cette intégrale est nulle, et, comme on connaît les racines et les pôles de R, elle se calcule immédiatement, ce qui donne

$$-2 - [m(m-1) - 2d] = -2m.$$

C'est la relation du § 5; on en conclut que *la courbe est unicursale.*

Il ne reste plus à examiner que le cas où u serait de troisième espèce. Le raisonnement du § 6 montre que u a *deux* infinis logarithmiques; pour les points à l'infini et pour les points de ramification, la forme de $R(x, y)$ est la même que ci-dessus. En prenant encore l'intégrale (8) le long du même contour, on a

$$-1 - 1 - [m(m-1) - 2d] = -2m,$$

d'où se tire encore la même conclusion.

Quant à la forme des valeurs de x et y, elle s'obtient non moins facilement. Dans le cas où u est de seconde espèce, x et y sont fonctions rationnelles de u, et, dans le cas où u est de troisième espèce, x et y sont fonctions rationnelles de e^{au}.

16. Nous allons compléter, pour terminer, le théorème général démontré plus haut. Nous avons supposé que l'expression considérée

$$u = \int^{(x,y)} e^{\int^{(x,y)} \lambda(x,y)\,dx}\,dx$$

n'avait sur la surface de Riemann que des pôles ou des infinis logarithmiques, de telle sorte que les singularités de u étaient absolument de même nature que celles des intégrales abéliennes attachées à la courbe f. Si l'on prend *a priori* une expression de cette forme, en supposant seulement qu'elle n'ait pas de singularités *essentielles*, on pourra avoir certains points (a, b) pour lesquels le résidu correspondant α (*voir* § 1) n'est pas un entier. La fonction u n'est pas alors uniforme dans le voisinage de (a, b) et la singularité n'est pas de nature logarithmique. Dans quels cas l'inversion pourra-t-elle conduire pour x et y à des fonctions uniformes? Il faut évidemment que

$$\alpha + 1 = \frac{1}{h},$$

h étant un entier positif ou négatif.

Si nous voulons faire la discussion, nous distinguerons le cas où la fonction u reste toujours finie et celui où elle devient infinie.

Dans le premier cas, les nombres h seront positifs et finis ($h = 1$ étant évidemment exclu). Toutes les autres conditions restant les mêmes, nous obtiendrons, en écrivant l'égalité

$$\sum \alpha + \sum \mu = \sum \mathrm{R},$$

la relation suivante:

$$\sum \left(-1 + \frac{1}{h}\right) - [m(m-1) - 2d] = -2m.$$

Ceci nous conduit à

$$d = \frac{m(m-3)}{2} + \frac{1}{2}\sum\left(1 - \frac{1}{h}\right).$$

On voit que d surpasse $\frac{m(m-3)}{2}$ et, par suite, *la courbe sera unicursale*. Il faudra de plus que l'on ait

$$\sum\left(1 - \frac{1}{h}\right) = 2.$$

Désignons par λ le nombre des termes de la somme; on aura

$$\lambda - 2 = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \ldots + \frac{1}{h_\lambda},$$

les h étant des entiers supérieurs à *un*. On a manifestement

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \ldots + \frac{1}{h_\lambda} \leqq \frac{\lambda}{2};$$

donc $\lambda - 2 \leqq \frac{\lambda}{2}$, c'est-à-dire $\lambda \leqq 4$.

On doit par suite avoir soit $\lambda = 3$, soit $\lambda = 4$.

Pour $\lambda = 3$, on a la relation

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = 1.$$

Pour $\lambda = 4$, on a

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = 2.$$

Les solutions de ces équations en entiers positifs sont en nombre très limité; il est sans intérêt de les transcrire, car nous verrons dans un moment que leur discussion a été faite sous une autre forme par Briot et Bouquet.

Passons au cas où u deviendrait infini. Nous avons toujours

$$\alpha = -1 + \frac{1}{h};$$

h est un entier qui peut être négatif. Le cas de $h = \infty$ correspond à l'infini logarithmique, le cas de $h = -1$ au pôle, de telle sorte que tous les cas sont compris dans la formule précédente. Nous aurons encore

$$d = \frac{m(m-3)}{2} + \frac{1}{2}\sum\left(1 - \frac{1}{h}\right).$$

La courbe sera donc encore unicursale.

Quant à la nature de x et y, nous l'obtiendrons de suite, en remarquant que, la courbe étant unicursale, on a, pour u,

$$u = \int e^{\int R(\theta)\,d\theta} R_1(\theta)\,d\theta,$$

R et R_1 étant rationnelles en θ. Comme il n'y a pas de singularités essentielles, nous aurons nécessairement

$$u = \int (\theta - \theta_1)^{\alpha_1} (\theta - \theta_2)^{\alpha_2} \dots (\theta - \theta_\lambda)^{\alpha_\lambda} \, d\theta,$$

et nous avons donc à chercher les cas où cette relation donne pour θ une fonction uniforme de u, problème traité par Briot et Bouquet dans le Mémoire cité plus haut et auquel nous renverrons. On en déduit encore que *x et y seront des fonctions doublement périodiques, des fonctions rationnelles de u ou des fonctions rationnelles de e^{au}.*

Des équations différentielles algébriques du premier ordre à points critiques fixes.

17. Considérons une équation différentielle du premier ordre

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{8}$$

f étant un polynome irréductible en y et $\frac{dy}{dx}$, les coefficients étant des fonctions quelconques de la variable x. Nous savons (Chap. II, Section IV) que les pôles et les points critiques algébriques sont les seules singularités mobiles, c'est-à-dire variables d'une intégrale à l'autre. Laissons de côté les pôles et proposons-nous l'étude des cas où *les points critiques algébriques sont fixes, c'est-à-dire indépendants de la constante d'intégration.*

C'est M. Fuchs (¹) qui a le premier appelé l'attention sur les équations algébriques du premier ordre à points critiques fixes, et il a donné les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation jouisse de cette propriété; il a aussi fait l'étude de deux cas particuliers très intéressants. M. Poincaré a repris ensuite la question (²), et la conclusion bien inattendue de ses recherches est que cette classe d'équations est fort limitée, je veux dire que les équations jouissant

(¹) Fuchs, *Ueber Differentialgleichungen deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen* (*Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin*, juin 1884).

(²) H. Poincaré, *Sur un théorème de M. Fuchs* (*Acta mathematica*, t. VII).

de la propriété indiquée se ramènent à des équations déjà étudiées ou peuvent être intégrées par des calculs purement algébriques.

Déjà, dans le Tome II de cet Ouvrage (p. 373), nous avons examiné un cas particulier du problème précédent, celui où l'équation (8) est du premier degré en $\frac{dy}{dx}$. Les théorèmes généraux démontrés sur les courbes algébriques nous permettent maintenant d'aborder le cas général.

18. Considérons un point x_0 et un point x distinct des points singuliers, qui, par hypothèse, sont fixes; joignons-les par un arc de courbe déterminé ne passant pas par les points critiques. Désignons par y_0 et y'_0 les valeurs initiales de y et y' pour $x = x_0$: on a, bien entendu, la relation

$$f(x_0, y_0, y'_0) = 0.$$

Quand la variable suit le chemin tracé de x_0 à x, l'intégrale se trouve déterminée de proche en proche, et, quand on arrive en x, on a pour l'intégrale et sa dérivée les valeurs y et y'. On peut donc considérer y et y' comme des fonctions de y_0 et y'_0, et si, écrivant les deux relations algébriques

$$f(x_0, y_0, y'_0) = 0, \tag{9}$$
$$f(x, y, y') = 0, \tag{10}$$

nous les considérons comme des relations algébriques, respectivement entre y_0 et y'_0 pour la première et entre y et y' pour la seconde, nous voyons qu'à un point *arbitraire* (y_0, y'_0) de la première courbe ne correspond qu'un point (y, y') de la seconde, et inversement, puisqu'on peut faire en sens inverse le raisonnement précédent. Il y a donc une correspondance *biuniforme* entre les points des courbes (9) et (10). Pour certains couples de valeurs (y_0, y'_0), une intégrale de l'équation différentielle peut n'être pas complètement déterminée par les valeurs initiales (y_0, y'_0), mais ces couples de valeurs sont nécessairement en nombre limité, puisqu'ils correspondent aux valeurs de y_0 pour lesquelles l'équation (9), regardée comme une équation en y'_0, a des racines multiples. Donc, d'après une remarque générale faite précédemment, *la transformation étant biuniforme entre les courbes* (9) *et* (10) *est nécessairement birationnelle*. On a ainsi

les relations

$$(11)\qquad \begin{cases} y = R(y_0, y'_0, x, x_0), \\ y' = R_1(y_0, y'_0, x, x_0), \end{cases}$$

R et R_1 étant rationnelles en y_0 et y'_0 et cette transformation est réversible.

19. Il peut sembler au premier abord que nous ne nous sommes pas servi, dans le paragraphe précédent, de l'hypothèse que les points critiques sont fixes, et qu'alors les conclusions précédentes peuvent s'appliquer à toute équation algébrique du premier ordre. Si les points critiques de l'équation étaient mobiles, nous ne pourrions pas regarder y et y' comme fonctions de (y_0, y'_0); en effet, en faisant varier (y_0, y'_0), il arriverait un moment où les points critiques variables avec les valeurs initiales (y_0, y'_0) se trouveraient sur l'arc tracé au début de x_0 à x, et, à ce moment, y et y' cesseraient d'être des fonctions bien définies de (y_0, y'_0).

20. Du théorème démontré au paragraphe 18 se tirent d'importantes conséquences. Les courbes (9) et (10) se correspondant point par point sont du même genre. Désignons ce genre par p; sa valeur joue un rôle essentiel dans la discussion qui va suivre.

Soit d'abord $p > 1$. Il ne peut y avoir alors qu'*un nombre limité* de transformations birationnelles transformant les deux courbes l'une dans l'autre, car, dans le cas contraire, il y aurait nécessairement une infinité de transformations birationnelles transformant chacune de ces courbes en elle-même, et ceci est impossible, puisque le genre est supérieur à l'unité (t. II, p. 483).

On pourra, par des calculs purement algébriques, déterminer toute transformation birationnelle transformant les courbes (9) et (10) l'une dans l'autre. Considérons, en effet, les p intégrales distinctes de première espèce

$$\int \lambda_1(x, y, y')\,dy, \quad \int \lambda_2(x, y, y')\,dy, \quad \ldots, \quad \int \lambda_p(x, y, y')\,dy,$$

relatives à la courbe (10); x figure comme simple paramètre dans les λ. On aura

$$\lambda_1(x, y, y')\,dy = A_1\lambda_1(x_0, y_0, y'_0)\,dy_0 + \ldots + A_p\lambda_p(x_0, y_0, y'_0)\,dy_0,$$
$$\lambda_2(x, y, y')\,dy = B_1\lambda_1(x_0, y_0, y'_0)\,dy_0 + \ldots + B_p\lambda_p(x_0, y_0, y'_0)\,dy_0,$$

les A et les B dépendant seulement du paramètre x. On aura donc, en divisant,

$$\frac{\lambda_1(x, y, y')}{\lambda_2(x, y, y')} = \frac{A_1\lambda_1(x_0, y_0, y'_0) + \ldots + A_p\lambda_p(x_0, y_0, y'_0)}{B_1\lambda_1(x_0, y_0, y'_0) + \ldots + B_p\lambda_p(x_0, y_0, y'_0)}.$$

Telle est la forme nécessaire de la correspondance entre les deux points (y, y') et (y_0, y'_0). On aura à rechercher si l'on peut déterminer les A et B de manière que cette correspondance soit birationnelle; ceci entraînera un certain nombre de relations entre les A, les B et x, relations qui, en général, seront trop nombreuses pour être compatibles, mais qui, dans tous les cas, ne pourront déterminer qu'un nombre fini de systèmes des A et B en fonction de x.

En définitive, les relations (11), quand elles existent, se déterminent par des calculs algébriques (pour $p > 1$); on aura de plus encore à vérifier si y' est la dérivée de y par rapport à x. Quand toutes ces conditions sont remplies, on a une équation à points critiques fixes dont l'intégrale générale est donnée par la première des équations (11). On voit que cette intégrale se détermine algébriquement. *L'intégrale générale est une fonction algébrique des coefficients de y et y' dans l'équation différentielle proposée.* En particulier, si x entre algébriquement dans f, l'intégrale sera une fonction algébrique de x.

21. Nous venons d'examiner le cas où p est supérieur à l'unité. Soit maintenant $p = 0$; on peut alors exprimer y et y' rationnellement en fonction d'un paramètre θ; on a ainsi

$$y = R\,(\theta, x),$$
$$y' = R_1(\theta, x),$$

R et R_1 étant rationnelles en θ, et inversement θ est une fonction rationnelle de y et y'. La fonction θ de x dépend d'une constante arbitraire connue y, et, comme cette dernière fonction, ses points critiques seront fixes. En écrivant que y' est la dérivée de y, nous aurons une équation

$$\frac{d\theta}{dx} = f(\theta, x),$$

f étant rationnelle en θ; nous sommes donc ramené au problème

proposé, mais dans le cas où la dérivée entre au *premier* degré. Il est inutile de répéter ici ce que nous avons déjà dit (t. II, p. 373); l'équation précédente a nécessairement la forme

$$\frac{d\theta}{dx} = P\theta^2 + Q\theta + R,$$

P, Q, R ne dépendant que de x. Nous sommes donc ramené à l'équation de Riccati.

22. Le cas où $p = 1$ est plus délicat, nous le traiterons de la manière suivante.

La courbe

$$(12) \qquad f(x, y, y') = 0$$

correspond point par point à une certaine courbe normale de genre *un*

$$(13) \qquad \mu^2 = (1 - \lambda^2)(1 - k^2\lambda^2),$$

le module k étant indépendant de x, puisque la courbe (12) correspond point par point à la courbe $f(x_0, y_0, y'_0)$ indépendante de x. Écrivons la substitution birationnelle, que nous pouvons regarder comme connue, entre ces deux courbes :

$$(14) \qquad \begin{cases} y = S(\lambda, \mu, x), \\ y' = S_1(\lambda, \mu, x). \end{cases}$$

Nous aurons nécessairement, par cette transformation,

$$\int_{(\lambda, \mu)}^{(L, M)} \frac{d\lambda}{\mu} = \int_{(y, y')}^{(Y, Y')} P(x, y, y')\, dy,$$

(λ, μ) et (L, M) étant, pour le moment, deux points arbitraires de la courbe (13), et (y, y') et (Y, Y') étant les points correspondants de (12). L'intégrale qui figure dans le second membre est manifestement une intégrale de première espèce relative à (12); ses deux périodes ne dépendent pas de x, puisque les périodes de l'intégrale du premier membre n'en dépendent pas.

D'autre part, nous avons entre la courbe (12) et la courbe

$$f(x_0, y_0, y'_0) = 0$$

une certaine correspondance birationnelle inconnue : la correspondance (11). Cette correspondance nous donnera

$$\int_{(y,y')}^{(Y,Y')} P(x, y, y')\,dy = A \int_{(y_0,y'_0)}^{(Y_0,Y'_0)} P(x_0, y_0, y'_0)\,dy_0.$$

A pourrait, *a priori*, dépendre de x, mais il n'en dépend pas ; sinon, la période de la première intégrale dépendrait de x, ce qui n'a pas lieu, d'après ce que nous avons vu plus haut. On voit alors de suite que $A = 1$ en faisant $x = x_0$.

On conclut de là que, si l'on prend deux intégrales, y et Y, de l'équation différentielle, correspondant respectivement aux valeurs initiales (y_0, y'_0) et (Y_0, Y'_0), et qu'on désigne par (λ, μ) et (L, M) les valeurs correspondantes données par la substitution birationnelle (14), on aura

$$\int_{(\lambda,\mu)}^{(L,M)} \frac{d\lambda}{\mu} = \alpha,$$

α étant une constante indépendante de x. Soit maintenant (α, β) un point arbitraire de la courbe (13) qui va rester fixe, et considérons l'intégrale

$$\int_{(\alpha,\beta)}^{(\lambda,\mu)} \frac{d\lambda}{\mu},$$

(λ, μ) correspondant toujours à l'intégrale (y, y'). Cette intégrale est une fonction de x que nous désignerons par $g(x)$. Posons donc

$$(15) \qquad \int_{(\alpha,\beta)}^{(\lambda,\mu)} \frac{d\lambda}{\mu} = g(x).$$

Si, à la place de l'intégrale (y, y'), nous considérons une autre intégrale (Y, Y'), nous aurons

$$\int_{(\alpha,\beta)}^{(L,M)} \frac{d\lambda}{\mu} = G(x),$$

(L, M) correspondant à (Y, Y'), comme (λ, μ) correspond à (y, y'). La dépendance entre les fonctions $G(x)$ et $g(x)$ est facile à trouver ; on aura

$$G(x) - g(x) = \alpha,$$

α étant une constante indépendante de x, d'après ce que nous avons

dit plus haut. *Ainsi la fonction $g(x)$ est déterminée à une constante près.* On a

$$g'(x) = \frac{1}{\mu}\frac{d\lambda}{dx}.$$

Or λ et μ sont des fonctions connues de y, y' et x, d'après (14). La fonction $g(x)$ étant déterminée à une constante près, il faudra que $g'(x)$ se réduise à une fonction de x en tenant compte de $f(x, y, y') = 0$. Lorsque cette condition se trouvera réalisée, on déterminera $g(x)$ par une quadrature, et l'on aura, d'après la relation (15),

$$\lambda = \mathrm{sn}[g(x) + \alpha],$$

sn désignant la fonction elliptique; μ sera aussi une fonction doublement périodique de $g(x) + \alpha$, et l'on a alors la forme de l'intégrale qui s'exprime à l'aide de fonctions doublement périodiques. La constante arbitraire est α, et les points critiques de l'intégrale ne peuvent être autres que ceux de la fonction $g(x)$, qui, comme nous l'avons dit, s'obtient par une quadrature.

23. La discussion de la nature des intégrales d'une équation différentielle du premier ordre, algébrique en y et y', *à points critiques fixes,* est complète.

Suivant la nature du genre p de la relation algébrique entre y et y',

$$f(x, y, y') = 0,$$

pour une valeur arbitraire de x, *l'intégrale s'obtiendra par des calculs algébriques* ($p > 1$), *ou elle s'obtiendra par une quadrature* ($p = 1$), *ou enfin on sera ramené à une équation de Riccati* ($p = 0$).

CHAPITRE V.

SUR CERTAINES MÉTHODES D'APPROXIMATIONS SUCCESSIVES.

I. — Un théorème général sur les équations différentielles linéaires renfermant un paramètre arbitraire.

1. Nous avons, au Tome II de cet Ouvrage (2[e] édit., p. 340), étudié une méthode d'approximations successives qui nous a conduit à quelques théorèmes fondamentaux sur l'existence des intégrales des équations différentielles. Nous allons, dans ce Chapitre, faire diverses applications de cette idée générale d'approximations successives, en variant les conditions des problèmes.

Remarquons d'abord, comme complément aux observations faites (*loc. cit.*, p. 345), que pour une équation linéaire quelconque

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + P_m y = 0,$$

où les P sont dans un certain intervalle I des fonctions continues de la variable réelle x, la méthode indiquée conduit à un développement en série valable pour toute valeur de la variable dans le champ I où les P sont continues.

2. J'emploierai encore la méthode des approximations successives à la démonstration d'un théorème important sur les équations linéaires. Soit une équation linéaire

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + P_1(x, k) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + P_m(x, k) y = 0,$$

dont les coefficients dépendent d'un paramètre k et sont des fonc-

tions *entières* de ce paramètre k. Les fonctions P sont continues en x dans un certain intervalle I.

Il est utile de savoir quelle sera la nature d'une intégrale quelconque par rapport à k; nous allons voir immédiatement que, pour x compris dans l'intervalle I, il y a un système fondamental d'intégrales, fonctions entières de k, *c'est-à-dire holomorphes dans tout le plan de la variable k.* Si, en effet, on représente, comme nous l'avons fait (*loc. cit.*), l'intégrale par une série

$$y_0 + (y_1 - y_0) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots,$$

chaque terme de cette série est une fonction entière de k, en supposant que les valeurs initiales soient *numériques,* c'est-à-dire indépendantes de k. Restons dans le plan de la variable k à l'intérieur d'un cercle C d'ailleurs arbitraire; nous savons que, pour x quelconque dans I et pour k quelconque dans ce cercle, on peut trouver un nombre fixe λ tel que

$$|y_n - y_{n-1}| < \frac{\lambda^n}{1.2\ldots n}.$$

Nous avons donc, en définitive, une série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

dont chaque terme est une fonction holomorphe de k dans le cercle C, et où l'on a de plus

$$|u_n| < \frac{\lambda^n}{1.2\ldots n}.$$

Il est bien facile de voir que la série des u sera elle-même une fonction holomorphe de k dans C. C'est ce que montre la formule de Cauchy,

$$u_n(k) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{u_n(z)\,dz}{z-k}:$$

la série de terme général $u_n(z)$ étant *uniformément* convergente sur C, on aura

$$u_0(k) + \ldots + u_n(k) + \ldots = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{u_0(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots}{z-k}\,dz,$$

d'où se déduit de suite que la série des u est une fonction holomorphe de k dans C, et par suite dans tout le plan.

Nous concluons donc que *l'intégrale générale de* (1) *peut se*

mettre sous la forme

$$A_1 u_1(x, k) + A_2 u_2(x, k) + \ldots + A_n u_n(x, k),$$

les u étant des fonctions entières de k.

Nous appliquerons prochainement ce théorème à l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k\,A(x) y = 0.$$

II. — Cas d'un système d'équations différentielles du second ordre [1].

3. Prenons d'abord l'unique équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Nous voulons trouver l'intégrale de cette équation, qui prend pour $x = a$ la valeur A *et pour $x = b$* la valeur B. On suppose que la fonction

$$f(x, y, y')$$

est définie et continue quand x varie dans un certain intervalle de longueur h comprenant a et b, et que $|y|$ et $|y'|$ varient respectivement entre $-L$ et $+L$ d'une part, et $-L'$ et $+L'$ d'autre part; nous désignerons par M le module maximum de f dans ces conditions. On admet, de plus, que l'on a :

$$|f(x, y_1, y'_1) - f(x, y, y')| < \alpha |y - y_1| + \beta |y' - y'_1|,$$

α et β étant deux constantes positives fixes, les y et y' restant entre les limites indiquées.

On part d'une fonction quelconque y_0 satisfaisant aux conditions précédentes, et l'on forme les équations successives

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dx^2} &= f\left(x, y_0, \frac{dy_0}{dx}\right), \\ \frac{d^2 y_2}{dx^2} &= f\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^2 y_n}{dx^2} &= f\left(x, y_{n-1}, \frac{dy_{n-1}}{dx}\right). \end{aligned}\right.$$

---

[1] Pour ce qui concerne les approximations successives, on pourra consulter, dans le *Journal de Mathématiques*, mes Mémoires de 1890 (Chap. V) et de 1893, ainsi que la Note I insérée dans les *Leçons sur la théorie des surfaces*, de M. DARBOUX, t. IV.

On intègre chaque fois par la condition que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ prennent les valeurs initiale et finale données.

Pour simplifier l'écriture, nous supposerons, comme il est évidemment permis, que

$$a = A = 0 \quad \text{et} \quad b > 0.$$

Il s'agit d'abord de savoir si les y successifs restent, ainsi que leurs dérivées premières, entre les limites indiquées.

4. Nous avons donc à considérer l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x), \tag{3}$$

on aura l'intégrale s'annulant pour $x = 0$,

$$\int_0^x \varphi(z)(x - z)\,dz + Px.$$

Choisissons la constante P de telle sorte que cette expression prenne la valeur B pour $x = b$; on a ainsi

$$y = \int_0^x \varphi(z)(x - z)\,dz + \frac{Bx}{b} - \frac{x}{b}\int_0^b \varphi(z)(b - z)\,dz,$$

qui représente l'intégrale de (3) s'annulant pour $x = 0$ et prenant la valeur B pour $x = b$. On peut trouver une limite supérieure de $|y|$ et $\left|\frac{dy}{dx}\right|$ quand x varie entre 0 et b. Écrivons y sous la forme

$$\int_0^x z\varphi(z)\left(\frac{x}{b} - 1\right)dz - \frac{x}{b}\int_x^b \varphi(z)(b - z)\,dz + \frac{Bx}{b}.$$

La valeur absolue de la première intégrale, en désignant par M la valeur absolue maxima de $\varphi(x)$, est moindre que

$$\left(1 - \frac{x}{b}\right)\frac{Mx^2}{2}.$$

La valeur absolue de la seconde est moindre que

$$\frac{x}{b}\,\frac{M(b - x)^2}{2}.$$

On a donc

$$|y| < \left(1-\frac{x}{b}\right)\frac{Mx^2}{2} + \frac{x}{b}\frac{M(b-x)^2}{2} + |B| = \frac{Mx(b-x)}{2} + |B|,$$

d'où, enfin,

$$|y| < \frac{Mb^2}{8} + |B|.$$

Passons maintenant à $\frac{dy}{dx}$; on a

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(z)\,dz + \frac{B}{b} - \frac{1}{b}\int_0^b \varphi(z)(b-z)\,dz,$$

égalité qu'on peut écrire sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(z)\left(1-\frac{b-z}{b}\right)dz - \frac{1}{b}\int_x^b \varphi(z)(b-z)\,dz + \frac{B}{b};$$

on aura, par suite,

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| < \frac{Mx^2}{2b} + \frac{M}{b}\frac{(b-x)^2}{2} + \left|\frac{B}{b}\right|$$

et, par suite,

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| < \frac{Mb}{2} + \left|\frac{B}{b}\right|.$$

5. Revenons maintenant au système (2). Nous devons évidemment supposer

$$|B| < L.$$

Nous admettrons, de plus, que l'on a

$$\frac{Mb^2}{8} + |B| < L, \tag{4}$$

ce qui a lieu si b est assez petit. De plus, pour que $\frac{dy}{dx}$ soit certainement compris entre $-L'$ et $+L'$, nous faisons l'hypothèse

$$\frac{Mb}{2} + \left|\frac{B}{b}\right| < L'. \tag{5}$$

Moyennant les inégalités (4) et (5), nous sommes assuré que les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont toutes comprises entre $-L$ et $+L$. On doit remarquer que ces inégalités seront certainement vérifiées si b, B et $\frac{B}{b}$ sont suffisamment petits.

Il nous faut maintenant montrer que y_n tend vers une limite quand n augmente indéfiniment. On a

$$\frac{d^2(y_2-y_1)}{dx^2}=f\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right)-f\left(x, y_0, \frac{dy_0}{dx}\right).$$

Or, soit M le maximum de

$$\alpha|y_1-y_0|+\beta\left|\frac{dy_1}{dx}-\frac{dy_0}{dx}\right|;$$

nous aurons, d'après ce qui précède, puisque y_2-y_1 s'annule pour $x=b$,

$$|y_2-y_1|<\frac{Mb^2}{8},$$

$$\left|\frac{dy_2}{dx}-\frac{dy_1}{dx}\right|<\frac{Mb}{2}.$$

La relation

$$\frac{d^2(y_3-y_2)}{dx^2}=f\left(x, y_2, \frac{dy_2}{dx}\right)-f\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right)$$

nous montre que

$$|y_3-y_2|<M\left(\alpha\frac{b^2}{8}+\beta\frac{b}{2}\right)\frac{b^2}{8},$$

$$\left|\frac{dy_3}{dx}-\frac{dy_2}{dx}\right|<M\left(\alpha\frac{b^2}{8}+\beta\frac{b}{2}\right)\frac{b}{2},$$

et, de proche en proche, on arrive aux inégalités

$$|y_n-y_{n-1}|<M\left(\alpha\frac{b^2}{8}+\beta\frac{b}{2}\right)^{n-2}\frac{b^2}{8},$$

$$\left|\frac{dy_n}{dx}-\frac{dy_{n-1}}{dx}\right|<M\left(\alpha\frac{b^2}{8}+\beta\frac{b}{2}\right)^{n-2}\frac{b}{2}.$$

Si donc on a

$$(6)\qquad \alpha\frac{b^2}{8}+\beta\frac{b}{2}<1,$$

la série

$$y_1+(y_2-y_1)+\ldots+(y_n-y_{n-1})+\ldots$$

sera manifestement convergente, et, par suite, y_n aura une limite y pour $n=\infty$. Cette fonction y de x aura certainement une dérivée première représentée par la série

$$\frac{dy_1}{dx}+\left(\frac{dy_2}{dx}-\frac{dy_1}{dx}\right)+\ldots+\left(\frac{dy_n}{dx}-\frac{dy_{n-1}}{dx}\right)+\ldots.$$

Il est aisé de vérifier que y satisfait à l'équation (1); on a, en effet,

$$y_n = \int_0^x f\left(z, y_{n-1}, \frac{dy_{n-1}}{dz}\right)(x-z)\,dz$$
$$+ \frac{Bx}{b} - \frac{x}{b}\int_0^b f\left(z, y_{n-1}, \frac{dy_{n-1}}{dz}\right)(b-z)\,dz,$$

en remplaçant, sous les signes d'intégration, dans y_{n-1}, la lettre x par la lettre z. Puisque y_n et $\frac{dy_n}{dz}$ convergent *uniformément* vers leurs limites respectives y et $\frac{dy}{dz}$, on aura

$$y = \int_0^x f\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)(x-z)\,dz + \frac{Bx}{b} - \frac{x}{b}\int_0^b f\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)(b-z)\,dz$$

et, par suite, en différentiant deux fois,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Il est évident, d'ailleurs, que $y = 0$ pour $x = 0$, et $y = B$ pour $x = b$.

La recherche de l'intégrale est donc complètement effectuée; on ne doit pas oublier que les inégalités (4), (5) et (6) sont supposées vérifiées.

6. L'analyse précédente peut s'étendre à un nombre quelconque d'équations de la forme

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = f_1\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_m}{dx}\right),$$
$$\frac{d^2y_2}{dx^2} = f_2\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_m}{dx}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\frac{d^2y_m}{dx^2} = f_m\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_m}{dx}\right).$$

Notre méthode d'approximations successives permettra de déterminer les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de ce système, telles qu'on ait

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0 \qquad (\text{pour } x = 0),$$
$$y_1 = B_1, \quad y_2 = B_2, \quad \ldots, \quad y_m = B_m \qquad (\text{pour } x = b).$$

Certaines inégalités analogues aux inégalités (4), (5) et (6) devront

être vérifiées. On suppose, d'ailleurs, que

$$|f_i(x, y_1, \ldots, y_m, y'_1, \ldots, y'_m) - f_i(x, z_1, \ldots, z_m, z'_1, \ldots, z'_m)|$$
$$< \alpha_1 |y_1 - z_1| + \ldots + \alpha_m |y_m - z_m| + \beta_1 |y'_1 - z'_1| + \ldots + \beta_m |y'_m - z'_m|.$$

En gardant, pour le reste, les mêmes notations que plus haut, on devra avoir

$$\frac{Mb^2}{8} + |B_i| < L,$$

$$\frac{Mb}{2} + \left|\frac{B_i}{b}\right| < L$$

et enfin

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m)\frac{b^2}{8} + (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m)\frac{b}{2} < 1.$$

7. Je dis maintenant que *l'intégrale déterminée par la méthode précédente est unique,* c'est-à-dire qu'il n'existe qu'un seul système d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$ prenant les valeurs données au commencement et à la fin de l'intervalle $(0, b)$. Bien entendu, *nous ne pouvons considérer que des systèmes d'intégrales telles que*

$$|y_i| < L, \qquad |y'_i| < L',$$

puisque c'est seulement dans un tel intervalle que nous supposons les f définies.

Pour abréger, je supposerai que les fonctions f ont des dérivées partielles du premier ordre par rapport aux y, de telle sorte que α_k sera le maximum de

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right| \qquad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

et pareillement β_k sera le maximum de

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y'_k}\right| \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

quand x varie entre 0 et b, les y entre $-L$ et $+L$, et les y' entre $-L'$ et $+L'$.

Supposons maintenant que nous ayons deux systèmes d'intégrales satisfaisant aux mêmes conditions aux limites

$$y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_m \quad \text{et} \quad Y_1, \; Y_2, \; \ldots, \; Y_m.$$

On aura, en retranchant les équations différentielles, puis posant

$$y_i - Y_i = u_i,$$

et appliquant le théorème des accroissements finis

$$(E)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2u_1}{dx^2}=a_{11}\;u_1+a_{12}\;u_2+\ldots+a_{1,m}\;u_m+b_{11}\;\dfrac{du_1}{dx}+\ldots+b_{1,m}\;\dfrac{du_m}{dx},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \dfrac{d^2u_m}{dx^2}=a_{m,1}u_1+a_{m,2}u_2+\ldots+a_{m,m}u_m+b_{m,1}\dfrac{du_1}{dx}+\ldots+b_{m,m}\dfrac{du_m}{dx}.\end{array}\right.$$

Nous pouvons considérer les a et b comme des fonctions de x, et nous avons alors un système d'équations linéaires et homogènes, pour lesquelles un système d'intégrales

$$u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_m$$

s'annule pour $x = 0$ et pour $x = b$.

Nous allons voir que les u doivent être identiquement nulles. De ce que

$$|a_{i,k}| < \alpha_k \quad \text{et} \quad |b_{i,k}| < \beta_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

on conclut que, pour le système (E) d'équations linéaires, la méthode des approximations successives est applicable. Il en résulte que l'on peut trouver $2m$ systèmes d'intégrales prenant pour $x = 0$ et $x = b$ des valeurs arbitrairement données. Avec ces $2m$ systèmes d'intégrales, nous pouvons former l'intégrale générale de (E) et déterminer les constantes de façon à avoir les intégrales s'annulant toutes pour $x = 0$ et pour $x = b$. Or, ces constantes seront toutes nulles, puisqu'elles sont données par des équations homogènes du premier degré, dont le déterminant n'est pas nul, toutes les lettres qui forment le déterminant ayant des valeurs arbitraires. *Les u sont donc identiquement nulles, et l'on a bien*

$$Y_1 = y_1, \qquad \ldots, \qquad Y_m = y_m,$$

comme nous voulions l'établir.

III. — Quelques cas particuliers.

8. Nous avons vu que l'intégrale déterminée par la méthode des approximations successives, quand les conditions nécessaires pour l'application de la méthode sont vérifiées, est unique.

Étudions en elle-même, autant qu'il est possible, cette question de la détermination unique d'une intégrale d'une équation du second ordre par des valeurs initiale et finale.

Prenons d'abord l'équation linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2A\frac{dy}{dx} + By,$$

A et B ne dépendant que de x. Supposons qu'il y ait une intégrale y, s'annulant pour $x = a$ et pour $x = b$, et continue de a à b. On a évidemment la relation

$$\int_a^b y\left(\frac{d^2y}{dx^2} - 2A\frac{dy}{dx} - By\right)dx = 0,$$

qui se transforme de suite, en intégrant par partie, et devient

$$(\alpha)\qquad \int_a^b \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2Ay\frac{dy}{dx} + By^2\right]dx = 0.$$

Si donc on a, pour toute valeur de x comprise entre a et b,

$$B > A^2,$$

on est assuré que l'intégrale considérée y ne peut qu'être identiquement nulle.

On peut aller plus loin en employant un artifice dont je me suis servi déjà antérieurement pour certaines équations aux dérivées partielles (t. II, p. 24). Si λ désigne une fonction continue quelconque de x entre a et b, on aura

$$(\beta)\qquad \int_a^b \frac{d(\lambda y^2)}{dx}\,dx = 0.$$

En additionnant (α) et (β), il vient

$$\int_a^b \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2(\lambda + A)y\frac{dy}{dx} + \left(B + \frac{d\lambda}{dx}\right)y^2\right]dx = 0.$$

Si donc λ est tel que

$$\frac{d\lambda}{dx} - (\lambda + A)^2 + B > 0,$$

y devra être identiquement nul. Nous verrons dans un instant une application de cette transformation du problème.

9. Si nous reprenons maintenant l'équation non linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

il est facile de signaler un cas où cette équation ne pourra avoir deux intégrales prenant les mêmes valeurs pour $x = a$ et $x = b$, et continues de a à b. Soient, en effet, y_1 et y_2 deux telles intégrales: on a

$$\frac{d^2(y_2 - y_1)}{dx^2} = f\left(x, y_2, \frac{dy_2}{dx}\right) - f\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right).$$

Si nous supposons maintenant que f ait des dérivées partielles du premier ordre, elles-mêmes continues, nous pourrons écrire, en posant

$$y_2 - y_1 = u,$$

la relation précédente sous la forme

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = A\frac{du}{dx} + Bu,$$

où l'on a

$$A = f'_z\left(x, y_1 + \theta u, \frac{dy_1}{dx} + \theta' \frac{du}{dx}\right),$$

$$B = f'_y\left(x, y_1 + \theta u, \frac{dy_1}{dx} + \theta' \frac{du}{dx}\right).$$

Je désigne, pour marquer les dérivations, la fonction f par $f(x, y, z)$. A et B peuvent être regardées comme des fonctions de x. Or si l'on a, quels que soient y et z, pour x compris entre a et b,

$$4f'_y(x, y, z) > [f'_z(x, y, z)]^2,$$

il est manifeste que *l'équation*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

n'aura qu'une seule intégrale prenant des valeurs données pour $x = a$ et $x = b$, et continue dans cet intervalle. En particulier, l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y),$$

où f croît en même temps que y, rentre dans la catégorie précédente.

10. L'équation linéaire

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = By$$

mérite une étude spéciale. D'après ce que nous venons de voir au paragraphe précédent, si B est positif de a à b, il existera *une seule intégrale* continue de a à b et prenant pour ces valeurs de x des valeurs données.

Le cas où B *est négatif de* a *à* b *est beaucoup plus difficile à étudier;* nous l'approfondirons dans le Chapitre suivant. L'analyse du paragraphe 8 va nous conduire à un premier résultat. Soit

$$|B| < h \qquad (x \text{ variant de } a \text{ à } b),$$

h étant une constante positive. Nous serons assuré de l'existence *unique* d'une intégrale, déterminée par ses valeurs pour $x = a$ et pour $x = b$, si l'on peut trouver λ, fonction continue de x dans cet intervalle, et telle que l'on ait

$$\frac{d\lambda}{dx} - \lambda^2 + B > 0.$$

Or, si l'on peut déterminer λ de telle sorte que

$$\frac{d\lambda}{dx} - \lambda^2 > h,$$

cette dernière inégalité entraînera la première. Soit $h_1 > h$, l'équation

$$\frac{d\lambda}{dx} - \lambda^2 = h_1$$

donne

$$\lambda = \sqrt{h_1}\,\operatorname{tang}(x\sqrt{h_1} + C),$$

C étant une constante. Si l'intervalle (a, b) est inférieur à $\frac{\pi}{\sqrt{h_1}}$, on pourra choisir évidemment la constante C de manière que λ soit continue dans l'intervalle. Comme, d'autre part, h_1 est aussi rapproché que l'on veut de h, on peut dire que, *si l'intervalle* (a, b) *a une longueur inférieure à* $\frac{\pi}{\sqrt{h}}$, *il existera une seule intégrale de l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = By,$$

prenant pour a *et* b *des valeurs données.*

Nous allons maintenant faire une étude plus approfondie de cette équation et de quelques équations qui s'y rapportent.

CHAPITRE VI.

SUR CERTAINES ÉQUATIONS LINÉAIRES DU SECOND ORDRE.

I. — Définition d'une constante fondamentale dans l'étude de certaines équations linéaires. Étude progressive de l'intégrale.

1. Nous allons faire dans ce Chapitre une étude approfondie de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A(x)y = 0,$$

la fonction $A(x)$ étant *positive* de a à b. Quoique cette équation soit de forme bien particulière, nous allons trouver dans son étude un type de problèmes, qui se poseront d'une manière analogue dans des équations plus générales, et que nous pourrons ici approfondir complètement.

Nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

S'il existe une intégrale y de l'équation précédente, toujours positive et différente de zéro de a à b, et continue ainsi que sa dérivée première, cette intégrale pourra être obtenue par la méthode des approximations successives.

Faisons d'abord une remarque préliminaire.

L'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \varphi(x) = 0,$$

s'annulant pour $x = a$ et $x = b$, est donnée par la formule

$$y = \int_a^x \varphi(z)\frac{(b-x)(z-a)}{b-a}\,dz + \frac{x-a}{b-a}\int_x^b \varphi(z)(b-z)\,dz.$$

On voit que, si $\varphi(x)$ est positif de a à b, la fonction y sera positive, et croîtra, si l'on remplace $\varphi(x)$ par une fonction plus grande.

Au lieu de la forme élémentaire classique de l'intégrale y de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \varphi(x) = 0,$$

qui s'annule en a et b, on peut avec M. Burkhardt (*Bulletin de la Société mathématique*, 1894) écrire

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

où la fonction $G(x, \xi)$ est définie par les égalités

$$G(x, \xi) = \frac{(b - x)(\xi - a)}{b - a} \qquad \text{pour} \qquad \xi < x,$$

$$G(x, \xi) = \frac{(b - \xi)(x - a)}{b - a)} \qquad \text{pour} \qquad \xi > x.$$

Ceci posé, nous partirons, pour les approximations successives, de la fonction y_0 vérifiant l'équation

$$\frac{d^2y_0}{dx^2} = 0,$$

et prenant les mêmes valeurs que y aux deux extrémités de l'intervalle (a, b). On aura ensuite la succession des équations

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + A(x)y_0 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{d^2y_n}{dx^2} + A(x)y_{n-1} = 0,$$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ prenant les mêmes valeurs initiale et finale que y, et étant positives, comme y, dans l'intervalle (a, b). De l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A(x)y = 0,$$

on conclut que

$$\frac{d^2(y - y_0)}{dx^2} + A(x)y = 0;$$

or $y - y_0$ a des valeurs initiale et finale nulles, par suite, $y - y_0$ est

positif, d'après la remarque faite plus haut. Écrivons donc

$$y > y_0.$$

Il résulte aussi de la même remarque que

$$y_0 < y_1 < \ldots < y_n < \ldots < y.$$

Nous voulons établir que y_n a y pour limite. A cet effet, considérons le quotient

$$\frac{y - y_0}{y}:$$

il restera moindre, dans l'intervalle (a, b), qu'un nombre fixe q *inférieur à l'unité*. Les deux équations

$$\frac{d^2(y - y_0)}{dx^2} + A(x)y \qquad = 0,$$

$$\frac{d^2(y - y_1)}{dx^2} + A(x)(y - y_0) = 0$$

montrent de suite que

$$\frac{y - y_1}{y - y_0} < q.$$

En continuant ainsi, on a, d'une manière générale,

$$\frac{y - y_n}{y - y_{n-1}} < q$$

et, par conséquent, en multipliant toutes ces inégalités membre à membre,

$$y - y_n < y \cdot q^{n+1}.$$

Il est donc établi que y_n *converge uniformément vers* y. On voit, de plus, qu'il ne peut y avoir deux intégrales *positives* prenant les mêmes valeurs en a et b.

2. En supposant, comme au paragraphe précédent, qu'*il existe une intégrale y de l'équation, toujours positive et différente de zéro dans l'intervalle* (a, b), on peut montrer qu'il n'existe pas d'autre intégrale, s'annulant en a et b, que $y = 0$. Supposons, en effet, qu'il existe une telle intégrale; nous pouvons supposer qu'elle garde un signe invariable dans l'intervalle, sinon elle s'annulerait au

moins une fois entre a et b, et l'on raisonnerait sur un intervalle compris dans (a, b). Soit donc une intégrale Y s'annulant en a et b et positive toujours dans l'intervalle. On peut choisir la constante k de manière que les deux intégrales

$$ky \quad \text{et} \quad Y$$

soient égales en un point choisi arbitrairement entre a et b. Puisque Y s'annule en a et b, il faudra qu'il y ait une seconde valeur de x pour laquelle on ait encore

$$ky = Y,$$

et nous aurions un intervalle moindre que (a, b) pour lequel il existerait deux intégrales positives et répondant aux mêmes valeurs initiale et finale, ce qui est impossible. Il faut donc que Y soit *identiquement nul*.

On conclut de là qu'*une intégrale est nécessairement déterminée d'une manière unique par ses valeurs initiale et finale dans l'intervalle* (a, b) *ou dans tout intervalle compris dans celui-ci*.

3. Introduisons maintenant une succession de constantes qui vont jouer dans la suite un rôle très important. Nous reprenons les approximations successives en faisant

$$y_0 = 1.$$

On aura une suite de fonctions

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n, \quad \ldots$$

prenant pour $x = a$ et $x = b$ la valeur un. Posons

$$y_0 = u_0 = 1, \qquad y_1 - y_0 = u_1, \qquad \ldots, \qquad y_n - y_{n-1} = u_n, \qquad \ldots;$$

les u, sauf u_0, s'annulent aux deux extrémités de (a, b). J'envisage les deux séries de constantes (¹)

$$W_{m,n} = \int_a^b A(x) u_m u_n \, dx, \qquad V_{m,n} = \int_a^b \frac{du_m}{dx} \frac{du_n}{dx} \, dx.$$

(¹) Ces deux séries de constantes ont été considérées par M. Schwarz dans une question analogue relative à certaines équations aux dérivées partielles (*Mathematische Abhandlungen*, t. I, p. 141).

Ces deux expressions ne changent pas si l'on remplace u_m et u_n par d'autres lettres u, la somme $m+n$ restant constante.

On a, en effet,

$$\begin{aligned} W_{m,n} &= -\int_a^b \frac{d^2 u_{m+1}}{dx^2} u_n \, dx = \int_a^b \frac{du_{m+1}}{dx} \frac{du_n}{dx} dx \\ &= -\int_a^b u_{m+1} \frac{d^2 u_n}{dx^2} dx = +\int_a^b A(x) u_{m+1} u_{n-1} \, dx : \end{aligned}$$

par conséquent, $W_{m,n}$ ne dépend que de $m+n$.

Si nous posons

$$W_{m+n} = \int_a^b A(x) u_{m+n} \, dx,$$

nous aurons

$$V_{m,n} = -\int_a^b u_m \frac{d^2 u_n}{dx^2} dx = \int_a^b A(x) u_m u_{n-1} \, dx,$$

et, par suite,

$$V_{m,n} = W_{m+n-1}.$$

4. Partons de l'inégalité

$$\int_a^b A(x) [\alpha u_n + \beta u_{n+1}]^2 dx > 0,$$

α et β désignant deux constantes arbitraires. Cette inégalité peut s'écrire

$$\alpha^2 W_{2n} + 2\alpha\beta W_{2n+1} + \beta^2 W_{2n+2} > 0.$$

On aura, par suite,

$$(W_{2n+1})^2 - W_{2n} W_{2n+2} < 0$$

ou

$$\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} < \frac{W_{2n+2}}{W_{2n+1}}.$$

On a, de la même manière,

$$\int_a^b \left[\frac{d(\alpha u_n + \beta u_{n+1})}{dx} \right]^2 dx > 0$$

ou

$$\alpha^2 W_{2n-1} + 2\alpha\beta W_{2n} + \beta^2 W_{2n+1} > 0,$$

d'où l'on conclut

$$\frac{W_{2n}}{W_{2n-1}} < \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}}.$$

Les inégalités précédentes montrent que l'on a

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \ldots < \frac{W_n}{W_{n-1}} < \ldots$$

Je dis que le quotient $\frac{W_n}{W_{n-1}}$, croissant avec n, tend vers une limite pour $n = \infty$. Soit, en effet, g la plus grande valeur que prend la fonction u_1 dans l'intervalle (a, b). Les différences

$$u_1 - gu_0, \quad u_2 - gu_1, \quad \ldots, \quad u_n - gu_{n-1}, \quad \ldots$$

seront toutes négatives dans l'intervalle (a, b). Or on a

$$W_{2n} - gW_{2n-1} = \int_a^b A(x) u_n (u_n - gu_{n-1})\, dx;$$

donc

$$W_{2n} - gW_{2n-1} < 0;$$

par suite, $\frac{W_{2n}}{W_{2n-1}}$ ne dépasse pas g. Ainsi, en posant

$$c_n = \frac{W_n}{W_{n-1}},$$

nous sommes assuré que *les quantités croissantes*

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_n, \quad \ldots$$

tendent vers une limite quand n augmente indéfiniment. Nous désignerons cette limite par c.

D'après un théorème élémentaire sur les suites, on peut encore définir c comme la limite de

$$\sqrt[n]{W_n},$$

et nous pouvons de suite faire la remarque, qui nous sera plus tard utile, que, pour une équation correspondant à une fonction $A'(x)$ plus grande que $A(x)$, on aura une limite c' qui sera plus grande que c.

5. Cherchons à comparer $u_n(x)$ à $\sqrt{W_{2n}}$. On a

$$\frac{d^2 u_n}{dx^2} + A(x) u_{n-1} = 0$$

et, par suite,

$$u_n(x) = -\int_a^x A(z) u_{n-1}(z)(x - z)\, dz + \frac{x-a}{b-a}\int_a^b A(z) u_{n-1}(z)(b - z)\, dz.$$

On en conclut

$$|u_n(x)| < \int_a^b A(z) u_{n-1}(z)(b - z)\, dz.$$

Or de l'inégalité

$$\int_a^b \left[\frac{\alpha A(z) u_{n-1}(z)}{\sqrt{W_{2n}}} + \beta(b - z)\right]^2 dz > 0,$$

α et β étant deux constantes quelconques, on déduit

$$\left[\int_a^b \frac{A(z) u_{n-1}(z)(b - z)}{\sqrt{W_{2n}}} dz\right]^2 < \int_a^b \frac{A^2(z) u_{n-1}^2(z)\, dz}{W_{2n}} \int_a^b (b - z$$

et, par suite,

$$\left[\frac{u_n(x)}{\sqrt{W_{2n}}}\right]^2 < \frac{W_{2n-2}}{W_{2n}} H,$$

H étant un nombre fixe. Or $\frac{W_{2n-2}}{W_{2n}}$ a $\frac{1}{c^2}$ pour limite (pour $n = \infty$
On peut donc écrire

$$\frac{u_n(x)}{\sqrt{W_{2n}}} < K,$$

K étant un nombre fixe.

6. Nous allons, des résultats précédents, déduire des conséqu extrêmement importantes. D'après l'inégalité du paragraphe p dent, la série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

convergera uniformément dans l'intervalle (a, b), si la série de général

$$\sqrt{W_{2n}}$$

est convergente. Or, dans cette série, le rapport d'un terme au précédent a pour limite c; par conséquent, *si $c < 1$, les approximations successives convergeront*, et il y aura dans l'intervalle (a, b) des intégrales de l'équation restant toujours positives.

Si c est supérieur à l'unité, la série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

ne peut converger uniformément dans l'intervalle (a, b). Car autrement, puisque

$$W_n = \int_a^b A(x) u_n(x)\, dx,$$

la série

$$W_1 + \ldots + W_n + \ldots$$

serait convergente, ce qui n'est pas, puisque le rapport $\frac{W_{n+1}}{W_n}$ a c pour limite.

7. Chacun des quotients

$$\frac{c_n}{c}$$

étant plus petit que *un*, le produit

$$\lambda_n = \frac{c_1}{c}\,\frac{c_2}{c} \cdots \frac{c_n}{c}$$

décroît avec n et tend, par suite, vers une limite pour $n = \infty$.

Cette limite sera différente de zéro; on a, en effet,

$$W_{2n} = \int_a^b A(x) u_n^2(x)\, dx,$$

ce que l'on peut écrire

$$\int_a^b A(x) \frac{u_n(x)}{\sqrt{W_{2n}}} \frac{u_n(x)}{\sqrt{W_{2n}}}\, dx = 1,$$

et comme

$$\frac{u_n(x)}{\sqrt{W_{2n}}} < K,$$

on conclut

$$\int_a^b A(x) \frac{u_n(x)}{\sqrt{W_{2n}}}\, dx > \frac{1}{K},$$

ce qui n'est autre chose que l'inégalité

$$\frac{W_n}{\sqrt{W_{2n}}} > \frac{1}{K} \quad \text{ou} \quad \frac{W_n^2}{W_{2n}} > \frac{1}{K^2}$$

Or $W_n = c_1 c_2 \ldots c_n W_0$; donc

$$\frac{W_n^2}{W_{2n}} = W_0 \frac{c_1^2}{c_1 c_2} \frac{c_2^2}{c_3 c_4} \cdots \frac{c_n^2}{c_{2n-1} c_{2n}};$$

par conséquent, le quotient $\frac{W_n^2}{W_{2n}}$ décroît avec n; il a donc, puisqu'il est supérieur à $\frac{1}{K^2}$, une limite *différente de zéro*. Il en résulte encore que le produit

$$(\alpha) \qquad \frac{c_1}{c_2} \frac{c_2}{c_4} \cdots \frac{c_n}{c_{2n}}$$

a une limite différente de zéro, puisque $\frac{c_n}{c_{2n-1}} < 1$. Or on a

$$\frac{c_1}{c} = \frac{c_1}{c_2} \frac{c_2}{c_4} \frac{c_4}{c_8} \cdots,$$

$$\frac{c_3}{c} = \frac{c_3}{c_6} \frac{c_6}{c_{12}} \cdots,$$

$$\frac{c_5}{c} = \frac{c_5}{c_{10}} \frac{c_{10}}{c_{20}} \cdots$$

et, par suite, le produit

$$\frac{c_1}{c} \frac{c_3}{c} \frac{c_5}{c} \cdots$$

a pour limite la limite de l'expression (α), c'est-à-dire une expression différente de zéro. Il en sera alors évidemment de même de

$$\frac{c_2}{c} \frac{c_4}{c} \frac{c_6}{c} \cdots$$

et, par suite, de λ_n, comme nous voulions l'établir.

8. Nous allons montrer que

$$\frac{u_n}{c^n}$$

a une limite différente de zéro, quand n augmente indéfiniment.

Soit

$$u'_n = \frac{u_n}{c^n}$$

et posons

$$W'_n = \int_a^b A(x) u'_n \, dx,$$

on aura évidemment

$$W'_n = \frac{W_n}{c^n} = W_0 \frac{c_1}{c} \cdots \frac{c_n}{c}.$$

Par suite, d'après le paragraphe précédent, on est assuré que W'_n *a une limite pour* $n = \infty$.

On a

$$\int_a^b A(x)(u'_n - u'_{n+k})^2 \, dx = W'_{2n} - 2W'_{2n+k} + W'_{2n+2k}.$$

Puisque W'_n tend vers une limite, il est certain que le second membre est inférieur à toute quantité donnée à l'avance, si n est suffisamment grand. Or on a

$$\int_a^b A(x)^2 (u'_n - u'_{n+k})^2 \, dx < M \int_a^b A(x)(u'_n - u'_{n+k})^2 \, dx,$$

M désignant le maximum de $A(x)$; par suite, l'intégrale du premier membre est aussi très petite, pour n suffisamment grand. Enfin, de l'inégalité analogue à celle que nous avons déjà considérée

$$\int_a^b [\alpha A(x)(u'_n - u'_{n+k}) + \beta(b - x)]^2 \, dx > 0,$$

on conclut

$$\left| \int_a^b A(x)(u_n - u'_{n+k})(b - x) \, dx \right|^2$$
$$< \int_a^b A^2(x)(u'_n - u'_{n+k})^2 \, dx \int_a^b (b - x)^2 \, dx.$$

Or le premier membre de cette inégalité est supérieur (§ 5) à la valeur absolue de

$$c[u'_{n+1}(x) - u'_{n+k+1}(x)]^2$$

pour toute valeur de x comprise entre a et b. Par suite, on peut

trouver une valeur de n telle qu'à partir de cette valeur, on ait

$$|u'_{n+1}(x) - u'_{n+k+1}(x)| < \varepsilon,$$

ε étant une quantité donnée à l'avance aussi petite que l'on voudra. *L'existence de la limite de $u'_n(x)$ est ainsi établie.*

La fonction $u'_n(x)$ converge, d'après ce qui précède, uniformément vers sa limite u'. Il est essentiel de remarquer que *$u'(x)$ n'est pas identiquement nulle.* On a, en effet,

$$W'_n = \int_a^b A(x) u'_n \, dx.$$

Or nous avons vu que la limite de la constante W'_n était différente de zéro; donc *la limite de u'_n ne peut être nulle.* La limite $u'(x)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 u'}{dx^2} + \frac{1}{c} A(x) u' = 0,$$

et elle s'annule aux deux extrémités de (a, b).

9. Une remarque importante est à faire sur la quantité c, qui a joué un rôle si important dans ce qui précède. Considérons les expressions

$$J_0(u) = \int_a^b A(x) u^2 \, dx, \qquad J_1(u) = \int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx,$$

où u désigne une fonction quelconque continue, ainsi que $\frac{du}{dx}$, dans l'intervalle (a, b), et *s'annulant* aux deux extrémités de l'intervalle. Soit, d'autre part, la série

$$u_0 + u_1 k + u_2 k^2 + \ldots + u_n k^n + \ldots,$$

ordonnée suivant les puissances de la constante k. Puisque $\frac{u_n}{c^n}$ a une limite déterminée différente de zéro, le rapport d'un terme au précédent a pour limite

$$ck,$$

et la série précédente sera convergente tant que

$$k < \frac{1}{c}.$$

Désignons par U la limite de cette série; c'est une fonction de x prenant pour $x = a$ et pour $x = b$ les valeurs un, et qui satisfait à l'équation

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + k A(x) U = 0.$$

Or, partant de l'identité

$$\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{U}\frac{dU}{dx}\right)^2 + \frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{U}\frac{dU}{dx}\right) - \frac{u^2}{U}\left[\frac{d^2 U}{dx^2} + k A(x) U\right] = \left(\frac{du}{dx}\right)^2 - k A(x) u^2,$$

on aura de suite

$$\int_a^b \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - k A(x) u^2\right] dx = \int_a^b \left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{U}\frac{dU}{dx}\right)^2 dx$$

et, par conséquent,

$$J_1 - k J_0 > 0.$$

Le quotient $\frac{J_1(u)}{J_0(u)}$ est donc, quelle que soit la fonction u satisfaisant aux conditions indiquées, supérieure à toute quantité k inférieure à $\frac{1}{c}$. Ce quotient *ne peut donc prendre une valeur plus petite que* $\frac{1}{c}$. Cherchons la valeur de

$$\frac{J_1(u')}{J_0(u')},$$

u' étant la fonction du paragraphe 8, qui s'annule pour a et b et satisfait à l'équation

$$\frac{d^2 u'}{dx^2} + \frac{1}{c} A(x) u' = 0.$$

L'identité

$$\left(\frac{du'}{dx}\right)^2 - \frac{A(x)}{c} u'^2 = \frac{d}{dx}\left(u' \frac{du'}{dx}\right) - u'\left[\frac{d^2 u'}{dx^2} + \frac{1}{c} A(x) u'\right]$$

donne immédiatement

$$J_1(u') - \frac{1}{c} J_0(u') = 0;$$

le *minimum* $\frac{1}{c}$ du quotient

$$\frac{J_1(u)}{J_0(u)}$$

est donc atteint pour $u = u'$.

10. On pourrait se poser, au point de vue du calcul des variations, le problème de rechercher la fonction u s'annulant en a et b et rendant minima le quotient

$$\frac{J_1(u)}{J_0(u)}.$$

Quand on applique la méthode des variations, du moins si on laisse de côté des *travaux tout récents*, on suppose que le minimum est atteint, les questions d'existence de fonctions réalisant effectivement le minimum étant laissées de côté. Soit donc une fonction u, s'annulant en a et b et rendant minimum le quotient précédent. Soit m ce minimum.

Nous avons à écrire que la variation du quotient est nulle, ce qui nous donne

$$J_0(u)\delta J_1(u) - J_1(u)\delta J_0(u) = 0$$

ou

$$\delta J_1(u) - m\,\delta J_0(u) = 0.$$

Or

$$\delta J_0(u) = 2\int_a^b A(x)u\,\delta u\,dx,$$

$$\delta J_1(u) = \int_a^b \delta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = 2\int_a^b \frac{du}{dx}\,\delta\left(\frac{du}{dx}\right) dx$$

$$= 2\int_a^b \frac{du}{dx}\,\frac{d\,\delta u}{dx}\,dx = -2\int_a^b \frac{d^2u}{dx^2}\,\delta u\,dx.$$

On a donc

$$\int_a^b \left[\frac{d^2u}{dx^2} + m\,A(x)u\right]\delta u\,dx = 0,$$

d'où il résulte que la fonction u, satisfaisant aux conditions indiquées, vérifie l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + m\,A(x)u = 0.$$

Ce résultat est bien d'accord avec ce que nous avons obtenu plus haut.

11. Nous avons, dans ce qui précède, considéré un intervalle fixe (a, b). Supposons maintenant que, a restant fixe, on fasse varier $b (b > a)$. La fonction $A(x)$ restera, bien entendu, positive

pour toute valeur de x à partir de a, pour laquelle nous aurons à la considérer.

Un premier point à peu près évident est que la limite c croît avec l'intervalle (a, b). On peut, en effet, définir c comme la limite de

$$\sqrt[n]{W_n},$$

d'après un théorème élémentaire sur les suites. Or

$$W_n = \int_a^b A(x) u_n \, dx.$$

Soit $b_1 > b$; on aura

$$W_n^1 = \int_a^{b_1} A(x) u_n^1 \, dx.$$

Or, de a à b, on a nécessairement

$$u_n^1 > u_n,$$

comme on le voit de proche en proche à partir de $u_0^1 = u_0 = 1$. La limite c_1, correspondant à l'intervalle (a, b_1), est donc supérieure à la limite c, correspondant à l'intervalle (a, b).

Or pour b, très voisin de a, on a évidemment c très voisin de zéro. Quand b s'éloigne de a, la limite c grandit. Tant que

$$c < 1,$$

les approximations successives convergent (§ 6), et une intégrale s'annulant pour a et b est identiquement nulle.

Quand, b continuant à s'éloigner de a, on a

$$c = 1,$$

nous arrivons au cas limite extrêmement intéressant. Nous avons alors *une fonction u', non identiquement nulle, s'annulant aux deux extrémités de l'intervalle (a, b) et satisfaisant à l'équation différentielle proposée*

$$\frac{d^2 u'}{dx^2} + A(x) u' = 0.$$

Quand, b continuant à croître, c devient plus grand que *un*, nous sommes assuré que les approximations successives ne convergent plus, et qu'il n'y a plus d'intégrales restant toujours positives dans (a, b).

Dans le cas particulier très simple où $A(x)$ se réduit à une constante A, on trouve immédiatement la longueur de l'intervalle minimum correspondant à une intégrale s'annulant aux deux extrémités. Soit l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Ay = 0 \qquad (A > 0):$$

l'intégrale générale étant

$$\beta \sin(x\sqrt{A} + \alpha),$$

l'intervalle cherché sera

$$\frac{\pi}{\sqrt{A}},$$

et nous avons l'intégrale $\sin(x\sqrt{A})$, restant positive de 0 à $\frac{\pi}{\sqrt{A}}$, et s'annulant pour ces deux valeurs.

12. Considérons une intégrale s'annulant pour $x = a$, et cherchons à la suivre quand x grandit à partir de a. Elle s'annulera la première fois pour la valeur $x = b$ dont nous venons de parler (pour laquelle $c = 1$). Arrivé à $x = b$, nous nous trouvons dans les mêmes conditions qu'au point de départ. L'origine des intervalles étant maintenant b, à ce point b correspondra un intervalle bb', pour lequel la limite c' sera égale à l'unité (il pourra, d'ailleurs, arriver que b' n'existe pas, la limite c' étant toujours inférieure à *un*, si grand qu'on prenne l'intervalle à partir de b). Notre intégrale aura donc la nouvelle racine à $x = b'$, et l'on continuera ainsi indéfiniment, si la fonction $A(x)$ est définie pour toute valeur de x. On voit donc comment on pourra, de proche en proche, faire l'étude de l'intégrale.

II. — Introduction d'une constante arbitraire dans l'équation différentielle [1].

13. Nous allons considérer maintenant une équation différentielle linéaire du second ordre dépendant d'un paramètre arbitraire, et,

---

[1] J'ai résumé ce Chapitre dans une Note des *Comptes rendus : Sur les équations différentielles du second ordre renfermant un paramètre arbitraire* (19 février 1894).

pour nous rapprocher du cas étudié dans la Section précédente, prenons l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + kA(x)y = 0, \tag{1}$$

où $A(x)$ est une fonction *positive* dans l'intervalle (a, b) et k une constante. Nous pouvons former une intégrale de cette équation, prenant pour $x = a$, ainsi que sa dérivée $\frac{dy}{dx}$, des valeurs numériques arbitrairement données. Soit

$$y_1(x, k)$$

cette solution, qui dépend manifestement aussi de k, et qui, d'après un théorème général précédemment établi (Chap. V, § 2), est une fonction de k holomorphe pour toute valeur de k.

Envisageons de même une seconde solution

$$y_2(x, k),$$

qui correspond à un second système de valeurs numériques initiales de y et $\frac{dy}{dx}$. On suppose seulement que les systèmes de valeurs numériques ne soient pas, dans les deux cas, proportionnels, de manière que les deux solutions soient distinctes.

Une solution quelconque sera de la forme

$$\alpha y_1(x, k) + \beta y_2(x, k),$$

α et β étant des constantes arbitraires. Nous pouvons choisir α et β de manière que cette solution prenne, pour $x = a$ et $x = b$, des valeurs déterminées d'ailleurs arbitraires. Il n'y aura d'exception que si le déterminant des deux équations du premier degré est nul, c'est-à-dire si l'on a

$$y_1(a, k)y_2(b, k) - y_1(b, k)y_2(a, k) = 0. \tag{2}$$

Si k satisfait à cette relation, on pourra choisir α et β de telle sorte que la solution

$$\alpha y_1(x, k) + \beta y_2(x, k)$$

s'annule en a et b. *On aura donc, pour les valeurs de k satisfaisant à l'équation (2), une intégrale de l'équation (1) s'annulant en a et b, et qui n'est pas nulle identiquement.*

14. Le premier membre de l'équation (2) étant une fonction de k, holomorphe dans tout le plan, les racines ne pourront former qu'une suite *discontinue*.

Montrons que les racines de l'équation (2) ne peuvent être que des quantités positives. Nous allons voir en effet que, pour une valeur imaginaire ou négative de k, il ne peut y avoir d'intégrale s'annulant aux deux extrémités sans être nulle identiquement. La chose nous est connue pour les valeurs négatives (Chap. V, § 10). Quant à ce qui concerne les valeurs imaginaires, nous aurions, en posant

$$y = u_1 + iu_2, \qquad k = k' + ik'',$$
$$\frac{d^2(u_1+iu_2)}{dx^2} + (k'+ik'')\,A(x)(u_1+iu_2) = 0$$

et, par suite, on aurait

$$\frac{d^2u_1}{dx^2} + k'\,A(x)u_1 - k''\,A(x)u_2 = 0,$$
$$\frac{d^2u_2}{dx^2} + k'\,A(x)u_2 + k''\,A(x)u_1 = 0,$$

la solution (u_1, u_2) s'annulant en a et b. Ceci est impossible; car des deux équations précédentes on tire

$$\int_a^b k''\,A(x)(u_1^2+u_2^2)\,dx = 0;$$

u_1 et u_2 seraient donc identiquement nuls, si $k'' \neq 0$.

15. L'existence d'une suite indéfinie de quantités positives

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_n, \quad \ldots$$

(k_n augmentant indéfiniment avec n), pour lesquelles l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k_i\,A(x)y = 0$$

a une intégrale nulle aux deux extrémités de (a, b), sans être identiquement nulle, constitue un théorème important que nous allons démontrer.

16. Commençons par établir une proposition due à Sturm (*Jour-*

nal de Liouville, t. 1). Soient les deux équations

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y\,\varphi(x)=0, \qquad \frac{d^2z}{dx^2}+z\,\psi(x)=0,$$

où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont deux fonctions continues dans un certain intervalle. Soit dans cet intervalle

$$\varphi(x)\leqq\psi(x),$$

et supposons que x_0 et x_1 soient deux racines consécutives d'une intégrale $y(x)$ dans l'intervalle considéré. Nous allons voir, d'après Sturm, qu'*il y a au moins une racine de toute intégrale $z(x)$ de la seconde équation entre x_0 et x_1*.

Supposons, en effet, qu'il n'y en ait pas, et alors nous pouvons admettre que, entre x_0 et x_1, les deux fonctions y et z soient positives. On a

$$z\frac{d^2y}{dx^2}-y\frac{d^2z}{dx^2}=zy[\psi(x)-\varphi(x)],$$

et, par suite, en intégrant,

$$\left(z\frac{dy}{dx}-y\frac{dz}{dx}\right)_{x_0}^{x_1}=\int_{x_0}^{x_1}yz[\psi(x)-\varphi(x)]\,dx.$$

Le second membre est positif; on a donc

$$z_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_1-z_0\left(\frac{dy}{dx}\right)_0>0.$$

Or, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ ne peut être négatif, tandis que $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$ ne peut être positif, et comme d'ailleurs z_1 et z_0 ne sont pas négatifs, il est impossible que l'inégalité précédente soit vérifiée.

Nous avons supposé que $\psi(x)$ n'était pas identique à $\varphi(x)$. La même conclusion subsiste quand $\varphi(x)=\psi(x)$, c'est-à-dire que *pour l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y\,\varphi(x)=0,$$

les racines d'une intégrale séparent les racines de toute autre intégrale de la même équation différentielle.

Ajoutons encore, pour le cas où $\varphi(x)$ n'est pas constamment égale à $\psi(x)$, que si x_0 est une racine commune aux intégrales y

et z, z aura au moins une racine entre x_0 et x_1, *à l'exclusion de x_1*, car autrement z aurait toujours le même signe entre x_0 et x_1 (soit le signe *plus* comme y), et l'on aurait l'inégalité

$$z_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 > 0 \qquad \text{(égalité exclue)},$$

résultat inadmissible, puisque z_1 n'est pas négatif, et que $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$ n'est pas positif.

17. Du théorème de Sturm, on peut déduire de nombreuses conséquences. Envisageons l'équation

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + A(x)y = 0,$$

en supposant que, à partir d'une certaine valeur de x, soit $x = 0$, la fonction $A(x)$ soit continue pour toute valeur finie de x, et que l'on ait pour toute valeur positive de x

$$A(x) > a,$$

a étant une constante positive. Je dis que dans ce cas l'équation

$$y(x) = 0,$$

$y(x)$ étant une intégrale quelconque de (E), a une *infinité de racines positives*. Comparons, en effet, l'équation (E) à l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} + az = 0.$$

Cette dernière équation admet l'intégrale générale

$$z = A\cos(\sqrt{a}.x) + B\sin(\sqrt{a}.x).$$

Donc, l'équation $z = 0$ a une infinité de racines, et il en est, par suite, de même de l'équation $y = 0$, d'après le théorème de Sturm.

18. Revenons maintenant au théorème énoncé au paragraphe 15. Tout d'abord, le premier terme de la suite que nous désignons par k_1 a été déjà considéré dans la Section précédente; il est l'inverse de la quantité c, qui a joué dans cette Section un rôle si important. En

effet, tant que l'on a

$$k < \frac{1}{c},$$

les approximations successives convergent dans l'intervalle (a, b) pour l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k\,\mathrm{A}(x)y = 0,$$

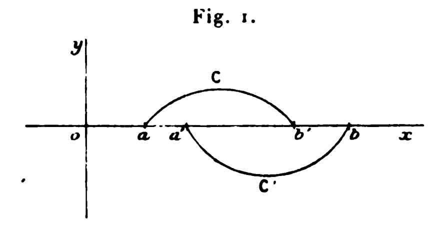
et il n'y a pas d'intégrale nulle aux deux extrémités de l'intervalle (sauf *zéro*). Nous savons, au contraire, que pour

$$k_1 = \frac{1}{c}$$

il y aura une telle intégrale.

Faisons maintenant croître k à partir de k_1 (*fig.* 1); nous aurons

Fig. 1.



une intégrale telle que aCb' s'annulant en a et b', ce dernier point étant à gauche de b, et une intégrale $bC'a'$ s'annulant en b et en a', comme il résulte de la remarque faite à la fin du paragraphe 16. Comme ces intégrales ne sont déterminées qu'à un facteur près, je puis figurer l'une au-dessus de Ox, l'autre au-dessous. Continuons à faire croître k; a' marche vers la droite et b' vers la gauche, toujours d'après la même remarque. A un certain moment ils coïncideront en un point α, et, comme les intégrales dessinées ne sont déterminées qu'à un facteur près, on peut les choisir de telle sorte qu'elles se raccordent en leur point commun; on voit bien nettement qu'il doit y avoir coïncidence de a' et b' pour une certaine valeur finie de k, car, s'il en était autrement, il y aurait, quelque grand que soit k, un intervalle fini I ayant toujours a' à sa gauche et b' à sa droite. On aurait alors une intégrale de l'équation proposée positive dans l'intervalle I, quel que soit k. Or, cela est impossible; en effet, si grand

que soit le nombre M, on peut choisir k de manière que

$$kA(x) > M.$$

Mais l'équation

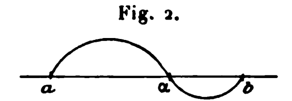
$$\frac{d^2y}{dx^2} + My = 0$$

a pour intégrale particulière

$$y = \sin(x\sqrt{M}),$$

et cette intégrale, pour M assez grand, a plusieurs racines dans l'intervalle I. Donc, d'après le théorème de Sturm, toute intégrale de notre équation initiale aurait des racines dans I, ce qui est contradictoire. On aura alors la figure 2, et les deux courbes dessinées cor-

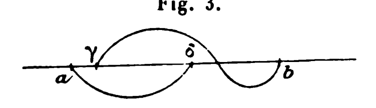
Fig. 2.



respondent à une même intégrale. Nous concevons donc ainsi l'existence de la seconde valeur de k_2 pour laquelle il y aura une intégrale nulle en a et b; cette intégrale s'annule une fois entre a et b.

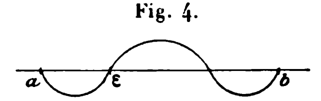
On continuera à raisonner de la sorte, se reportant toujours au théorème de Sturm. On aura, k étant un peu supérieur à k_2, le dessin suivant d'intégrales (*fig.* 3) : le point γ marchera vers la

Fig. 3.



droite et δ vers la gauche à mesure que k grandira, et pour une certaine valeur de k, soit k_3, on aura la figure 4, et l'on peut choisir

Fig. 4.



la constante dans l'intégrale partant de b (de b en ε) et dans l'intégrale partant de a (de a en ε) de manière à avoir, par l'ensemble des deux, une seule intégrale. Nous arrivons donc ainsi à une valeur k_3 pour laquelle il y a une intégrale nulle en a et b; cette intégrale

s'annule deux fois entre a et b. On continuera ainsi indéfiniment, et l'on démontre ainsi l'existence d'une suite

$$(\Sigma) \qquad k_1, \ k_2, \ \ldots, \ k_n$$

de nombres grandissant indéfiniment, et correspondant aux valeurs de k pour lesquelles l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k\,A(x)y = 0$$

a une intégrale nulle en a et b. Il est clair que k_n augmente indéfiniment avec n, car les intervalles $a\alpha$, $a\varepsilon$, ... vont en diminuant indéfiniment. D'ailleurs, ces nombres étant les racines de l'équation transcendante (2) dont le premier membre est une fonction entière de k ne peuvent avoir pour point limite un point à distance finie. Du raisonnement ci-dessus, il résulte que l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k_n\,A(x)y = 0$$

admet une intégrale Cy_n *s'annulant en a et b, et $n - 1$ fois entre a et b.*

19. Faisons une remarque importante relative à la rapidité de la croissance des quantités k_n. Soit

$$A(x) < M.$$

Si l'on considère l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k'My = 0,$$

on a

$$k'_n = \frac{n^2\pi^2}{M(b-a)^2}.$$

Or, considérons les deux équations

$$(E') \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + k'_n My = 0,$$

$$(E) \qquad \frac{d^2y_n}{dx^2} + k_n\,A(x)y_n = 0.$$

Je dis que l'on ne peut avoir

$$k_n < k'_n,$$

car alors on aurait

$$k_n \mathrm{A}(x) < k'_n \mathrm{M}.$$

L'équation (E) admet une intégrale ayant $n+1$ racines entre a et b (y compris a et b), ce qui donne n intervalles. Donc, toute intégrale de (E') aura au moins n racines entre a et b (à l'exclusion des valeurs extrêmes), ce qui n'est pas puisqu'il y en a une qui en a seulement $n-1$. *Il en résulte que l'on a nécessairement*

$$k_n > \mu n^2,$$

μ étant un nombre fixe indépendant de n.

20. Ceci posé, envisageons l'intégrale u de l'équation (1) prenant en a et b des valeurs numériques A et B données d'ailleurs arbitrairement. Nous regarderons l'intégrale *u comme fonction de k*; cette fonction de k sera évidemment uniforme dans le plan de la variable complexe k et *elle aura pour pôles les termes de la suite* (Σ).

Nous allons montrer que ces pôles sont des pôles simples.

Écrivons l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k_i \mathrm{A}(x)y = 0.$$

Elle admet une intégrale y_0 s'annulant en a et b, et soit Y_0 une seconde intégrale distincte de la première et, par suite, ne s'annulant pas pour $x=a$. Soit maintenant l'équation

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + (k_i+\mu)\mathrm{A}(x)y = 0.$$

Cette équation admet deux intégrales y et Y prenant respectivement, pour $x=a$, ainsi que leurs dérivées premières, les mêmes valeurs que y_0 et Y_0, et leurs dérivées premières. D'après le théorème général, déjà plusieurs fois appliqué, ces intégrales seront des fonctions *entières* de μ, et l'on aura le développement

$$(4) \qquad y = y_0 + y_1\mu + \ldots, \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{Y}_0 + \mathrm{Y}_1\mu + \ldots,$$

$y_1, y_2, \ldots, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \ldots$ s'annulant nécessairement pour $x=a$.

Une intégrale u de (3) est de la forme

$$u = \alpha y + \beta \mathrm{Y}.$$

Cherchons à déterminer les constantes α et β de manière que cette intégrale prenne pour a et b les valeurs A et B. On a les deux équations

$$\beta Y_0(a) = A, \qquad \alpha[y_1(b)\mu + \ldots] + \beta[Y_0(b) + \ldots] = B.$$

On voit donc que β est une constante par rapport à μ et que α admet le pôle $\mu = 0$. Ce pôle sera simple si l'on a

$$y_1(b) \neq 0.$$

Nous allons établir qu'il en est bien ainsi. On a les deux équations

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} + k_i A(x) y_0 = 0,$$

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + k_i A(x) y_1 + A(x) y_0 = 0,$$

obtenues en substituant dans (3) les développements (4). Or, des deux équations précédentes, on conclut

$$\int_a^b \left(y_1 \frac{d^2 y_0}{dx^2} - y_0 \frac{d^2 y_1}{dx^2} \right) dx = \int_a^b A(x) y_0^2 \, dx.$$

La première intégrale s'effectue immédiatement; elle serait nulle si l'on avait $y_1(b) = 0$, et l'on serait alors conduit à une absurdité. Nous arrivons donc à la conclusion que *k_i est un pôle simple de u.*

21. Nous arrivons maintenant au calcul des quantités k_i. Tant que k sera inférieur à k_1, on aura pour u le développement

$$u = u_0 + u_1 k + \ldots + u_n k^n + \ldots,$$

u_0 prenant en a et b les valeurs A et B et les autres u s'annulant aux deux extrémités de l'intervalle. Ces divers coefficients sont des fonctions de x déterminés de proche en proche par les équations

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2 u_1}{dx^2} + A(x) u_0 = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^2 u_n}{dx^2} + A(x) u_{n-1} = 0, \qquad \ldots.$$

Formons les constantes

$$U_n = \int_a^b u_0(x) u_n(x) A(x) \, dx,$$

qui présentent la plus grande analogie avec les quantités W_n considérées au paragraphe 3 de ce Chapitre. Dans ce cas, u_0 se réduisait à l'unité, tandis qu'ici u_0 dépend de x et peut être de signe variable. Quoique u_0 et u_n ne soient pas nécessairement d'un signe invariable dans (a, b), toutes les constantes U_n sont positives; on le voit de suite en remarquant que

$$U_{2n} = \int_a^b A(x) u_n^2 \, dx \quad \text{et} \quad U_{2n+1} = \int_a^b \left(\frac{du_{n+1}}{dx}\right)^2 dx,$$

et l'on a aussi

$$U_{m+n} = \int_a^b u_m u_n A(x) \, dx = \int_a^b \frac{du_m}{dx} \frac{du_{n+1}}{dx} dx,$$

la dernière égalité supposant $m \neq 0$.

On établira, comme au paragraphe 4 de ce Chapitre, les inégalités

$$\frac{U_1}{U_0} < \frac{U_2}{U_1} < \ldots < \frac{U_n}{U_{n-1}} < \ldots;$$

mais, arrivé à ce point, nous devons modifier un peu les raisonnements. Il est clair que $\frac{U_n}{U_{n-1}}$ doit tendre vers une limite; sinon ce quotient grandirait indéfiniment avec n, et la série

$$U_0 + U_1 k + \ldots + U_n k^n + \ldots$$

ne serait convergente pour aucune valeur de k; or, cette série est égale à

$$\int_a^b u_0(u_0 + u_1 k + \ldots + u_n k^n + \ldots) A(x) \, dx,$$

qui a un sens déterminé pour $k < k_1$. La limite de $\frac{U_n}{U_{n-1}}$ est donc au plus égale à $\frac{1}{k_1}$.

D'autre part, nous pouvons, comme au paragraphe 5, comparer

$$|u_n| \quad \text{à} \quad \sqrt{U_{2n}}.$$

La relation

$$\frac{d^2 u_n}{dx^2} + A(x) u_{n-1} = 0$$

donne pour u_n une somme de deux intégrales et, si l'on écrit l'équa-

tion

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} + A(x) | u_{n-1} | = 0,$$

on aura

$$| u_n | < \lambda,$$

les conditions aux limites étant *zéro* pour λ. Il en résulte, d'après le paragraphe 5, que

$$| u_n(x) | < \int_a^b A(z) | u_{n-1}(z) | (b - z) \, dz.$$

Le reste de l'analyse de ce paragraphe est alors applicable, et l'on aura

$$| u_n(x) | < K.\sqrt{U_{2n}},$$

K étant un nombre fixe. Il résulte de là et de ce qui précède, que les deux séries

$$u_0 + u_1 k + \ldots + u_n k^n + \ldots,$$
$$U_0 + U_1 k + \ldots + U_n k^n + \ldots$$

ont même cercle de convergence; donc

$$\lim \frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{1}{k_1} \qquad (\text{pour } n = \infty).$$

22. Nous allons maintenant calculer k_2. Puisque k_1 est un pôle simple de u, nous pouvons écrire

$$u = \frac{u'}{1 - \frac{k}{k_1}} + v_0 + v_1 k + \ldots + v_n k^n + \ldots,$$

la série du second membre étant convergente jusqu'à $k = k_2$. La comparaison de ce développement avec

$$u = u_0 + u_1 k + \ldots + u_n k^n + \ldots$$

donne

$$u_n = v_n + \frac{u'}{k_1^n}$$

et, par suite,

$$u' = \lim_{n=\infty} (u_n k_1^n),$$

car $\lim_{n=\infty} (v_n k_1^n)$ est nécessairement nulle. Nous pouvons donc regarder

u' comme connu et, par suite, les v. Ces dernières fonctions satisfont au système d'équations, résultant immédiatement du système auquel satisfont les u, et de l'équation

$$\frac{d^2 u'}{dx^2} + k_1 A(x) u' = 0,$$

à savoir :

$$\frac{d^2 v_0}{dx^2} + k_1 A(x) u' = 0,$$

$$\frac{d^2 v_1}{dx^2} + A(x) v_0 \quad = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{d^2 v_n}{dx^2} + A(x) v_{n-1} = 0.$$

Tous les v, sauf v_0, sont nuls en a et b, et v_0 prend en a et b les valeurs A et B.

Nous formerons alors la suite des quantités

$$V_n = \int_a^b v_0(x)\, v_n(x)\, A(x)\, dx,$$

et, sans rien changer à l'ensemble des raisonnements, on démontre que

$$\lim_{n=\infty} \frac{V_n}{V_{n-1}} = \frac{1}{k_2}.$$

Nous calculons donc ainsi la *seconde* valeur singulière k_2.

23. On peut continuer ainsi indéfiniment. On aura

$$v_0 + v_1 k + \dots + v_n k^n + \dots = \frac{v'}{1 - \frac{k}{k_2}} + w_0 + w_1 k + \dots + w_n k^n + \dots,$$

la série du second membre étant convergente jusqu'à $k = k_3$. On obtiendra v' par la formule

$$v' = \lim_{n=\infty} (v_n k_2^n),$$

et les constantes

$$W_n = \int_a^b w_0(x)\, w_n(x)\, A(x)\, dx$$

conduiront à la *troisième* valeur k_3, et ainsi de suite.

Nous avons donc obtenu le résultat que nous avions en vue. *Les valeurs singulières k_i peuvent être obtenues de proche en proche par un calcul régulier, ainsi que les intégrales nulles aux deux extrémités de (a, b) correspondant à ces valeurs singulières.*

24. Nous avons, au paragraphe 10, montré comment des questions de minimum pouvaient s'introduire dans les problèmes que nous traitons. D'après ce qui précède, nous avons pour l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k_n \mathrm{A}(x)y = 0,$$

une intégrale $\mathrm{C}y_n$ (C étant une constante arbitraire) s'annulant en a et b.

Il a été vu (§ 10) que, pour toutes les fonctions continues entre a et b, ainsi que $\frac{du}{dx}$ et s'annulant pour a et b, le quotient

$$(\alpha) \qquad \frac{\displaystyle\int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx}{\displaystyle\int_a^b \mathrm{A}(x)u^2\,dx}$$

a pour minimum k_1, qu'il atteint pour $u = y_1$.

D'une manière plus générale, pour toutes les fonctions $u(x)$ s'annulant en a et b, et satisfaisant aux relations

$$\int_a^b \mathrm{A}(x)\,u(x)y_i(x)\,dx = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

le minimum de (α) *a lieu pour*

$$u(x) = y_{m+1}.$$

Nous énoncerons seulement ce résultat.

25. Nous nous sommes borné, dans ce Chapitre, à une équation particulière pour avoir des résultats très simples. On pourrait, d'une manière plus générale, considérer une équation

$$(5) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + [k\,\mathrm{A}(x) + \mathrm{A}_1(x)]\frac{dy}{dx} + [k\,\mathrm{B}(x) + \mathrm{B}_1(x)]y = 0,$$

les A et B étant continues dans un intervalle (a, b).

Il n'y a, pour cette équation, d'intégrale s'annulant aux deux extrémités de l'intervalle, sans être identiquement nulle, que pour une suite discontinue de valeurs de k, racines d'une équation

$$G(k) = 0, \tag{6}$$

$G(k)$ désignant une fonction entière.

L'intégrale de l'équation (5), prenant en a et b des valeurs données, *est une fonction uniforme de k dans tout le plan de cette variable et ayant pour pôles les racines de l'équation* (6). La démonstration de cette proposition peut se faire par la même voie que pour l'équation spéciale sur laquelle nous venons de nous arrêter. Nous aurons d'ailleurs à revenir sur des questions de cette nature, qui se rencontrent fréquemment en Physique mathématique.

CHAPITRE VII.

ÉTUDE DE QUELQUES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES.

I. — Discussion des intégrales passant par deux points pour une classe d'équations du second ordre.

1. Les conditions d'application de la méthode des approximations successives sont très diverses suivant les classes particulières d'équations qu'on étudie. Considérons ici l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x, y) = 0 \tag{1}$$

et supposons que, x étant dans un certain intervalle, la fonction $f(x, y)$, définie pour toute valeur de y, *croisse constamment avec y et que l'on ait identiquement*

$$f(x, 0) = 0.$$

Il est clair que, dans ces conditions, $f(x, y)$ sera positif quand y sera lui-même positif. Nous allons supposer, de plus, que la dérivée toujours positive

$$f'_y(x, y)$$

décroît quand y augmente.

Ces hypothèses faites, admettons qu'il existe une intégrale y de l'équation (1), restant toujours positive (et non nulle) lorsque x varie entre 0 et b, et ne s'annulant pas pour les valeurs extrêmes. Nous allons montrer que cette intégrale peut certainement être obtenue par la méthode des approximations successives.

Partons à cet effet de la fonction y_0 satisfaisant à l'équation

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} = 0$$

et prenant aux limites les mêmes valeurs que y. Les équations successives

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + f(x, y_0) = 0,$$
$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + f(x, y_1) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d^2 y_n}{dx^2} + f(x, y_{n-1}) = 0$$

(y_n prenant les mêmes valeurs que y aux deux limites) montrent que

$$y_0 < y_1 < \ldots < y_n.$$

Il faut montrer que y_n a y pour limite. Or considérons le quotient

$$\frac{y - y_0}{y}.$$

D'après l'équation

$$\frac{d^2(y - y_0)}{dx^2} + f(x, y) = 0,$$

y est plus grand que y_0 et, par suite, le rapport précédent est plus petit que l'unité et n'atteint pas ce nombre : soit q son maximum; on a

$$q < 1.$$

Ceci posé, l'équation

$$\frac{d^2(y - y_1)}{dx^2} + f(x, y) - f(x, y_0) = 0$$

donne

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} y - y_1 = &\int_0^x z[f(z, y) - f(z, y_0)]\left[1 - \frac{x}{b}\right] dz \\ &+ \frac{x}{b}\int_x^b [f(z, y) - f(z, y_0)](b - z)\, dz, \end{aligned} \right.$$

en remplaçant, sous les signes d'intégration, dans y et y_0, x par z.

Mais nous pouvons écrire l'inégalité

$$\frac{f(z, y) - f(z, y_1)}{f(z, y) - f(z, y_0)} = \frac{f'_y(z, \xi_1)(y - y_1)}{f'_y(z, \xi_0)(y - y_0)} < \frac{y - y_1}{y - y_0},$$

car $\xi_1 > \xi_0$. Or, de l'égalité

$$y - y_0 = \int_0^x z f(z, y)\left(1 - \frac{x}{b}\right) dz + \frac{x}{b}\int_x^b f(z, y)(b - z)\, dz,$$

rapprochée de l'égalité (2) et de l'inégalité

$$\frac{f(z, y) - (z, y_0)}{f(z, y)} = \frac{f'_y(z, \zeta_1)(y - y_0)}{f'_y(z, \zeta_2) y} > \frac{y - y_0}{y} < q,$$

on conclut

$$\frac{y - y_1}{y - y_0} < q.$$

On aura de la même manière

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} < q,$$

et ainsi indéfiniment

$$\frac{y - y_n}{y - y_{n-1}} < q.$$

De ces inégalités on déduit

$$y - y_n < y q^{n+1}.$$

Cette inégalité établit bien que y_n converge uniformément vers y. C'est ce que nous voulions établir.

2. Nous avons maintenant à rechercher les intervalles dans lesquels on peut être assuré d'avoir une intégrale toujours positive, et chercher en particulier s'il est possible d'avoir une intégrale s'annulant aux extrémités d'un intervalle, sans être identiquement nulle. Nous avons dit que la dérivée toujours positive

$$f'_y(x, y)$$

va constamment en décroissant quand y augmente, lorsque x a une valeur fixe quelconque dans un certain intervalle. Pour $y = \infty$, cette fonction aura une valeur déterminée; posons

$$f'_y(x, 0) = P(x),$$
$$f'_y(x, \infty) = Q(x),$$

on aura donc

$$P(x) > Q(x),$$

$Q(x)$ pouvant être identiquement nulle.

3. Avant d'aller plus loin, rappelons un théorème, obtenu au Chapitre précédent, sur les équations différentielles linéaires.

Étant donnée l'équation linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)y = 0, \tag{3}$$

où la fonction $P(x)$ est positive et définie pour un champ suffisamment grand de valeurs de x, il existe une quantité α, telle que, dans tout intervalle $(0, \alpha')$ où $\alpha' < \alpha$, une intégrale nulle aux deux extrémités est identiquement nulle. Pour l'intervalle $(0, \alpha)$, au contraire, il existe une intégrale s'annulant aux deux extrémités et qui n'est pas nulle identiquement. Dans l'intervalle $(0, \alpha')$, la méthode des approximations successives conduit à une série convergente.

Si l'on considère une seconde équation de même forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)y = 0, \tag{4}$$

à cette équation correspondra un intervalle $(0, \beta)$. Si l'on a

$$P(x) > Q(x),$$

on aura nécessairement

$$\alpha < \beta.$$

4. Ceci posé, revenons à l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x, y) = 0. \tag{E}$$

Proposons-nous de montrer qu'*il existe une intégrale* (*ne s'annulant pas identiquement*) *s'annulant*

$$\text{pour } x = 0 \quad \text{e pour} \quad = a,$$

a étant compris entre α *et* β.

Cette intégrale va nous être fournie par la méthode des approximations successives. Nous partons d'une fonction arbitraire, toujours positive, s'annulant pour 0 et pour a; nous allons montrer d'abord que la série des approximations successives est convergente. Considérons, à cet effet, une quantité positive ε assez grande pour qu'en posant

$$f'_y(x, \varepsilon) = R(x),$$

la quantité, analogue à la lettre α du numéro précédent et relative à l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + R(x)y = 0,$$

soit supérieure à a; ceci est possible puisque pour $\varepsilon = \infty$ la fonction $R(x)$ se réduit à $Q(x)$.

Ceci posé, cherchons l'intégrale de l'équation (E) prenant pour $x = 0$ et pour $x = a$ la valeur ε. La méthode des approximations successives nous fournira une suite de fonctions croissantes

$$y_0 = \varepsilon, \quad y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n, \quad \ldots.$$

Il est aisé de voir que cette suite a une limite. On a, en effet,

$$\frac{d^2(y_n - y_{n-1})}{dx^2} + f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-2}) = 0.$$

Or

$$f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-2}) < R(x)(y_{n-1} - y_{n-2}),$$

puisque y_{n-1} et y_{n-2} sont supérieurs à ε. Or la série des approximations successives converge pour l'équation linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} + R(x)y = 0.$$

Il en est donc *a fortiori* de même pour l'équation (E).

Nous venons de trouver l'intégrale de l'équation (E) prenant pour $x = 0$ et $x = a$ la valeur ε, ε étant une constante suffisamment grande. Nous voulons avoir l'intégrale de l'équation prenant la valeur zéro aux deux extrémités. Or partons d'une fonction s'annulant aux deux extrémités et inférieure à ε; puisque les approximations convergent dans le cas qui vient d'être examiné ci-dessus, elles convergent nécessairement encore dans le cas actuel.

Nous obtenons donc, par la méthode des approximations successives, une intégrale s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = a$.

Une objection importante se présente toutefois immédiatement: l'intégrale que nous venons de trouver n'est-elle pas identiquement nulle? Nous allons établir qu'il n'en est pas ainsi.

Montrons d'abord qu'on peut trouver une fonction continue y_0 de x, s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = a$, et telle que dans l'inter-

valle $(0, a)$,

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} + f(x, y_0) > 0.$$

Soit η une quantité positive et posons

$$f'_y(x, \eta) = R_1(x).$$

Nous pouvons prendre η de telle sorte que la quantité α_1, correspondant à l'équation linéaire

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + R_1(x) y = 0,$$

soit égale à a. Désignons alors par y_0 la fonction continue satisfaisant à cette dernière équation entre o et a et s'annulant pour ces deux valeurs; de plus, comme elle n'est déterminée qu'à un facteur près, nous la prenons telle qu'elle ne dépasse pas η. Nous avons ainsi une fonction continue parfaitement définie, telle que

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} + f(x, y_0) > 0;$$

nous allons la prendre pour commencer les approximations successives. La seconde fonction y_1 est déterminée par l'équation

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + f(x, y_0) = 0$$

et par la condition de s'annuler pour $x = 0$ et pour $x = a$. Il est facile de voir que

$$y_1 > y_0.$$

Si nous écrivons, en effet, $y_1 = y_0 + \lambda$, nous aurons

$$\frac{d^2 \lambda}{dx^2} + \frac{d^2 y_0}{dx^2} + f(x, y_0) = 0.$$

La somme des deux derniers termes est positive; λ s'annulant aux deux extrémités de l'intervalle $(0, a)$ sera donc positif dans cet intervalle. Nous aurons donc bien l'inégalité annoncée. Du moment que $y_1 > y_0$, on aura

$$y_2 > y_1,$$

et ainsi de suite. L'intégrale cherchée y sera donc supérieure à y_0, *elle ne sera pas identiquement nulle.*

En définitive, nous avons démontré dans ce paragraphe *qu'il existait une intégrale de l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x,y)=0,$$

s'annulant pour $x=0$ et pour $x=a$, et toujours positive dans cet intervalle.

5. *L'intégrale dont il vient d'être question est unique.* Ceci est une conséquence de l'analyse du n° 1. A la vérité, l'intégrale toujours positive y, que nous avons considérée dans ce numéro, ne s'annulait pas aux deux extrémités; le raisonnement subsiste sans modification si l'intégrale s'annule seulement à une des extrémités, soit pour $x=0$, et si l'on suppose, de plus, que $\frac{dy}{dx}$ ne soit pas infinie pour $x=0$. Il est évident d'ailleurs que $\frac{dy}{dx}$ ne sera pas nulle pour $x=0$, car autrement y serait identiquement nulle. Si nous prenons alors le rapport

$$\frac{y-y_0}{y}=1-\frac{y_0}{y}$$

du n° 1, ce rapport sera plus petit que l'unité, même pour $x=0$, car

$$\lim_{x=0}\left(\frac{y_0}{y}\right)=\frac{\tan\theta'}{\tan\theta},$$

θ et θ' désignant deux angles aigus différents de zéro et de $\frac{\pi}{2}$, et l'on a

$$\theta' \leqq \theta.$$

Si l'intégrale toujours positive y s'annule aux deux extrémités de l'intervalle, le raisonnement doit être modifié, car on ne peut faire les approximations successives en partant de la fonction y_0 satisfaisant à l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

On suppose que l'on parte de la fonction y_0 considérée à la fin du numéro précédent, pour laquelle

$$\frac{d^2y_0}{dx^2}+f(x,y_0)>0.$$

On peut, de plus, supposer que $y_0 < y$ (y_0 n'étant déterminé qu'à un facteur près).

Nous pouvons affirmer alors que l'expression

$$1 - \frac{y_0}{y}$$

reste moindre qu'un nombre q plus petit que l'unité, puisque, pour $x = 0$ et $x = a$, la limite de $\frac{y_0}{y}$ ne peut être nulle. Il n'y a plus alors qu'à raisonner comme au n° 1 pour voir que y_n a nécessairement une limite, et cette limite est y. *Cette intégrale y est donc unique.*

6. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que a était distinct des valeurs extrêmes α et β. Montrons que l'intégrale tend vers zéro quand a tend vers α. Nous allons raisonner comme au n° 4, quoique dans des circonstances un peu différentes. Nous pouvons prendre la constante ε assez petite pour que, ayant posé

$$f'_y(x, \varepsilon) = R(x),$$

l'intervalle α' dans lequel s'applique, pour l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - R(x) y = 0,$$

la méthode des approximations successives, soit aussi peu supérieur que l'on voudra à α. Choisissons alors a entre α et α'. D'après le n° 4, l'intégrale y de notre équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - f(x, y) = 0$$

est moindre que l'intégrale, prenant pour $x = 0$ et $x = a$ la valeur ε, et obtenue comme limite des approximations convergentes

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} - f(x, \varepsilon) = 0,$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} - f(x, y_1) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Or on voit que chacun de ces y est de l'ordre de ε, c'est-à-dire peut se mettre sous la forme du produit de ε par une fonction restant finie; notre intégrale y est donc elle-même de l'ordre de ε; comme

on peut faire tendre ε vers zéro à mesure que a se rapproche de plus en plus de α, il en résulte que l'intégrale y tend vers zéro, comme nous l'avons annoncé.

Supposons maintenant que a tende vers β. Nous aurons recours alors à la seconde partie du raisonnement du nº 4. Puisque a est très voisin de β, nous pouvons prendre la quantité η extrêmement grande. Supposons de plus que le maximum de la fonction y_0 soit précisément η, ce que nous pouvons toujours réaliser, puisque y_0 n'est déterminé qu'à un facteur près. Dans ces conditions, notre intégrale atteindra certainement une valeur supérieure à η. Comme η est aussi grand que l'on veut, si a est suffisamment rapproché de β, on voit qu'il n'y a pas d'intégrale continue (sauf $y = 0$) s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = \beta$. Pour une valeur fixe quelconque de x (distincte de o et a) la valeur de l'intégrale y de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x, y) = 0,$$

s'annnulant pour o et pour a, augmente indéfiniment quand a tend vers β. Il résulte encore de ces considérations que, pour l'intégrale y correspondant à a, la valeur de la dérivée $\frac{dy}{dx}$ pour $x = 0$ varie d'une manière continue de zéro à l'infini quand a varie de α à β.

7. Dans tout ce qui précède nous n'avons étudié que les intégrales restant toujours positives (ou nulles). Pour étudier d'autres intégrales, il est évidemment nécessaire de faire des hypothèses sur la nature de la fonction $f(x, y)$ et de ses dérivées pour y négatif. Supposons encore que cette fonction, qui s'annule pour $y = 0$, croisse toujours en même temps que y, et que la dérivée

$$f'_y(x, y),$$

toujours positive, ait un maximum pour $y = 0$ et n'ait ni minimum ni autre maximum. On pourra alors étudier toutes les intégrales de l'équation. Faisons seulement, pour le moment, la remarque que l'intégrale étudiée aux nºˢ 4 et 5, et qui s'annule pour $x = 0$ et pour $x = a$, ne sera pas nécessairement unique si l'on ne la suppose pas toujours positive dans l'intervalle (o, a). D'une manière plus générale, *une intégrale n'est pas nécessairement déterminée d'une*

manière unique dans l'intervalle (o, a) *par ses valeurs initiale et finale;* nous allons toutefois montrer qu'il en sera nécessairement ainsi dans le cas où

$$a < \alpha.$$

Soient, en effet, y et z deux intégrales supposées distinctes satisfaisant aux mêmes conditions. On aura

$$\frac{d^2(y-z)}{dx^2} + f(x, y) - f(x, z) = 0$$

ou

$$\frac{d^2(y-z)}{dx^2} + (y-z) f'_y(x, \lambda) = 0,$$

λ étant compris entre y et z. Or, on a

$$f'_y(x, \lambda) < f'_y(x, 0) = P(x).$$

Il en résulte que l'intervalle, partant de zéro, dans lequel une intégrale s'annulant aux deux extrémités est identiquement nulle, est plus grand pour l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + f'_y(x, \lambda) u = 0$$

que pour l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + P(x) u = 0.$$

Il est dès lors évident que les deux intégrales coïncident (¹).

II. — Quelques cas particuliers. Exemples de solutions périodiques.

8. Reprenons l'équation

$$(E) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + f(x, y) = 0,$$

en faisant les mêmes hypothèses que dans la Section précédente. Ces hypothèses étaient relatives à y positif. Si nous voulons étudier des

---

(¹) Pour l'extension à un nombre quelconque d'équations des résultats de cette Section, on pourra consulter mon Mémoire de 1893 dans le *Journal de Mathématiques*.

intégrales devenant négatives, il est indispensable de compléter ces hypothèses. Supposons donc que l'équation obtenue en changeant y en $-y$, c'est-à-dire l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - f(x, -y) = 0$$

rentre dans le même type que l'équation (E), pour y positif.

Toutes ces conditions étant remplies, nous sommes assuré de pouvoir suivre une intégrale quelconque pour toute valeur de x, si, bien entendu, nous supposons $f(x, y)$ définie et continue pour toute valeur réelle de x. L'équation (E) appartient, en effet, au type d'équations au sujet desquelles nous avons démontré (§ 3) un théorème général.

Toute intégrale de l'équation (E) *devra nécessairement s'annuler*. Supposons, en effet, qu'une intégrale ne s'annule pas à partir de $x = 0$. Désignons encore par α et β (n° 4) les deux nombres qui ont joué un rôle fondamental dans toute la théorie de la Section précédente. Si l'intégrale considérée ne s'annule pas à partir de $x = 0$, nous aurons une intégrale restant toujours positive et différente de zéro dans un intervalle $(0, h)$, h étant supérieur à β. On pourra alors obtenir une intégrale, non identiquement nulle, s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = h$ et restant toujours positive dans cet intervalle, ce qui est en contradiction avec les résultats précédemment obtenus, puisque c'est seulement dans l'intervalle $(0, a)$, où

$$\alpha < a < \beta,$$

que l'on peut déterminer une intégrale s'annulant aux deux extrémités et toujours positive dans l'intervalle.

On peut encore démontrer de la manière suivante le théorème précédent, en remarquant que, si a est inférieur à β, mais en est très voisin, l'intégrale qui s'annule pour $x = 0$ et pour $x = a$ devient très grande (n° 6); la courbe intégrale que nous étudions et cette seconde courbe intégrale auront donc au moins deux points communs et, par suite, nous aurions deux intégrales positives prenant les mêmes valeurs pour deux valeurs de x, ce qui est impossible.

L'intégrale s'annulant une fois devra s'annuler une infinité de fois et, comme nous l'avons dit d'une manière générale, on pourra suivre sa valeur de proche en proche.

La courbe représentée par toute intégrale aura donc la forme d'une sinusoïde, et l'on peut dire que le problème de l'intégration pour l'équation (E) est résolu, si l'on entend par là qu'on peut suivre avec précision les valeurs de la fonction quand x augmente indéfiniment.

9. Soient deux valeurs x_0 et x_1 de x ($x_0 < x_1$). A un intervalle commençant en x_0 correspondent pour l'équation (E) une longueur β et une longueur α, en gardant toujours la même notation générale.

Considérons ensuite l'équation transformée de (E)

$$\text{(E')} \qquad \frac{d^2y}{dx'^2} - f(x_1 - x', -y) = 0.$$

Pour cette équation en x', nous aurons, pour un intervalle commençant à $x' = 0$, une longueur β' et une longuenr α'. Supposons maintenant que les quantités

$$x_0, \quad x_1 - \beta', \quad x_0 + \beta, \quad x_1$$

soient rangées par ordre croissant de grandeur et que, de plus,

$$x_1 - \alpha' > x_0 + \alpha.$$

Nous allons montrer qu'*il existe au moins une intégrale de l'équation s'annulant pour* $x = x_0$ *et pour* $x = x_1$.

Désignons par λ une arbitraire comprise entre

$$x_1 - \beta' \quad \text{et} \quad x_0 + \beta.$$

Il y aura une intégrale toujours positive de l'équation (E) s'annulant pour x_0 et λ; de même l'équation (E') admettra une intégrale toujours positive s'annulant pour $x' = 0$ et $x' = x_1 - \lambda$ et, par suite, l'équation (E) admettra une intégrale toujours négative s'annulant pour $x = x_1$ et $x = \lambda$. Les deux intégrales que nous venons de trouver peuvent-elles être la continuation l'une de l'autre? Il faut et il suffit que leur dérivée première ait la même valeur pour $x = \lambda$. Désignons par θ et θ' les angles compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ que font les tangentes aux deux courbes au point $x = \lambda$, $y = 0$ avec l'axe des x. L'équation

$$\theta - \theta' = 0$$

est une équation en λ, puisque θ et θ' dépendent de λ. Il faut montrer

que cette équation a une racine entre $x_1 - \beta'$ et $x_0 + \beta$. Or, quand x est très voisin de $x_1 - \beta'$, θ' est voisin de $\frac{\pi}{2}$, tandis que θ a une valeur différente de $\frac{\pi}{2}$, donc $\theta - \theta'$ est négatif pour cette valeur de x; au contraire, pour x voisin de $x_0 + \beta$, θ est voisin de $\frac{\pi}{2}$ tandis que θ' a une valeur différente de $\frac{\pi}{2}$: la différence $\theta - \theta'$ sera alors positive. L'équation écrite ci-dessus aura donc au moins une racine correspondant à une valeur λ_1 telle que

$$x_1 - \beta' < \lambda_1 < x_0 + \beta.$$

Est-on assuré que l'intégrale correspondante ne sera pas nulle identiquement? Oui, puisque autrement il faudrait que l'on eût à la fois

$$\lambda_1 < x_0 + \alpha, \qquad \lambda_1 > x_1 - \alpha',$$

ce qui est incompatible avec nos hypothèses. Nous avons donc bien une intégrale non nulle identiquement et s'annulant pour $x = x_0$ et $x = x_1$; cette intégrale ne garde pas un signe invariable entre les deux valeurs extrêmes.

10. Occupons-nous maintenant d'un cas particulièrement intéressant : celui où la fonction $f(x, y)$ serait périodique par rapport à x et de période ω. Considérons un intervalle $(x_0, x_0 + \omega)$. En supposant remplies les hypothèses du n° 9, nous avons une intégrale s'annulant pour x_0 et $x_0 + \omega$. Cette intégrale ne sera pas en général périodique, car pour x_0 et $x_0 + \omega$ les dérivées n'auront pas la même valeur. En écrivant cette condition, on aura une équation en x_0

$$F(x_0) = 0.$$

A chaque racine réelle de cette équation correspondra une solution périodique.

L'étude des racines de cette équation sera, en général, extrêmement difficile. Je veux indiquer cependant un cas simple où l'on pourra établir l'existence d'une solution périodique. Reprenons l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x, y) = 0$$

satisfaisant aux conditions des paragraphes précédents. La foi $f(x, y)$ est périodique par rapport à x et de période ω. Supp que

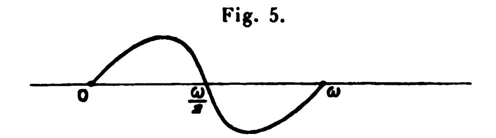
$$f(x, y) = f(\omega - x, y)$$

et que, de plus,

$$f(x, y) = -f(x, -y).$$

Partons de $x_0 = 0$. Si, comme nous l'admettons, les noml et β relatifs à l'origine comprennent entre eux $\frac{\omega}{2}$ (*fig.* 5), il y

Fig. 5.



une intégrale de l'équation s'annulant pour $x = 0$ et $x = \frac{\omega}{2}$ et (sera pas identiquement nulle. Je dis que cette solution sera unc tion périodique.

Prenons, en effet, la courbe symétrique par rapport à x $y = 0$, de la branche de courbe dont nous venons de parler. aisé de voir qu'elle satisfera à l'équation différentielle.

En désignant par $y = \varphi(x)$ l'équation de la première brancl aura pour équation de la symétrique

$$y = -\varphi(\omega - x).$$

Donc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\varphi''(\omega - x),$$

et nous devons montrer que l'équation

$$-\varphi''(\omega - x) + f[x, -\varphi(\omega - x)] = 0$$

est vérifiée. Or elle pourra s'écrire

$$\varphi''(\omega - x) + f[x, \varphi(\omega - x)] = 0,$$

et enfin, puisque $f(x, y) = f(\omega - x, y)$,

$$\varphi''(\omega - x) + f[\omega - x, \varphi(\omega - x)] = 0,$$

qui est manifestement vérifiée.

11. Indiquons un exemple. Soit l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2} y \sin^2 x + \left(1 + \frac{1}{2}\cos^2 x\right) \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = 0.$$

Nous regardons la fonction $f(x, y)$ correspondante comme admettant la période 2π, c'est-à-dire que $\omega = 2\pi$; on a bien en plus

$$f(x, y) = f(2\pi - x, y).$$

L'équation rentre d'ailleurs dans la classe qui nous occupe actuellement. Il nous faut chercher les deux nombres α et β pour reconnaître si l'on a

$$\alpha < \pi < \beta.$$

Or α est le nombre relatif à l'équation linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y f'_y(x, 0) = 0,$$

et β correspond à l'équation linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y f'_y(x, \infty) = 0.$$

Nous aurons donc ici, pour la première équation,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3}{2} y = 0$$

et, pour la seconde,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2} y \sin^2 x = 0.$$

Pour la première équation, nous avons de suite $\alpha = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$; dans un intervalle moindre que $\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ une intégrale s'annulant aux deux extrémités est identiquement nulle. Pour la seconde équation nous ne pouvons trouver la valeur exacte de β (si ce n'est sous forme de série), mais nous pouvons avoir une limite inférieure de β et cela nous suffira. Si, en effet, au lieu de la seconde équation, on envisage l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2} y = 0,$$

le nombre β correspondant à l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2} y \sin^2 x = 0$ sera

plus grand que celui qui correspond à cette dernière équation. Pa suite

$$\beta > \pi\sqrt{2}.$$

Puisque $\alpha = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ et $\beta > \pi\sqrt{2}$, nous sommes assuré que les in galités $\alpha < \pi < \beta$ sont vérifiées.

Il existe donc une intégrale de période 2π pour l'équati proposée, et nous pouvons l'obtenir sous forme de série convergent par notre méthode d'approximations successives.

III. — Sur une classe d'équations à laquelle s'appliquent les procédés alternés.

12. Considérons maintenant des équations différentielles d'un typ différent au point de vue des hypothèses relatives aux fonctions qui figurent. Soit l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y),$$

où nous supposons la fonction $f(x, y)$ *toujours positive et croi sant en même temps que y.* On est assuré (Chap. V) qu'il ne pe exister qu'une seule intégrale de cette équation prenant des valeu données pour $x = a$ et pour $x = b$.

On peut supposer que ces valeurs données sont nulles, ce q revient à remplacer y par $y + \alpha x + \beta$ en désignant par α et β d constantes convenables.

Appliquons alors les approximations successives, en partant $y_0 = 0$; on aura ainsi

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = f(x, 0),$$

$$\frac{d^2y_2}{dx^2} = f(x, y_1),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{d^2y_n}{dx^2} = f(x, y_{n-1}),$$

tous les y s'annulant pour $x = a$ et pour $x = b$. On voit d'ab immédiatement que tous les y sont négatifs; on aura de plus

$$0 > y_2 > y_1,$$

puisque $f(x, y_1) < f(x, o)$. De même

$$y_1 < y_3 < y_2,$$
$$y_2 > y_4 > y_3,$$

et ainsi de suite, le sens des inégalités entre trois y consécutifs variant d'une ligne à la suivante. Les y à indices impairs forment donc une suite croissante et les y à indices pairs une suite décroissante; d'autre part, tout terme de la première suite est inférieur à un terme quelconque de la seconde. Les y à indices impairs auront donc une limite u, et il en sera de même des y à indices pairs qui auront une limite v. Ces deux limites sont des fonctions de x, s'annulant en a et b, et l'on aura

$$u \leqq v,$$

et comme on a

$$\frac{d^2 y_n}{dx^2} = f(x, y_{n-1}), \qquad \frac{d^2 y_{n+1}}{dx^2} = f(x, y_n),$$

on aura

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x, v), \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} = f(x, u).$$

13. Pour établir cette convergence uniforme ([1]), reportons-nous à la fonction $G(x, \xi)$ envisagée au paragraphe 1 du Chapitre VI. Il est facile de voir que, si α désigne un nombre positif fixe entre a et b, on peut trouver un nombre positif μ dépendant uniquement de a, b et α [non de $f(x)$ et de x], tel que l'on ait

$$G(x, \xi) < \mu\, G(\alpha, \xi).$$

Pour l'établir, il suffit d'examiner successivement les diverses dispositions de α, x et ξ dans l'intervalle (a, b). Ainsi soit

$$\alpha < x < b,$$

on aura

$$G(x, \xi) = \frac{(b-\xi)(x-a)}{b-a},$$
$$G(\alpha, \xi) = \frac{(b-\xi)(\alpha-a)}{b-a}.$$

([1]) *Voir* sur toutes ces questions mes articles (*Comptes rendus*, 14 février 1898, et *Bulletin de la Société mathématique*, 1900).

L'inégalité précédente devient

$$x - a < \mu(\alpha - a).$$

Elle sera vérifiée si μ est supérieur à $\frac{b-a}{\alpha - a}$. Avec toute autre disposition de α, x, ξ, on trouve de même un nombre μ convenable ; le plus grand de ces différents nombres convient à notre objet. Il dépend seulement de α, b, a.

Ceci posé, si l'on revient à l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \varphi(x) = 0,$$

où $\varphi(x)$ a un signe constant, en appelant $y(x)$ l'intégrale du paragraphe 1 (Chap. VI) s'annulant en a et b, on aura

$$|y(x)| < \mu|y(\alpha)|.$$

14. Revenons maintenant aux équations du paragraphe **12** donnant y_1, y_2, ..., y_n, ... Pour une valeur, quelconque d'ailleurs, donnée à x,

$$y_1(x),\quad y_3(x),\quad \ldots,\quad y_{2n+1}(x)$$

tendent vers une limite par valeurs croissantes ; d'autre part,

$$y_2(x),\quad y_4(x),\quad \ldots,\quad y_{2n}(x)$$

tendent vers une limite par valeurs décroissantes, et tout terme de la première suite est inférieur à un terme quelconque de la seconde. On a

$$\frac{d^2(y_n - y_{n-2})}{dx^2} = f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-3}),$$

et par conséquent, d'après la remarque précédente,

$$|y_n(x) - y_{n-2}(x)| < \mu|y_n(\alpha) - y_{n-2}(\alpha)|.$$

Ceci montre clairement que, pour une même parité de n, *la fonction $y_n(x)$ tend uniformément dans l'intervalle* (a, b) *vers sa limite,* puisque la série de terme général

$$y_n(x) - y_{n-2}(x)$$

converge comme la série

$$y_n(\alpha) - y_{n-2}(\alpha).$$

Il est donc bien établi que les approximations successives nous conduisent à *deux* (¹) fonctions u et v satisfaisant aux deux équations écrites à la fin du paragraphe **12**

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x, v), \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} = f(x, u),$$

et s'annulant en a et b.

13. C'est une question intéressante de savoir si $u = v$. La réponse est certainement affirmative d'après un théorème général étudié au Chapitre V (Section II), si *l'intervalle* (a, b) *est suffisamment petit.* Mais en est-il ainsi en général? Pour répondre à cette question prenons l'équation très simple

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} e^y,$$

qui rentre dans le type précédent. Considérons une intégrale s'annulant pour $x = 0$ et négative pour x positif et assez rapproché de l'origine. On aura

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = e^y - \alpha,$$

α étant une quantité positive inférieure à *un*. L'intégrale y ira en décroissant depuis $y = 0$ jusqu'à la valeur $\log \alpha$ qui sera son minimum; cette valeur minima sera atteinte pour

$$x = \int_{\log \alpha}^{0} \frac{dy}{\sqrt{e^y - \alpha}}.$$

La seconde racine de l'intégrale y (après l'origine) correspondra donc à

$$b = 2 \int_{\log \alpha}^{0} \frac{dy}{\sqrt{e^y - \alpha}},$$

ou, en posant $\log \alpha = \beta < 0$,

$$b = 2 \int_{\beta}^{0} \frac{dy}{\sqrt{e^y - e^\beta}}.$$

(¹) La question de l'identité $u = v$ sera discutée au paragraphe suivant.

L'intégrale considérée y s'annule donc pour $x = 0$ et $x = b$ est négative et son minimum est $\log \alpha$.

Reprenons les équations relatives aux approximations succes

$$(5) \quad \frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{d^2 y_2}{dx^2} = \frac{1}{2} e^{y_1}, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^2 y_n}{dx^2} = \frac{1}{2} e^{y_{n-1}}, \qquad \ldots$$

Si l'on suppose que y_n converge uniformément vers y, il arri à partir d'une certaine valeur de n, que $\frac{1}{2} e^{y_{n-1}}$ différera très p $\frac{1}{2} e^{y}$ et sera, par suite, supérieure à

$$\frac{1-\varepsilon}{2} e^{\log \alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{2}(1-\varepsilon),$$

en désignant par ε une quantité positive fixe aussi petite c voudra.

Considérons alors les équations

$$\frac{d^2(y_{n+2} - y_{n+1})}{dx^2} = \frac{1}{2}(e^{y_{n+1}} - e^{y_n}), \qquad \ldots,$$

$$\frac{d^2 u_{n+2}}{dx^2} = \frac{\alpha}{2}(1-\varepsilon) u_{n+1}, \qquad \ldots,$$

en prenant $u_{n+1} = y_{n+1} - y_n$; et les autres u étant déterminé la condition de s'annuler en 0 et b. On aura

$$|u_{n+p}| < |y_{n+p} - y_{n+p-1}| \qquad (p = 2, \ldots, \infty)$$

et la série de terme général

$$(y_{n+p} - y_{n+p-1})$$

est, par hypothèse, convergente.

Or prenons la suite des équations

$$\frac{d^2 v_{n+2}}{dx^2} + \frac{\alpha}{2}(1-\varepsilon) v_{n+1} = 0, \qquad \ldots,$$

les v s'annulant comme les u aux deux limites, et en ayant $v_{n+1} =$ Les v seront tous de même signe, tandis que les u sont altern ment positifs et négatifs; les u et v de même indice ont même v absolue. Par suite, nous pouvons écrire

$$|v_{n+p}| < |y_{n+p} - y_{n+p-1}|;$$

la série de terme général

$$v_{n+p}k^{n+p}$$

sera donc convergente tant que $|k| < 1$, puisque la série de terme général $(y_{n+p} - y_{n+p-1})k^{n+p}$ est convergente dans ces conditions, étant convergente pour $k = 1$. Ceci revient à dire que la série des approximations successives converge pour l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha}{2}(1-\varepsilon)y = 0$$

dans tout intervalle $(0, b')$, b' étant inférieur à b, mais en étant aussi rapproché que l'on veut.

Or le champ correspondant à cette dernière équation est

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}.$$

Si donc cette expression est inférieure à b, il en résultera que les approximations ne pourront converger vers y. Nous devons donc, par suite, voir si l'inégalité

$$(6) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} < 2\int_{\beta}^{0} \frac{dy}{\sqrt{e^y - e^\beta}} \qquad (\beta = \log\alpha < 0)$$

peut être vérifiée. Nous allons montrer que l'inégalité est bien vérifiée si α est assez rapproché de zéro. Écrivons en effet

$$\int_{\beta}^{0} \frac{dy}{\sqrt{e^y - e^\beta}} = \int_{\beta}^{0} e^{-\frac{y}{2}}\left(1 - \frac{e^\beta}{e^y}\right)^{-\frac{1}{2}} dy,$$

et dans le développement du binome qui est sous le signe d'intégration, bornons-nous aux deux premiers termes, les termes négligés étant positifs comme les termes conservés; on a alors, dans le second membre,

$$\int_{\beta}^{0} e^{-\frac{y}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{e^\beta}{e^y}\right) dy = 2\left(e^{-\frac{\beta}{2}} - 1\right) + \frac{1}{3}\left(e^{-\frac{\beta}{2}} - e^\beta\right),$$

ou, en remplaçant β par $\log\alpha$,

$$\frac{7}{3}\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - 2 - \frac{1}{3}\alpha.$$

Si donc l'inégalité

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} < \frac{14}{3}\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - 4 - \frac{2}{3}\alpha$$

est vérifiée, il en sera de même de l'inégalité (6), puisque ε peut êt pris aussi petit qu'on veut. Or, en prenant α assez petit, nous n'avo à comparer que les termes en $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, ce qui nous conduit à

$$\pi\sqrt{2} < \frac{14}{3},$$

inégalité qui est exacte.

Donc, pour α assez petit et, par suite, pour b assez grand, l *approximations successives ne convergent pas vers l'intégrale*.

Les deux limites u et v du paragraphe précédent ne coïncide donc pas, *en général*, comme nous le voyons par le cas particuli qui précède ([1]).

16. Nous avons dit que les approximations successives converge quand l'intervalle est suffisamment petit. N'ayant à considérer q des valeurs négatives de y, supposons que la dérivée toujours positi

$$f'_y(x, y)$$

reste, pour y négatif, quel que soit x dans un certain intervalle, in rieure à un nombre fixe M. Il est facile alors de fixer une limite po la longueur de l'intervalle dans lequel les approximations successi convergeront. Nous allons comparer les approximations successi pour l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = My$$

et pour l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y).$$

On a, d'une manière générale, en appliquant les équations à

([1]) Je m'étais borné, dans mon Mémoire de 1890 (Chap. V), à l'assertion qu était, en général, différent de v; j'ai donné l'exemple précédent dans les *Comj rendus* (avril 1894).

intervalle (α, β),

$$\frac{d^2(y_n - y_{n-1})}{dx^2} = f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-2}),$$

et l'on peut écrire

$$f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-2}) = (y_{n-1} - y_{n-2}) f'_y(x, \mathrm{Y}),$$

Y étant compris entre y_{n-1} et y_{n-2}. Or considérons les équations

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} = f(x, 0),$$

$$\frac{d^2 u_2}{dx^2} = \mathrm{M} u_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^2 u_n}{dx^2} = \mathrm{M} u_{n-1},$$

les u s'annulant aux extrémités de l'intervalle.

On aura évidemment

$$|y_n - y_{n-1}| < |u_n|.$$

Or la série des valeurs

$$|u_n|$$

est convergente certainement, si l'intervalle (α, β) est inférieur au champ fondamental (Chap. V, § 13) relatif à l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \mathrm{M} u = 0$$

et ce champ est égal à

$$\frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{M}}}.$$

Ainsi, *dans tout intervalle inférieur au nombre précédent, les approximations convergent pour l'équation proposée.*

17. Reprenant l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y),$$

nous devons maintenant chercher comment nous trouverons l'intégrale s'annulant pour $x = a$ et $x = b$ si l'intervalle (a, b) est trop grand pour que les approximations successives y convergent.

Nous allons ici faire usage d'un *procédé alterné* analogue à celui dont nous avons fait usage avec M. Schwarz pour l'étude de l'équation de Laplace.

Nous commencerons par démontrer deux lemmes :

1° Soient deux fonctions u et v satisfaisant à l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y),$$

continues, bien entendu, ainsi que leurs dérivées premières de a à b. Si, en a et en b, on a

$$u \geqq v,$$

je dis qu'il en sera de même à l'intérieur. Si, en effet, $u - v$ devient négatif entre a et b, il y aura entre a et b deux valeurs α et β pour lesquelles on aura

$$u = v.$$

Entre α et β, on devra donc avoir $u = v$ et, par suite, dans tout l'intervalle (a, b); par conséquent, on a toujours, soit $u = v$, soit $u > v$; c'est ce que nous voulions montrer.

2° Considérant toujours la même équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y),$$

l'intégrale u de cette équation s'annulant en a et b sera évidemment négative de a à b; on envisage de plus la fonction v s'annulant en a et b et vérifiant la relation

$$\frac{d^2v}{dx^2} = f(x, 0),$$

on aura manifestement

$$|u| < |v|.$$

Si donc M désigne la valeur absolue maxima de v, on aura

$$|u| < \mathrm{M}.$$

Ceci posé, prenons une intégrale de l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x, u),$$

qui s'annule en b et prenne en a une valeur négative dont la valeur absolue ne dépasse pas N; nous voulons trouver une limite de la valeur absolue de u en un point α compris entre a et b. Soit h l'intégrale de

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = 0,$$

qui prend en a et b les valeurs données; on voit de suite que

$$|h| < Nq,$$

q étant un nombre compris entre *zéro* et *un*. Posons alors $u = U + h$, nous aurons l'équation

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = f(x, U + h)$$

et nous devons considérer l'intégrale U de cette équation s'annulant en a et b. U sera négatif et, comme h est négatif, on aura *a fortiori*

$$|U| < M.$$

Nous en concluons, et c'est là notre second lemme,

$$|u| < M + Nq,$$

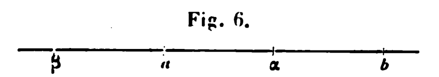
inégalité qui va jouer le rôle essentiel.

18. J'arrive maintenant à la solution du problème proposé. Nous voulons montrer que l'on pourra trouver la solution de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x, u)$$

prenant des valeurs données en b et β (*fig.* 6) si l'on sait résoudre cette question pour les intervalles $\beta\alpha$ et ab.

Fig. 6.



Soit u_1 la solution déterminée dans (a, b) et s'annulant en a et b. Nous formons alors la solution v_1 s'annulant en β et prenant en α la même valeur que u_1. Revenant maintenant au premier intervalle, formons la fonction u_2 déterminée dans (a, b), s'annulant en b et prenant en a la même valeur que v_1, et continuons ainsi indéfiniment

en passant successivement d'un segment à l'autre. Nous obtiendrons de cette manière deux suites

$$u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_n,\quad \ldots,$$
$$v_1,\quad v_2,\quad \ldots,\quad v_n,\quad \ldots:$$

u_1 est négatif dans (a, b), donc v_1 est négatif en α et, par suite, en a. Donc, si nous revenons à u_2, on aura, d'après le premier lemme,

$$u_1 > u_2,$$

et, en continuant ainsi, il vient de suite

$$0 > u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots,$$
$$0 > v_1 > v_2 > \ldots > v_n > \ldots.$$

Il faut montrer que u_n et v_n tendent vers une limite; il suffira de faire voir que $|u_n|$ et $|v_n|$ restent inférieurs à un nombre fixe. C'est ce que va nous donner le second lemme.

Désignons toujours par M la valeur absolue maxima des intégrales de l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x, 0),$$

s'annulant respectivement en a et b, puis en α et β. On a

$$\begin{array}{ll}(\text{pour } x = \alpha) & |u_1| < \mathrm{M},\\ (\text{pour } x = a) & |v_1| < \mathrm{M}q + \mathrm{M},\\ (\text{pour } x = \alpha) & |u_2| < q(\mathrm{M}q + \mathrm{M}) + \mathrm{M} = \mathrm{M}(q^2 + q + 1),\\ (\text{pour } x = a) & |v_2| < q\mathrm{M}(q^2 + q + 1) + \mathrm{M} = \mathrm{M}(q^3 + q^2 + q + 1)\end{array}$$

et, d'une manière générale,

$$\begin{array}{ll}(\text{pour } x = \alpha) & |u_n| < \mathrm{M}(q^{2n-2} + q^{2n-3} + \ldots + 1),\\ (\text{pour } x = a) & |v_n| < \mathrm{M}(q^{2n-1} + q^{2n-2} + \ldots + 1).\end{array}$$

Dans ces inégalités, q, qui est moindre que un, désigne le plus grand des deux nombres de même nom correspondant aux intervalles (a, b) et (α, β) du second lemme.

Les inégalités précédentes montrent que u_n (pour $x = \alpha$) et v_n (pour $x = a$) tendent vers deux limites. Les fonctions u_n et v_n tendent donc respectivement vers des limites u et v: la fonction u est définie dans l'intervalle (a, b), et la fonction v dans l'intervalle (α, β). Je dis que u et v prennent respectivement les mêmes valeurs en a et

en α; en effet,

$$v_n = u_n \quad (\text{pour } x = \alpha),$$
$$v_n = u_{n+1} \quad (\text{pour } x = a).$$

Donc, à la limite, v prend les mêmes valeurs que u pour $x = \alpha$, et il en est de même pour $x = a$. Il en résulte que, dans l'intervalle (a, α), on a

$$u = v.$$

Nous avons donc l'intégrale de l'équation s'annulant en b et en β; elle est représentée par u dans l'intervalle (a, b), et par v dans l'intervalle (α, β).

19. L'intégrale y de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y)$$

s'annulant en a et b (f remplissant toujours les conditions indiquées) doit être rapprochée des deux fonctions u et v s'annulant en a et b et satisfaisant aux équations

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x, v), \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = f(x, u)$$

dont il a été question au paragraphe 14. Nous allons montrer que l'on a (pour toute valeur de x entre a et b)

$$u < y < v$$

ou, en d'autres termes, que l'intégrale y est intermédiaire entre u et v.

Pour le démontrer, il suffit d'examiner les différentes circonstances qui pourraient se présenter s'il en était autrement. Supposons, par exemple, que l'on ait la disposition de la figure 7, où y rencontre u en un point α. Entre a et b, on a

$$v > u > y \quad (y, u, v \text{ sont négatifs}).$$

Or on a

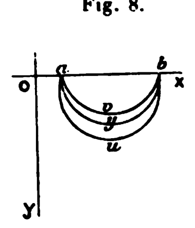
$$\frac{d^2(y-u)}{dx^2} = f(y, x) - f(v, x).$$

Le second membre est négatif dans (α, b). Donc $y - u$ qui s'annule en α et b devra être positif d'après cette équation; nous arrivons ainsi

à une contradiction. On verra tout aussi aisément que l'on arrive dans tous les cas à une absurdité, sauf si l'on a la figure 8 où y est constamment entre u et v.

Fig. 7.

Fig. 8.



20. C'est dans le cas particulier de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}e^y$$

que nous avons vu (§ 15 de ce Chapitre) que les deux limites u et v étaient distinctes pour un intervalle (a, b) assez grand. On peut évidemment donner une autre forme à ce résultat. Laissons l'intervalle (a, b) fixe et envisageons l'équation avec le paramètre positif k

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ke^y.$$

Si l'on fait croître k à partir de zéro, on a d'abord

$$y = u = v.$$

A partir d'une certaine valeur k_0 de k, u cesse d'être égale à v, et y est intermédiaire entre ces deux fonctions. Il y a là quelque chose d'assez curieux. La fonction $y(x, k)$ regardée comme fonction de k est certainement une fonction analytique de k pour toute valeur positive de k, comme on le voit en ramenant l'intégration de l'équation à une quadrature. Tant que u et v coïncident, elles sont identiques à y et sont, par suite, des fonctions analytiques de k; mais, au delà de k_0, on peut se demander quelle sera la nature de u et de v regardées comme fonction de k: elles ne seront certainement pas le prolongement analytique de la fonction y, car alors elles coïncideraient. Représentent-elles au delà de k_0 des fonctions analytiques de k qui ne seraient pas susceptibles de se prolonger analytiquement en

deçà de k_0, ou bien encore sont-ce des fonctions non analytiques de k? Ces questions présenteraient peut-être quelque intérêt.

21. Nous avons considéré, dans ce qui précède, une seule équation. On pourrait chercher à traiter des problèmes analogues en prenant un système d'équations de la forme

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$
$$\frac{d^2y_2}{dx^2} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{d^2y_m}{dx^2} = f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

les f *étant des fonctions toujours positives et croissant avec les* y.

Je ne dirai que quelques mots sur cette extension, en me bornant à renvoyer au travail que j'ai déjà cité. Les résultats précédents ne s'étendent pas d'eux-mêmes à un tel système. Ainsi soient, en se bornant à $m = 2$, les deux équations

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, z), \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = \varphi(x, y, z),$$

f et φ étant positifs et croissant avec y et z. On ne doit pas chercher à établir qu'il n'existe qu'un seul système d'intégrales continues prenant pour $x = a$ et $x = b$ des valeurs données : le fait n'est pas nécessairement exact. Considérons, par exemple, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y),$$

f étant positif et croissant avec y. Il y a une intégrale Y s'annulant aux deux extrémités de l'intervalle (a, b). D'autre part, les approximations successives donnent, en général, deux limites y_1 et z_1 différentes, s'annulant en a et b, et satisfaisant aux deux équations

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, z),$$
$$\frac{d^2z}{dx^2} = f(x, y).$$

Si donc on envisage ce système, il admet, avec les mêmes conditions aux limites, les deux systèmes de solutions

$$\left.\begin{array}{l} y = Y \\ z = Y \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} y = y_1, \\ z = z_1. \end{array}\right.$$

Ils ne coïncident que si l'intervalle est assez petit.

CHAPITRE VIII.

DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES ET DES SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

I. — Remarques générales sur la continuité des intégrales des équations dépendant d'un paramètre arbitraire.

1. Considérons une équation différentielle dépendant d'un paramètre μ. Soit

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu, t). \tag{1}$$

Envisageons la solution

$$x = \theta(t, \mu),$$

qui s'annule pour $t = 0$. Soit, pour $\mu = 0$, la solution

$$x = \theta(t, 0),$$

que nous allons supposer être continue de $t = 0$ à $t = t_0$. De plus, on admet que

$$f(x, \mu, t)$$

peut, pour t compris entre o et t_0, se développer suivant les puissances de

$$\mu \quad \text{et} \quad x - \theta(t, 0),$$

les coefficients du développement étant des fonctions d'ailleurs quelconques de t. Nous nous proposons de montrer que l'*intégrale*

$$\theta(t, \mu)$$

peut se développer suivant les puissances de μ, pourvu que μ soit suffisamment petit, *pour toute valeur de t* comprise entre o et t_0.

Tout d'abord, on ne restreint pas la généralité du théorème, supposant que $\theta(t, 0)$ est identiquement nul, ce qui revient à fa un changement de fonction de la forme $x' = x - \theta(t, 0)$. No plaçant donc dans cette hypothèse, la fonction

$$f(x, \mu, t)$$

sera ordonnée suivant les puissances de x et de μ pour $|x|$ et | suffisamment petits, quel que soit t compris entre o et t_0, et s'ann lera pour $x = \mu = 0$. Écrivons

$$f(x, \mu, t) = Ax + B\mu + \ldots,$$

les coefficients étant des fonctions de t.

Posons

$$x = \mu u + x' e^{\int A\,dt},$$

u désignant la fonction de t satisfaisant à la relation

$$\frac{du}{dt} = Au + B$$

et s'annulant pour $t = 0$.

L'équation proposée se transforme en la suivante,

$$(2) \qquad \frac{dx'}{dt} = A_1 x'^2 + 2B_1 x' \mu + C_1 \mu^2 + \ldots,$$

qui est de même forme, mais où il n'y a pas de terme du pren degré en x' et μ. Les coefficients du second membre sont des fo tions de t continues de $t = 0$ à $t = t_0$, et ce développement peut regardé comme *absolument* convergent pour toute valeur de x' telle que

$$|x'| \leq \rho, \qquad |\mu| \leq r,$$

ρ et r étant deux constantes fixes, la variable réelle t ayant d'aill une valeur quelconque entre o et t_0.

2. Nous avons à chercher l'intégrale de l'équation (2) s'annu pour $t = 0$. Représentons l'intégrale par la série que donne la thode des approximations successives : cette série converge certai ment depuis $t = 0$ jusqu'à la valeur de t, correspondant à la |

petite des deux quantités

$$t_0 \quad \text{et} \quad \frac{\rho}{M},$$

en désignant par M la valeur absolue maxima de

$$A_1 x'^2 + 2B_1 x' \mu + C_1 \mu^2 + \ldots,$$

pour

$$0 \leqq t \leqq t_0 \quad \text{et} \quad |x'| \leqq \rho.$$

Or nous pouvons prendre comme nombre M le maximum de la série

$$|A_1|.\rho^2 + 2|B_1|.\rho r + |C_1|r^2 + \ldots,$$

pour t compris entre o et t_0. Si donc nous considérons le quotient

$$\frac{\rho}{|A_1|\rho^2 + 2|B_1|r\rho + |C_1|r^2 + \ldots},$$

nous pouvons donner à r et ρ des valeurs indépendantes suffisamment petites pour que ce quotient soit supérieur à t_0.

La convergence de la série donnée par les approximations successives *sera donc assurée depuis $t = 0$ jusqu'à $t = t_0$, sous la condition* $|\mu| < r$.

Nous avons donc l'intégrale de l'équation

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu, t) \qquad [f(0, 0, t) = 0]$$

s'annulant pour $t = 0$, représentée par la série

$$x_1 + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots$$

que donnent les approximations successives, et, d'après la théorie générale, on a

$$|x_n - x_{n-1}| < \lambda^n,$$

λ étant un nombre fixe inférieur à l'unité. Chaque terme de la série précédente est une fonction holomorphe de μ pour $|\mu| < r$; il est aisé d'en conclure que la série est une fonction holomorphe de μ dans les mêmes conditions. C'est ce que montre immédiatement la formule de Cauchy,

$$\varphi(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)}{z - \mu} dz,$$

prise le long du cercle de rayon r.

Nous avons donc établi que l'intégrale de l'équation (1), s'annulant pour $t = 0$, *est une fonction analytique de* μ, *et peut être développée en série ordonnée suivant les puissances de* μ, *tant que* $|\mu| < r$. *Ce développement est convergent depuis* $t = 0$ *jusqu'à* $t = t_0$.

3. Nous avons supposé que nous avions une seule équation et un seul paramètre. Le théorème est absolument général : si l'on avait par exemple, les deux équations

$$\frac{dx}{dt} = Ax + By + C\mu + \ldots,$$

$$\frac{dy}{dt} = A_1 x + B_1 y + C_1 \mu + \ldots,$$

les coefficients étant des fonctions continues de t, de $t = 0$ à $t = t_0$. Nous avons là un système d'équations ayant, pour $\mu = 0$, la solution $x = 0$, $y = 0$, correspondant à x et y nuls pour $t = 0$.

Nous poserons

$$x = \mu u + Px' + Qy',$$
$$y = \mu v + P_1 x' + Q_1 y',$$

et nous allons choisir u, v, ainsi que les P et Q, de façon que les équations différentielles donnant x' et y' ne contiennent plus de terme du premier degré en x', y' et μ. On s'arrangera de façon que u et v s'annulent pour $t = 0$. Il suffit pour cela de déterminer u et v par les équations

$$\frac{du}{dt} = Au + Bv + C,$$

$$\frac{dv}{dt} = A_1 u + B_1 v + C_1,$$

et l'on a, pour P et P_1, les deux équations

$$\frac{dP}{dt} = AP + BP_1,$$

$$\frac{dP_1}{dt} = A_1 P + B_1 P_1,$$

auxquelles satisferont aussi Q et Q_1. On prendra donc, pour P et P_1, puis pour Q et Q_1, deux systèmes de solutions distinctes, et il est clair que le déterminant

$$PQ_1 - P_1 Q.$$

qui s'exprime par une exponentielle, ne s'annulera pas de $t=0$ à $t=t_0$.

Les équations donnant x' et y' seront alors de même forme que celles qui donnent x et y, sauf que les seconds membres ne renferment pas de termes du premier degré dans leur développement. On peut alors raisonner comme au paragraphe précédent.

Il est évident aussi qu'on pourrait avoir un nombre quelconque de paramètres; *l'intégrale sera une fonction holomorphe de ces paramètres, dans le voisinage des valeurs* zéro *de ces paramètres* (¹).

4. La démonstration que nous avons donnée du théorème précédent peut être encore simplifiée en restant dans le même ordre d'idées, comme l'a montré M. Lindelöf (²), en utilisant une seconde limite de convergence indiquée par lui dans l'emploi de la méthode des approximations successives et que nous avons étudiée dans le Tome II de ce Traité (p. 344, 2ᵉ édition). On évite ainsi la transformation faite à la fin du paragraphe 1. Cette seconde limite était (*loc. cit.*, p. 345) désignée par δ, qui représentait la plus petite des quantités

$$a \quad \text{et} \quad \frac{1}{K}\log\left(1+\frac{bK}{M_0}\right).$$

Avec les notations actuelles, correspondant à la fonction $f(x, \mu, t)$ du paragraphe 1 de ce Chapitre, les deux quantités précédentes deviennent

$$(2) \qquad t_0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{K}\log\left(1+\frac{K\rho}{M_0}\right),$$

K étant un nombre fixe. Quant à M_0, il représente le maximum de la valeur absolue de

$$f(0, \mu, t)$$

quand t varie entre o et t_0. La quantité M_0 dépend de μ, et il est

(¹) Le théorème précédent a été indiqué pour la première fois par M. Poincaré (*Les nouvelles méthodes de la Mécanique céleste*, p. 48 et suiv.). M. Poincaré le démontre en se servant des considérations habituelles au *Calcul des limites* de Cauchy. J'ai donné la démonstration du texte (*Comptes rendus*, 9 avril 1894).

(²) LINDELÖF, *Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude des intégrales réelles des équations différentielles* (*Journal de Math.*, 1894, p. 125).

clair qu'elle tend vers zéro quand μ tend vers zéro. Donc, quand μ est assez petit, la plus petite des quantités (α) est manifestement t, ce qui donne la démonstration du théorème.

5. Nous avons considéré, dans ce qui précède, l'intégrale de l'équation

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu, t)$$

s'annulant pour $t = 0$. Conservant l'hypothèse $f(0, 0, t) = 0$ qui, comme nous l'avons dit, ne diminue en rien la généralité, nous allons envisager l'intégrale de cette équation prenant pour $t = 0$ la valeur x_0. Or posons $x = x_0 + x'$; nous aurons l'équation

$$(3) \qquad \frac{dx'}{dt} = f(x_0 + x', \mu, t),$$

avec les deux paramètres x_0 et μ. Pour $x_0 = \mu = 0$, on a l'équation

$$\frac{dx'}{dt} = f(x', 0, t),$$

et, d'après l'hypothèse faite, l'intégrale de cette dernière équation, s'annulant pour $t = 0$, sera identiquement nulle. Elle sera donc déterminée et continue depuis $t = 0$ jusqu'à $t = t_0$ (t_0 étant arbitraire, mais restant fixe une fois choisi).

D'après le théorème précédent, l'intégrale de l'équation (3), s'annulant pour $t = 0$, sera continue de $t = 0$ à $t = t_0$, pourvu que $|x_0|$ et $|\mu|$ soient suffisamment petits, et *elle pourra être développée suivant les puissances de* x_0 et μ.

Nous avons donc le théorème suivant, que j'énonce dans sa généralité.

Soit le système d'équations

$$(\text{S}) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \text{X}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t, \mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On suppose que, pour $\mu = 0$, on ait l'intégrale

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(t),$$

continue de $t = 0$ à $t = t_0$. De plus, les X sont supposées développables en séries ordonnées suivant les puissances de

$$\mu \quad \text{et} \quad x_i - \varphi_i(t)$$

pour toute valeur de t entre o et t_0, les coefficients de ces développements étant, bien entendu, des fonctions continues de t.

Dans ces conditions, *les intégrales de* (S) *prenant respectivement, pour* $t = 0$, *les valeurs*

$$\varphi_1(0) + x_1^0, \quad \varphi_2(0) + x_2^0, \quad \ldots, \quad \varphi_n(0) + x_n^0,$$

seront continues de o *à* t_0, *et développables suivant les puissances de*

$$x_1^0, \quad x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n^0 \quad \text{et} \quad \mu,$$

pourvu que ces grandeurs aient des modules suffisamment petits.

6. Cherchons si l'on peut obtenir des résultats analogues avec d'autres déterminations initiales des intégrales ([1]). Prenons d'abord l'équation

$$(4) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \mu\right),$$

où f est supposée une fonction analytique de y, $\frac{dy}{dx}$ et μ.

Nous avons, pour $\mu = 0$, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, 0\right).$$

Soit une intégrale de cette équation continue de a à b, prenant pour $x = a$ la valeur A, et pour $x = b$ la valeur B.

Existe-t-il une intégrale de l'équation (4) prenant les mêmes valeurs initiale et finale, et très peu différente de la précédente, si μ est lui-même très voisin de zéro?

Au lieu de (4), nous considérons le système de deux équations du premier ordre

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy'}{dx} = f(x, y, y', \mu), \\ \dfrac{dy}{dx} = y'. \end{cases}$$

Pour $\mu = 0$, ce système admet une intégrale (y, y') continue de a à b, et prenant pour $x = a$ les valeurs

$$y = \text{A}, \qquad y' = \text{A}',$$

([1]) E. Picard, *Sur les équations différentielles renfermant un paramètre arbitraire* (*Comptes rendus*, t. CXVIII, 1894).

en désignant par A' la valeur initiale de y'. Pour μ voisin de zér nous aurons une intégrale de (5) continue de a à b telle que l'on a pour $x = a$,

$$y = A, \qquad y' = y'_0,$$

pourvu que y'_0 soit suffisamment voisin de A'. Cette intégrale y ser une fonction

$$y(x, \mu, y'_0),$$

développable suivant les puissances de μ et $y'_0 - A'$. L'équation

$$(6) \qquad y(b, \mu, y'_0) - B = 0$$

s'annule pour $\mu = 0$, $y'_0 = A'$. Diverses circonstances pourront se présenter. Il arrivera, *en général*, que cette relation sera vérifiée pour une suite continue de valeurs de y'_0 et de μ voisines respectivement de A' et de *zéro*, et que y'_0 sera une fonction holomorphe de μ dans le voisinage de $\mu = 0$: l'équation (4) aura alors une intégral prenant en a et b les valeurs A et B, et qui sera une fonction holomorphe de μ dans le voisinage de $\mu = 0$.

Les conclusions précédentes peuvent cesser d'être exactes. Il peu arriver que la relation (6), considérée comme représentant une courb lieu de points (μ, y'_0), ait le point $\mu = 0$, $y'_0 = A'$ comme point isolé auquel cas il n'y aurait pas d'intégrale *réelle* satisfaisant aux condi tions initiale et finale pour $\mu \neq 0$.

Il peut encore arriver que le premier membre de l'équation (6 contienne μ en facteur, le second facteur ne s'annulant pas dans l voisinage de $\mu = 0$, $y'_0 = A'$. Dans ce cas, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, 0\right)$$

sera telle que *toute intégrale passant par le point* (a, A) *passer par le point* (b, B). Cette circonstance peut se présenter. Les équa tions linéaires dont nous avons fait l'étude dans un Chapitre précé dent nous en offrent un exemple. Soit k_i une constante telle qu l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k_i P(x) y = 0$$

ait une intégrale, non nulle identiquement, s'annulant pour $x = a$ e pour $x = b$. Toute intégrale de cette équation, s'annulant pour $x = a$

s'annule pour $x = b$: c'est la circonstance dont nous parlions ci-dessus. L'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (k_i + \mu) P(x) y = 0$$

n'admet pas, pour μ suffisamment petit mais différent de zéro, d'intégrale s'annulant pour $x = a$ et pour $x = b$.

7. Les cas d'exception que nous venons d'indiquer ne se rencontreront pas, si la méthode des approximations successives (Chap. V, § 8) est applicable, pour l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \mu\right),$$

à l'intégrale qui nous occupe.

Nous supposons que, μ étant dans le voisinage de zéro, les diverses hypothèses nécessaires pour l'application de la méthode des approximations successives soient vérifiées (*loc. cit.*). On aura alors l'intégrale cherchée sous forme de série dont chaque terme est une fonction analytique de μ, et, en raisonnant comme plus haut, on voit que l'intégrale elle-même est une fonction holomorphe de μ dans le voisinage de $\mu = 0$.

II. — Des solutions périodiques des équations différentielles ordinaires dépendant d'un paramètre arbitraire, d'après M. Poincaré (¹).

8. Considérons un système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et supposons que les X soient des fonctions périodiques du temps t avec la période ω. Si l'on a, pour une telle équation, une solution

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(t),$$

continue de $t = 0$ à $t = \omega$, et telle que

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(\omega), \qquad \ldots, \qquad \varphi_n(0) = \varphi_n(\omega),$$

(¹) H. POINCARÉ, *Les nouvelles méthodes de la Mécanique céleste*, (t. I, p. 79 et suiv.).

cette solution sera manifestement périodique, car on se retrouvera identiquement dans les mêmes conditions à l'époque ω qu'à l'époque o.

Nous allons supposer que dans les équations précédentes figure un certain paramètre μ. Supposons que, pour $\mu = 0$, on ait reconnu l'existence d'une solution périodique; nous voulons chercher si le système aura des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ. Écrivons donc les équations

$$(7) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t, \mu)$$

avec le paramètre μ, où les X sont périodiques par rapport à t. Pour $\mu = 0$, nous avons, par hypothèse, la solution périodique

$$x_i = \varphi_i(t),$$

et les conditions admises dans la démonstration du théorème général du § 5 sont supposées vérifiées.

Ceci posé, d'après le théorème du § 5, les intégrales du système, prenant respectivement, pour $t = 0$, les valeurs

$$\varphi_i(0) + x_i^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

sont continues de $t = 0$ à $t = \omega$, si $|x_i^0|$ et $|\mu|$ sont suffisamment petits, et ces intégrales peuvent être développées en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de

$$x_1^0, \quad x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n^0 \quad \text{et} \quad \mu.$$

Représentons cette solution par

$$x_i = f_i(t, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et écrivons les n équations

$$(8) \qquad f_i(\omega, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu) - f_i(0, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu) = 0.$$

Ces équations sont vérifiées pour

$$x_1^0 = x_2^0 = \ldots = x_n^0 = \mu = 0,$$

puisque alors les équations (8) se réduisent à

$$\varphi_i(\omega) - \varphi_i(0) = 0,$$

relation vérifiée, puisque $\varphi_i(t)$ admet la période ω.

Nous concluons de là que, *en général*, les équations (8) auront, pour μ assez petit, une solution où les x_i^0 seront voisins de zéro.

Il y aura donc, en général, *une solution périodique pour μ suffisamment petit.*

9. Nous sommes resté, au paragraphe précédent, dans les généralités. Diverses circonstances particulières peuvent se présenter pour les équations (8). Le cas général, où l'existence de la solution périodique cherchée sera certaine, est celui où le déterminant fonctionnel par rapport à

$$x_1^0,\quad x_2^0,\quad \ldots,\quad x_n^0$$

des premiers membres des équations (8) sera *différent de zéro* pour $x_1^0 = x_2^0 = \ldots = x_n^0 = \mu = 0$. Sera-t-il possible de faire cette constatation? Pour abréger l'écriture, supposons pour un moment, comme il est permis au moyen d'un changement linéaire de fonctions, que $\varphi_i(t)$ soit identiquement nul. Notre système (7) prendrait alors la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + b_i\mu + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les a et b étant des fonctions périodiques de t à la période ω. Les intégrales de cette équation, prenant les valeurs x_i^0 pour $t = 0$, sont développables, comme nous le savons, suivant les puissances de $x_1^0, \ldots, x_n^0$ et μ; nous pouvons écrire

$$x_i = A_{i1}x_1^0 + \ldots + A_{in}x_n^0 + B_i\mu + \ldots,$$

les A et B étant des fonctions de t, et l'on a évidemment

$$A_{ii}(0) = 1, \qquad A_{ik}(0) = 0, \qquad B_i(0) = 0.$$

En substituant les x_i dans les équations ci-dessus, on aura, en égalant dans les deux membres les coefficients de $x_1^0, \ldots, x_n^0$, un système d'équations différentielles linéaires à coefficients périodiques déterminant, avec les conditions initiales ci-dessus, les fonctions A.

Si l'on peut intégrer ce système d'équations donnant les A, on obtiendra immédiatement les coefficients de $x_1^0, \ldots, x_n^0$ dans les premiers membres des équations (8), et il sera possible alors de former le déterminant de ces coefficients. S'il n'est pas nul, on sera assuré de l'existence de solutions périodiques.

10. Nous avons seulement supposé, au paragraphe précédent, que l'on connaissait, pour $\mu = 0$, une solution périodique du système d'équations proposées (cette solution était $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$). Nous venons de voir que la formation du déterminant jouant un rôle important dans la discussion des équations (8) exigeait une intégration préalable d'équations linéaires.

On se trouvera dans des circonstances plus favorables, si l'on suppose que l'*on sache intégrer complètement le système des équations* (7) *pour* $\mu = 0$. On pourra alors reconnaître immédiatement si le déterminant fonctionnel qui nous occupe est différent de zéro. On aura, en effet, explicitement par hypothèse, les fonctions

$$f_i(t, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, 0).$$

Donc, dans les premiers membres des équations (8) développées suivant les puissances de $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ et μ, on aura les coefficients des premières puissances de $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$.

11. Quelques remarques importantes sont à faire sur le système des équations (8). Supposons que *les équations* (7) *admettent une intégrale première*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t, \mu) = \text{const.},$$

dont le premier membre soit une fonction périodique de t, admettant la période ω. Nous désignerons la fonction F par $F[x_i, t]$, sans mettre μ en évidence, et en n'écrivant qu'une des lettres x; nous écrirons aussi, à la place de $f_i(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu)$, simplement $f_i(t)$.

Nous allons voir que, dans ce cas, les équations (8) ne sont pas, en général, distinctes. On aura, en effet,

$$F[f_i(0), 0] = F[f_i(\omega), \omega] = F[f_i(\omega), 0].$$

Considérons donc l'équation

$$F[f_i(0), 0] - F[f_i(\omega), 0] = 0. \tag{9}$$

Le premier membre de cette équation est développable suivant les puissances de

$$f_i(\omega) - f_i(0).$$

Supposons que l'on ait

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} \neq 0$$

pour $\mu = 0$, $t = 0$, $x_i = \varphi_i(0)$; le coefficient de $f_n(\omega) - f_n(0)$ dans le développement du premier membre de (9) ne sera pas nul pour μ, $x_1^0, \ldots, x_n^0$ suffisamment petits, et il est clair alors que les $n-1$ équations

$$f_i(\omega, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu) - f_i(0, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

qui sont les $n-1$ièmes premières équations du système (8), entraînent, d'après la relation (9), la $n$ième équation

$$f_n(\omega, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu) - f_n(0, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu) = 0.$$

Les n équations (8) *ne sont donc pas distinctes,* comme nous voulions l'établir.

Nous avons supposé que $\frac{\partial F}{\partial x_n}$ n'était pas nul; si cette dérivée était nulle, on prendrait une autre des dérivées du premier ordre, et il n'y aurait que dans le cas où l'on aurait

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

pour $\mu = 0$, $t = 0$, $x_i = \varphi_i(0)$, que la conclusion précédente deviendrait douteuse.

Soit, comme tout à l'heure, $\frac{\partial F}{\partial x_n} \gtrless 0$; il y aura alors une infinité de solutions périodiques de période ω pour chaque valeur de μ (suffisamment petite). On supprimera la dernière des équations (8) et l'on pourra la remplacer par

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t, \mu) = C,$$

C étant une constante arbitraire que l'on prendra peu différente de

$$F[\varphi_1(0), \ldots, \varphi_n(0), 0, 0].$$

Pour une valeur donnée à C, il n'y aura plus, en général, qu'une solution périodique correspondante; elle sera déterminée par les $n-1$ premières des équations (8) et l'équation $F = C$, où l'on remplacera t par zéro, et qui alors s'écrira

$$F[f_i(\sigma), 0, \mu] = C.$$

Si on laisse C arbitraire, on aura une infinité de solutions périodiques dépendant d'une constante arbitraire.

Si, au lieu d'une intégrale première, on en avait deux,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \text{const.},$$
$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \text{const.},$$

on voit immédiatement, par des raisonnements analogues, que les n équations (8) se réduisent à $n-2$, si tous les déterminants fonctionnels

$$\frac{D(F, \Phi)}{D(x_k, x_h)} \qquad (k \neq h)$$

ne s'annulent pas pour $\mu = 0$, $t = 0$, $x_i = \varphi_i(0)$.

12. On a supposé, dans ce qui précède, que les fonctions X_1, X_2, ..., X_n dépendent du temps t. Il est important d'examiner le cas où t n'entre pas dans les équations. Tout à l'heure, la période était nécessairement déterminée : c'était la période ω de t dans les X. Maintenant, au contraire, la période pourra être quelconque. D'autre part, si les équations admettent une solution périodique, elles en admettront une infinité; d'une solution on en déduit, en effet, une autre en changeant t en $t+h$, h étant une constante arbitraire. Il ne peut donc pas arriver, dans le cas actuel, que les équations (8) déterminent *une seule* solution périodique.

Ces remarques faites, écrivons le système d'équations

$$(10) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et supposons qu'on ait, pour $\mu = 0$, la solution périodique de période ω

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(t).$$

Ici les φ seront des fonctions *analytiques* de t; si donc, pour le système (10), nous désignons, comme plus haut, par

$$\varphi_i(0) - x_i^0$$

la valeur de x_i pour $t = 0$, nous sommes assuré que la valeur

$$f_i(\omega - \tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu)$$

de x_i pour $t = \omega + \tau$ sera une fonction holomorphe de

$$x_1^0, \quad x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n^0, \quad \mu \quad \text{et} \quad \tau$$

pour des petites valeurs de ces grandeurs. Si nous écrivons alors les équations

$$(11)\quad f_i(\omega+\tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu) - f_i(0, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

nous aurons n équations analogues aux équations (8), et ces équations seront vérifiées pour

$$x_1^0 = x_2^0 = \ldots = x_n^0 = \mu = \tau = 0,$$

puisque alors les équations (11) se réduisent à

$$\varphi_i(\omega) - \varphi_i(0) = 0.$$

Les équations (11) renferment $n+1$ inconnues $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ et τ, tandis que les équations (8) ne renfermaient que n inconnues et correspondaient à $\tau = 0$. Or ici, si l'on faisait $\tau = 0$, on aurait des équations dont le déterminant fonctionnel par rapport à $x_1^0, \ldots, x_n^0$ serait certainement nul, d'après ce que nous avons dit plus haut sur la multiplicité nécessaire des solutions périodiques, quand elles existent. Au contraire, en se donnant arbitrairement un des x, soit par exemple $x_n^0 = 0$, les équations (11) détermineront, *en général*,

$$x_1^0, \quad x_2^0, \quad \ldots, \quad x_{n-1}^0 \quad \text{et} \quad \tau$$

en fonction holomorphe de μ.

Nous pouvons encore faire une remarque relativement au cas où il y aurait, pour le système (10), une intégrale première

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu) = \text{const.}$$

On verra, en raisonnant comme au § 11, que les équations (11) ne sont pas distinctes, et l'on peut, si $\frac{dF}{dx_n}$ n'est pas nulle pour $\mu = 0$, $x_i = \varphi_i(0)$, considérer le système

$$F = C, \quad f_i(\omega+\tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu) - f_i(0, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

C étant une constante peu différente de

$$F[\varphi_1(0), \varphi_2(0), \ldots, \varphi_n(0), 0].$$

Dans l'équation $F = C$, on a remplacé x_i par

$$f_i(0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \mu).$$

Au lieu de remplacer les équations (11) par le système qui vient d'être indiqué, on peut encore les remplacer par le suivant, en faisant toujours $x_n^0 = 0$ et en faisant, de plus, $\tau = 0$,

$$f_i(\omega, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \mu) - f_i(0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \mu) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

qui déterminera $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0$. D'où se tire la conséquence importante que, *dans le cas où il y a une intégrale première*, on pourra trouver généralement, pour μ petit, une solution périodique ayant la période ω, ce qui n'a pas lieu, en général, quand les équations ne renferment pas le temps.

13. Nous avons établi, dans des cas généraux, sous la condition qu'un certain déterminant fonctionnel ne soit pas nul, l'existence d'une solution périodique. Terminons ces généralités en montrant quelles opérations on devra faire pour calculer ces intégrales. C'est une question à laquelle nous avons indirectement touché au § 9. Reprenons le système tel que nous l'avions écrit dans ce paragraphe

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + b_i\mu + \ldots,$$

les coefficients de ces développements étant des fonctions de t de période ω.

Nous avons, pour $\mu = 0$, la solution périodique

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

D'après ce que nous avons dit, il y aura, en général, *une* solution périodique pour μ suffisamment petit. Cette solution peut être développée suivant les puissances de μ. Écrivons donc

$$x_i = x_{i1}\mu + x_{i2}\mu^2 + \ldots;$$

les coefficients des diverses puissances de μ doivent être des fonctions périodiques de t avec la période ω. Nous aurons d'abord, pour déterminer les x_{i1}, les équations

$$\frac{dx_{i1}}{dt} = a_{i1}x_{11} + a_{i2}x_{21} + \ldots + a_{in}x_{n1} + b_i.$$

Peut-on satisfaire à ces équations en prenant pour

$$x_{11}, \quad x_{21}, \quad \ldots, \quad x_{n1}$$

des fonctions périodiques de t? On voit qu'il en sera certainement ainsi en général, et précisément quand un déterminant, qui n'est autre que celui que nous avions à considérer au § 8, ne sera pas nul. Les coefficients des diverses puissances de μ dans les x_i se calculent de proche en proche sans qu'on soit jamais arrêté, si on ne l'a pas été au début, et l'on aura ainsi la solution périodique cherchée dont l'existence a été antérieurement démontrée.

14. Remarquons, en terminant, que les considérations précédentes trouveront leur application dans un cas un peu plus compliqué. Écrivons les $p+q$ équations

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_q) & (i = 1, 2, \ldots, p), \\ \dfrac{dy_i}{dt} = Y_i(x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_q) & (i = 1, 2, \ldots, q), \end{cases}$$

où nous supposons que les X et Y soient des fonctions périodiques des y admettant la période 2π, c'est-à-dire ne changeant pas quand on change y_i en $y_i + 2\pi$. On pourra appeler *solution périodique* de ce système d'équations avec la période ω une solution

$$\begin{aligned} x_i &= \varphi_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p), \\ y_i &= \psi_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, q), \end{aligned}$$

satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} \varphi_i(t+\omega) &= \varphi_i(t), \\ \psi_i(t+\omega) &= \psi_i(t) + 2k_i\pi, \end{aligned}$$

les k_i étant des entiers. Il est clair, d'après la forme des équations différentielles (12), qu'une solution sera périodique, si l'on a

$$\varphi_i(\omega) = \varphi_i(0), \qquad \psi_i(\omega) = \psi_i(0) + 2k_i\pi.$$

La théorie développée dans les paragraphes précédents pourra encore s'appliquer aux équations (12) et à leurs solutions périodiques. On formera les équations analogues aux équations (11); les q dernières d'entre elles auront seulement, dans le second membre $2k_i\pi$, les entiers k_i correspondant à la solution périodique initiale des équations pour $\mu = 0$.

III. — Application au problème des trois corps.

15. Une des plus importantes applications que M. Poincaré ai faites des généralités qui précèdent est relative au problème des troi corps. Prenons trois points, M_0, M_1, M_2, de masses m_0, m_1, m_2; nou allons considérer les deux dernières comme petites, et nous poseron

$$m_1 = \alpha_1 \mu, \qquad m_2 = \alpha_2 \mu,$$

α_1 et α_2 étant des constantes fixes. Concevons que l'on ait écrit le équations différentielles du mouvement de ces trois points s'attiran suivant la loi de Newton. Que deviendra ce système, si l'on y fai $\mu = 0$? Si (ξ_0, η_0, ζ_0) désignent les coordonnées du point M_0 par rap port à des axes fixes, les équations du mouvement du point M_0 s réduiront évidemment à

$$\frac{d^2\xi_0}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2\eta_0}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2\zeta_0}{dt^2} = 0,$$

et l'on aura, pour le point $M_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$,

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = -f\frac{m_0}{r_1^2}\,\frac{\xi_1 - \xi_0}{r_1} \qquad (r_1 = \overline{M_0M_1})$$

et les deux équations analogues, f désignant le coefficient d'attraction On aura de même, pour le point M_2,

$$\frac{d^2\xi_2}{dt^2} = -f\frac{m_0}{r_2^2}\,\frac{\xi_2 - \xi_0}{r_2} \qquad (r_2 = \overline{M_0M_2}).$$

Une solution du problème des trois corps, pour $\mu = 0$, sera don obtenue en prenant le point M_0 fixe, les deux autres points se mou vant séparément autour de M_0 suivant les lois de Képler. Ce cas par ticulier se ramène donc au problème des deux corps. Si les temps d révolution de M_1 et de M_2 autour de M_0 sont commensurables entr eux, il est clair qu'au bout d'un certain temps tout le système s retrouvera dans sa situation initiale.

Le problème des trois corps, pour $\mu = 0$, admettra donc de solutions périodiques.

En restant toujours dans le même cas ($\mu = 0$), le problème de

trois corps admet d'autres solutions que l'on doit aussi regarder comme périodiques. Bornons-nous au cas où les trois points resteraient dans un même plan. Le point M_0 restant toujours fixe, rapportons le mouvement des deux autres points à deux axes tournant d'un mouvement uniforme autour de M_0. Nous allons voir immédiatement qu'il peut arriver que les mouvements de M_1 et M_2 par rapport à ces axes soient périodiques. Au bout d'un temps égal à la période, les trois corps se trouveront dans la même position relative, c'est-à-dire que leurs distances respectives auront repris la même valeur. Nous devons regarder un tel mouvement comme périodique. Imaginons par exemple que, pour $t = 0$, les trois points soient sur une ligne droite D; on peut donner à M_1 et M_2 des vitesses initiales telles que M_1 et M_2 décrivent des circonférences autour de M_0, et désignons par n et n' les vitesses angulaires des droites $\overline{M_0 M_1}$ et $\overline{M_0 M_2}$. Soit, pour fixer les idées, $n' > n$; au bout du temps

$$\frac{2\pi}{n'-n},$$

les angles faits par $M_0 M_1$ et $M_0 M_2$ avec la droite initiale D sont respectivement

$$\frac{2\pi n}{n'-n}, \quad \frac{2\pi n'}{n'-n},$$

et leur différence est égale à 2π, c'est-à-dire qu'au bout du temps $\frac{2\pi}{n'-n}$ les trois corps se trouvent de nouveau en ligne droite, ayant repris la même position relative les uns à l'égard des autres. Si donc on rapporte le système à des axes mobiles tournant d'un mouvement uniforme avec la vitesse angulaire n, les coordonnées de M_1 et M_2 par rapport à ces axes mobiles seront des fonctions périodiques du temps de période $\frac{2\pi}{n'-n}$.

16. Nous voulons maintenant rechercher s'il y a une solution périodique pour de petites valeurs de μ. Nous allons d'abord écrire les équations du mouvement, telles qu'elles sont classiques en Mécanique céleste, des points M_1 et M_2 autour de M_0. Faisons donc d'abord passer par ce point deux axes rectangulaires de directions fixes (nous nous bornons au plan), nous aurons, en désignant par (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les coordonnées de M_1 et M_2 par rapport à ces axes, les équa-

tions différentielles où nous faisons le coefficient d'attraction f *égal* à l'unité

$$
(\mathrm{S})\quad
\begin{cases}
\dfrac{d^2x_1}{dt^2}+m_0\dfrac{x_1}{r_1^3}+m_1\dfrac{x_1}{r_1^3}+m_2\dfrac{x_2}{r_2^3}=\dfrac{1}{m_1}\dfrac{\partial U'}{\partial x_1},\\[2mm]
\dfrac{d^2y_1}{dt^2}+m_0\dfrac{y_1}{r_1^3}+m_1\dfrac{y_1}{r_1^3}+m_2\dfrac{y_2}{r_2^3}=\dfrac{1}{m_1}\dfrac{\partial U'}{\partial y_1},\\[2mm]
\dfrac{d^2x_2}{dt^2}+m_0\dfrac{x_2}{r_2^3}+m_1\dfrac{x_1}{r_1^3}+m_2\dfrac{x_2}{r_2^3}=\dfrac{1}{m_2}\dfrac{\partial U'}{\partial x_2},\\[2mm]
\dfrac{d^2y_2}{dt^2}+m_0\dfrac{y_2}{r_2^3}+m_1\dfrac{y_1}{r_1^3}+m_2\dfrac{y_2}{r_2^3}=\dfrac{1}{m_2}\dfrac{\partial U'}{\partial y_2}.
\end{cases}
$$

Dans ces équations, que j'emprunte au *Traité de Mécanique céleste* de M. Tisserand (t. I, p. 72), r_1 et r_2 désignent les distances de M_1 et M_2 à M_0, et l'on a

$$U'=\frac{m_1m_2}{r_{12}},$$

en appelant r_{12} la distance M_1M_2.

Je rappelle encore que le système (S) admet deux intégrales premières, celle des aires et celle des forces vives. J'écris ces deux intégrales

$$
(13)\quad
\begin{cases}
m_1\left(x_1\dfrac{dy_1}{dt}-y_1\dfrac{dx_1}{dt}\right)+m_2\left(x_2\dfrac{dy_2}{dt}-y_2\dfrac{dx_2}{dt}\right)\\[2mm]
\quad+\dfrac{m_1m_2}{m_0}\left[(x_1-x_2)\dfrac{d(y_1-y_2)}{dt}-(y_1-y_2)\dfrac{d(x_1-x_2)}{dt}\right]=\gamma,
\end{cases}
$$

γ étant la constante arbitraire,

$$
(14)\quad
\begin{cases}
m_1\left(\dfrac{dx_1^2}{dt^2}+\dfrac{dy_1^2}{dt^2}\right)+m_2\left(\dfrac{dx_2^2}{dt^2}+\dfrac{dy_2^2}{dt^2}\right)\\[2mm]
\quad-2\left(1+\dfrac{m_1+m_2}{m_0}\right)\left[m_0\left(\dfrac{m_1}{r_1}+\dfrac{m_2}{r_2}\right)+U'\right]\\[2mm]
\quad+\dfrac{m_1m_2}{m_0}\left[\left(\dfrac{dx_1}{dt}-\dfrac{dx_2}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy_1}{dt}-\dfrac{dy_2}{dt}\right)^2\right]=h.
\end{cases}
$$

17. Les équations différentielles classiques que nous venons d'écrire ne sont pas celles dont nous devons nous servir. Il faut les transformer en rapportant le mouvement à des axes $M_0\xi$, $M_0\eta$, animés d'un mouvement de rotation uniforme autour de M_0 avec la vitesse angulaire n. On pourrait se servir des formules de transfor-

mation de coordonnées

$$x = \xi \cos nt - \eta \sin nt,$$
$$y = \xi \sin nt + \eta \cos nt$$

pour transformer le système S. On arrivera bien plus rapidement au système d'équations différentielles relatif à ξ et η en appliquant la théorie des mouvements relatifs. Les équations cherchées seront les équations (S), où nous remplacerons (x_1, y_1) et (x_2, y_2) respectivement par (ξ_1, η_1) et (ξ_2, η_2), coordonnées de M_1 et M_2 par rapport aux axes mobiles $M_0\xi$, $M_0\eta$, pourvu que nous ajoutions aux seconds membres les projections de l'accélération centrifuge et de l'accélération centrifuge composée. Ces projections seront, d'une manière générale, pour la première,

$$n^2\xi, \quad n^2\eta,$$

et, pour la seconde,

$$2n\frac{d\eta}{dt}, \quad -2n\frac{d\xi}{dt}.$$

Nous aurons donc un système (Σ) qui ne sera pas autre chose que le système (S) où l'on aura remplacé les (x, y) par (ξ, η) et où l'on aura ajouté respectivement dans les seconds membres des deux premières

$$n^2\xi_1 + 2n\frac{d\eta_1}{dt},$$
$$n^2\eta_1 - 2n\frac{d\xi_1}{dt},$$

et de même pour la troisième et la quatrième, l'indice *deux* remplaçant l'indice *un*. Le système (Σ) admettra deux intégrales premières. En substituant à la place de x et y leurs valeurs en (ξ) et (η) dans les équations (13) et (14), on obtiendra ces deux intégrales premières et il est à remarquer que le temps n'y figurera pas explicitement. De plus, en remplaçant m_1 et m_2 par $\alpha_1\mu$ et $\alpha_2\mu$, la quantité μ se trouvera en facteur dans le premier membre des intégrales; on pourra la supprimer en modifiant les constantes h et γ.

Nous aurons donc le système (Σ) avec ses deux intégrales premières.

On a, en définitive, huit équations du premier ordre, en

$$\xi_1, \quad \eta_1, \quad \xi_2, \quad \eta_2, \quad \xi'_1, \quad \eta'_1, \quad \xi'_2, \quad \eta'_2,$$

en posant

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \xi'_1, \qquad \frac{d\eta_1}{dt} = \eta'_1, \qquad \frac{d\xi_2}{dt} = \xi'_2, \qquad \frac{d\eta_2}{dt} = \eta'_2.$$

L'application de la théorie générale exposée dans la Section précédente, pour le cas où la période serait $\frac{2\pi}{n'-n}$, nous conduira à *huit* équations que nous aurions maintenant à discuter. Ces équations se réduisent à *six* puisqu'il y a deux intégrales premières. Écrivons les premiers membres de ces intégrales premières en y faisant $\mu = 0$ (on a préalablement divisé par μ, comme nous l'avons dit plus haut) ; on aura

$$\alpha_1\left(\xi_1\frac{d\eta_1}{dt} - \eta_1\frac{d\xi_1}{dt}\right) + n\alpha_1(\xi_1^2+\eta_1^2) + \alpha_2\left(\xi_2\frac{d\eta_2}{dt} - \eta_2\frac{d\xi_2}{dt}\right) + n\alpha_2(\xi_2^2+\eta_2^2),$$

$$\alpha_1\left(\frac{d\xi_1^2}{dt^2} + \frac{d\eta_1^2}{dt^2}\right) + n^2\alpha_1(\xi_1^2+\eta_1^2) + 2n\alpha_1\left(\xi_1\frac{d\eta_1}{dt} - \eta_1\frac{d\xi_1}{dt}\right) + \alpha_2\left(\frac{d\xi_2^2}{dt^2} + \frac{d\eta_2^2}{dt^2}\right)$$
$$+ n^2\alpha_2(\xi_2^2+\eta_2^2) + 2n\alpha_2\left(\xi_2\frac{d\eta_2}{dt} - \eta_2\frac{d\xi_2}{dt}\right) - 2m_0\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\xi_2^2+\eta_2^2}}\right).$$

Prenons le déterminant fonctionnel de ces deux expressions par rapport à η'_1 et η'_2. Il se réduit à

$$2\alpha_1\alpha_2(\xi_1\eta'_2 - \xi_2\eta'_1).$$

Or, nous prenons comme positions initiales, dans le mouvement correspondant à $\mu = 0$, deux positions de M_1 et M_2 sur l'axe des ξ qui, pour $t = 0$, coïncide, comme nous pouvons le supposer, avec Ox. Les vitesses initiales sont perpendiculaires à $M_0\xi$, et l'on a évidemment au temps $t = 0$

$$\eta'_1 = 0, \qquad \eta'_2 = (n' - n)\xi_2.$$

On a, par suite, pour l'expression ci-dessus,

$$2\alpha_1\alpha_2\xi_1\xi_2(n' - n).$$

Quant à n et n', ils sont determinés en fonction de ξ_1 et ξ_2 par les relations qui se tirent de suite de la comparaison des deux expressions de la forme

$$n^2\xi_1^3 = m_1, \qquad n'^2\xi_2^3 = m_2.$$

Les valeurs initiales de M_0M_1 et M_0M_2 étant arbitraires, on n'a

pas $n = n'$. Le déterminant fonctionnel des deux intégrales premières par rapport à η'_1 et η'_2 n'est donc pas nul. Nous pouvons donc, des *huit* équations que nous avons à écrire, supprimer celles qui sont obtenues en écrivant que les valeurs de η'_1 et η'_2 sont égales pour $t = 0$ et pour $t = \frac{2\pi}{n'-n}$ (§ 11). Il resterait donc six équations à discuter; c'est une étude qui ne présente pas, après ce qui précède, de véritable difficulté. Nous ne la ferons pas ici, car nous serions ainsi entraîné à d'assez longs calculs. Énonçons seulement le résultat: On est assuré de pouvoir toujours résoudre les six équations dont nous venons de parler par rapport à *six* des huit inconnues

$$\text{(H)} \qquad \xi_1^0,\quad \eta_1^0,\quad \xi_2^0,\quad \eta_2^0,\quad \xi_1'^0,\quad \eta_1'^0,\quad \xi_2'^0,\quad \eta_2'^0$$

qui y figurent et qui, conformément à nos notations précédentes, représentent les accroissements que l'on doit donner aux valeurs des lettres correspondantes, relatives à $t = 0$ et à la solution périodique choisie pour $\mu = 0$, pour avoir les valeurs initiales relatives à $t = 0$ de la solution que l'on cherche. Il faut toutefois que l'on n'ait pas $n = -n'$ et que n ne soit pas multiple de $n' - n$.

Il existe donc, pour le problème des trois corps, μ étant petit, une infinité de solutions périodiques. Cette infinité dépendra de *quatre* arbitraires, car deux des inconnues de la suite (H) ont des valeurs arbitraires (petites) et les distances initiales de M_1 et de M_2 à M_0 peuvent être prises arbitrairement ([1]).

IV. — Sur une autre catégorie de solutions périodiques.

18. Nous allons nous occuper maintenant d'une question présentant une grande analogie avec celle qui a été étudiée dans la Section II, mais où, toutefois, des circonstances assez différentes vont se présenter.

Prenons le système d'équations différentielles

$$(15) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \qquad \dots \qquad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

([1]) On trouvera dans l'Ouvrage de M. Poincaré (*Les nouvelles méthodes de Mécanique céleste*, t. I, p. 95 et suiv.) une étude de diverses solutions périodiques du problème des trois corps.

où les X dépendent de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et d'un paramètre μ; de plus, les X s'annulent pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, *quel que soit* μ.

Le système admet alors, pour solution particulière, la solution où tous les x sont identiquement nuls. Nous allons chercher s'il existe des solutions ayant une période ω, différant fort peu de zéro quand μ est très petit, et se réduisant à *zéro* pour $\mu = 0$.

Nous désignons toujours par $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ les valeurs initiales de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous aurons

$$x_i = f_i(t, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

les f_i sont des fonctions holomorphes de $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ et s'annulent, quels que soient μ et t, pour $x_1^0 = x_2^0 = \ldots = x_n^0 = 0$.

Il faut discuter les équations

$$(16) \quad f_i(\omega, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu) - f_i(0, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

si l'on veut chercher les intégrales ayant la période ω. On voit immédiatement que nous sommes dans des circonstances différentes de celles que nous avions précédemment, car les équations précédentes sont vérifiées, quel que soit μ, pour $x_1^0 = \ldots = x_n^0 = 0$.

Étudions le déterminant fonctionnel des premiers membres des équations (16) par rapport à $x_1^0, \ldots, x_n^0$ et calculons sa valeur pour

$$x_1^0 = x_2^0 = \ldots = x_n^0 = \mu = 0.$$

Cherchons, à cet effet, ce que deviennent les équations (16) quand on fait, dans les équations (15), $\mu = 0$ et que l'on réduit les X à leurs termes du premier degré en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dans ces conditions, les équations (15) se réduisent aux équations linéaires

$$(17) \qquad \frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

les équations (16) deviennent alors des équations exprimant que la solution de (17) répondant aux valeurs initiales $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ est périodique et de période ω. Or, considérons l'équation

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

On sait que les racines de cette équation en λ font connaître les intégrales du système (17); supposons-les distinctes et désignons-les par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. En écrivant que (17) admet une solution périodique, nous aurons un système de n équations linéaires et homogènes en $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, et leur déterminant est le déterminant que nous cherchons. Or (17) ne peut admettre de solutions périodiques que si l'on a pour un des λ, soit λ_i,

$$\lambda_i \omega = 2k\pi i \qquad (k \text{ entier}),$$

car une expression de la forme

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + \alpha_n e^{\lambda_n t},$$

où les α sont des constantes, ne peut admettre la période ω que si l'un de ces termes admet cette période. Le déterminant cherché ne s'annulera donc que si un des λ est de la forme $\frac{2k\pi i}{\omega}$; il est donc égal à

$$\Delta = (e^{\lambda_1 \omega} - 1)(e^{\lambda_2 \omega} - 1)\ldots(e^{\lambda_n \omega} - 1),$$

comme on le verrait encore, par un calcul facile, en réduisant par un changement linéaire de variables les équations (17) à une forme canonique où la première équation ne dépendrait que de x_1, la seconde de x_2, et ainsi de suite.

Ceci posé, *si Δ est différent de zéro*, les équations (16) qui sont vérifiées pour $x_1^0 = \ldots = x_n^0 = 0$, quel que soit μ, admettront cette solution *comme solution simple*, et, par suite, nous ne trouvons pas de solution périodique voisine de zéro si ce n'est la solution évidente où tous les x sont identiquement nuls. En d'autres termes, pour avoir une solution nouvelle, il faut nécessairement que ω soit de la forme

$$\frac{2k\pi i}{\lambda_i},$$

λ_i étant une des racines de l'équation en λ. Comme ω doit être réel, on remarquera que λ_i ne doit pas contenir de partie réelle, et, comme les racines de l'équation en λ sont deux à deux conjuguées, il en résulte que deux facteurs de Δ seront nuls quand Δ sera nul.

19. Nous allons donc supposer que ω soit de la forme qui vient d'être indiquée; cherchons alors s'il y aura des solutions périodiques

de période ω. Prenons d'abord le cas de deux équations où la discussion sera plus simple. Les équations (17) se réduisent alors à

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy. \end{cases}$$

L'équation en λ est ici

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0,$$

et, pour pouvoir trouver une période réelle ω, il faut que

$$a + d = 0, \qquad ad - bc > 0.$$

Désignons par αi et $-\alpha i$ les racines de l'équation précédente, nous pouvons prendre

$$\omega = \frac{2\pi}{\alpha}.$$

Les équations (18) auront alors toutes leurs solutions périodiques, et, par suite, les équations en x_0 et y_0, obtenues en écrivant que les solutions prenant pour $t = 0$ les valeurs x_0 et y_0 sont périodiques, seront identiquement vérifiées. C'est là un point très important, car, si nous prenons maintenant les équations

$$(19)\quad f_i(\omega, x_0, y_0, \mu) - f_i(0, x_0, y_0, \mu) = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

nous voyons que, pour $\mu = 0$, ces équations ne renferment pas de termes du premier degré en x_0 et y_0. Les équations précédentes pourront donc s'écrire

$$(20)\quad \begin{cases} \mu(\alpha x_0 + \beta y_0) + \ldots = 0, \\ \mu(\alpha' x_0 + \beta' y_0) + \ldots = 0, \end{cases}$$

les termes non écrits étant de degré supérieur au premier en x_0 et y_0. Les coefficients α, α', β, β' sont des fonctions de μ et, en général, $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ ne s'annulera pas pour $\mu = 0$.

On aura à discuter les solutions communes aux équations (20) en x_0 et y_0. Celles-ci, en y regardant x_0 et y_0 comme des coordonnées courantes, peuvent être considérées comme représentant deux courbes. Pour μ différent de zéro, ces deux courbes ont un point simple de rencontre à l'origine; pour μ nul, les deux courbes ont

plus d'un point commun à l'origine. Il en résulte que, pour μ très petit, les deux courbes auront au moins un point commun très voisin de l'origine. Mais ici une remarque très importante est à faire : si les équations (20) ont une solution différente de zéro, elles auront une infinité de solutions formant une suite continue, car, les équations différentielles ne renfermant pas t explicitement, il y aura une infinité de solutions périodiques s'il y en a une (en dehors de $x = y = 0$). Il en résulte que, en réalité, les courbes (20) ont, pour μ petit, une petite courbe fermée commune restant dans le voisinage de l'origine et représentant la solution périodique sur le plan (x_0, y_0); cette petite courbe diminue de plus en plus à mesure que μ tend vers zéro. Il est clair qu'il faudrait une discussion plus approfondie pour décider la question de la réalité; il n'y a là toutefois aucune difficulté essentielle, car on peut calculer, comme nous l'avons vu, autant de termes que l'on veut dans les équations (20) et, par suite, la discussion complète pourra toujours être faite dans chaque cas particulier.

20. Après avoir étudié le cas de deux équations, il est aisé de se rendre compte de ce qui arrivera dans le cas général. En écrivant que les équations (17) ont une solution périodique de période ω $\left(\omega\text{ étant égal à } \frac{2\pi i}{\lambda_i}\right)$, on devra obtenir *non pas seulement une, mais deux solutions périodiques indépendantes,* qui seront en $\cos\frac{2\pi t}{\omega}$ et $\sin\frac{2\pi t}{\omega}$; ces deux équations se réduiront donc à $n-2$ équations et, par suite, quand on fait $\mu = 0$ dans les premiers membres des équations

$$f_i(\omega, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu) - f_i(0, x_1^0, \ldots, x_n^0, \mu) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les termes du premier degré en $x_1^0, \ldots, x_n^0$ se réduisent à $n-2$ expressions linéaires distinctes. Les équations pourront donc être ramenées à la forme

$$\begin{aligned} \alpha_{i1}x_1^0 + \ldots + \alpha_{in}x_n^0 + \ldots &= 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2), \\ \mu(\beta_{i1}x_1^0 + \ldots + \beta_{in}x_n^0) + \ldots &= 0 \qquad (i = 1, 2), \end{aligned}$$

les α et les β ne s'annulant pas, en général, pour $\mu = 0$. En tirant des $n-2$ premières équations $n-2$ des quantités $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ en fonction des deux qui restent et substituant dans les deux der-

nières équations, on sera ramené au cas de $n = 2$, que nous avons étudié dans le paragraphe précédent.

21. On peut appliquer le même genre de considérations à un système d'équations dans lequel ne figurent plus de paramètres arbitraires μ. Soit

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les X_i s'annulant pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Nous voulons chercher les solutions périodiques s'éloignant peu de zéro. Nous commencerons par répéter ce que nous avons dit au § 18.

En désignant par

$$x_i = f_i(t, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

la solution correspondant aux valeurs initiales $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, nous avons les équations

$$f_i(\omega, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) - f_i(0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0$$

pour les intégrales ayant la période ω. Si l'on considère encore l'équation en λ du § 18, on voit que, si ω ne satisfait pas aux conditions indiquées dans ce paragraphe, la solution

$$x_1^0 = x_2^0 = \ldots = x_n^0 = 0$$

sera une solution simple des équations précédentes. En désignant par ω une quantité satisfaisant à ces conditions, nous allons chercher s'il y a une solution périodique de période $\omega + \tau$, τ étant une quantité petite. Nous avons alors les équations

$$f_i(\omega + \tau, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) - f_i(0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Raisonnant comme au § 20, nous voyons que, dans ces équations, les termes du premier degré en $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ se réduisent à $n - 2$ expressions linéaires distinctes; la quantité τ joue ici le même rôle que jouait ci-dessus la quantité μ.

V. — Des solutions asymptotiques de certaines équations différentielles.

22. Considérons le système d'équations différentielles

$$(21) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les X_i s'annulant pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ et ne contenant pas t explicitement. On peut supposer, comme nous l'avons vu précédemment, que dans les X les termes du premier degré se réduisent respectivement à $\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n$.

Il y a des cas étendus où l'on peut trouver certaines solutions intéressantes de ce système. Faisons d'abord un changement de variable, en posant

$$\theta = e^t;$$

nous aurons alors le système

$$\theta \frac{dx_i}{d\theta} = \lambda_i x_i + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Reportons-nous maintenant aux § 11 et 12 du Chapitre I. Sous les conditions indiquées dans ces paragraphes, nous pourrons, en posant

$$y_1 = \theta^{\lambda_1}, \qquad y_2 = \theta^{\lambda_2}, \qquad \ldots, \qquad y_\nu = \theta^{\lambda_\nu},$$

développer les x en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$. Les valeurs des dérivées du premier ordre

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial y_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x_\nu}{\partial y_\nu},$$

pour $y_1 = y_2 = \ldots = y_\nu = 0$, restent arbitraires. En désignant par A_1, $A_2, \ldots, A_\nu$ les valeurs initiales de ces dérivées, les développements précédents procèdent, en réalité, suivant les puissances croissantes de

$$A_1 y_1, \quad A_2 y_2, \quad \ldots, \quad A_\nu y_\nu.$$

Ils sont convergents, tant que ces quantités ont des modules suffisamment petits. Si nous revenons aux équations (21), *nous aurons des développements des x procédant suivant les puissances de*

$$A_1 e^{\lambda_1 t}, \quad A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad A_\nu e^{\lambda_\nu t}.$$

Ces développements seront convergents, tant que ces quantités auront des modules assez petits. Si l'on veut faire croître t indéfiniment, il faudra égaler à zéro les A qui correspondent à des λ dont la partie réelle est positive. En prenant les autres constantes A assez petites, on est assuré d'avoir des développements valables de $t = 0$ à $t = \infty$. Il est clair d'ailleurs que, si l'on prend seulement des λ ayant leurs parties réelles négatives, les points correspondant à ces λ sont du même côté d'une même droite passant à l'origine, et, par suite, la condition 1° de la page 18 est remplie.

Les solutions précédentes tendent vers *zéro* quand t augmente indéfiniment : *elles sont asymptotiques à la solution*

$$x_1 = \ldots = x_n = 0.$$

23. Nous allons généraliser le théorème qui précède. Au lieu du système (21), prenons le système

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les X dépendant de t. On suppose toujours que les X s'annulent pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, quel que soit t, et, de plus, les coefficients des diverses puissances des x dans les développements sont *des fonctions analytiques périodiques* de t et de période 2π. En réduisant les X à leurs parties linéaires, on aura un système d'équations linéaires

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les a étant des fonctions périodiques de t. L'intégrale générale de ce système est de la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 e^{\lambda_1 t} f_{11} + \ldots + A_n e^{\lambda_n t} f_{1n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= A_1 e^{\lambda_1 t} f_{n1} + \ldots + A_n e^{\lambda_n t} f_{nn}, \end{aligned}$$

les f étant des fonctions périodiques ([1]). Remarquons que le déter

([1]) Nous nous appuyons sur ce résultat, aujourd'hui bien classique dans la théorie des équations linéaires, comme nous l'avons d'ailleurs déjà fait dans ce Chapitre. Nous reviendrons plus tard sur la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques.

minant des coefficients de $A_1, \ldots, A_n$ dans ces expressions est une fonction de t essentiellement différente de zéro. En faisant maintenant le changement de variable

$$x_1 = \xi_1 f_{11} + \xi_2 f_{12} + \ldots + \xi_n f_{1n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x_n = \xi_1 f_{n1} + \xi_2 f_{n2} + \ldots + \xi_n f_{nn},$$

nous avons, pour les ξ, des équations de même forme, mais où les termes du premier degré se réduisent respectivement à

$$\lambda_1 \xi_1, \quad \lambda_2 \xi_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n \xi_n,$$

puisque ξ_1, étant de la forme $A_1 e^{\lambda_1 t}$, est l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \lambda_1 \xi_1,$$

et de même pour les autres.

21. Nous pouvons donc partir des équations

$$\frac{dx_k}{dt} = \lambda_k x_k + \ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

les λ étant des constantes, et les coefficients des termes de degré supérieur au premier dans les seconds membres étant des fonctions périodiques de t. Posons toujours $\theta = e^t$, nous aurons le système

$$(22) \qquad \theta \frac{dx_k}{d\theta} = \lambda_k x_k + \ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Les coefficients, sauf les λ, sont des fonctions périodiques de t ayant 2π pour période; ils peuvent donc être développés en séries trigonométriques

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n e^{nti} + \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n e^{-nti} \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Si l'on pose $e^{ti} = u$ et $e^{-ti} = v$, les deux séries

$$(23) \qquad \sum A_n u^n \quad \text{et} \quad \sum B_n v^n$$

seront convergentes dans le plan des variables u et v à l'intérieur de

cercles de rayons supérieurs à l'unité; ceci est une conséquence immédiate de ce que nous supposons *analytiques* les fonctions périodiques de t et, par suite, holomorphes dans le plan de la variable t à l'intérieur d'une bande parallèle à l'axe réel et comprenant cet axe à son intérieur. Désignons par R le rayon supérieur à l'unité d'un cercle à l'intérieur duquel convergent les séries (23).

Cherchons si nous pouvons trouver des solutions x du système (22) mises sous forme de séries ordonnées suivant les puissances croissantes de

$$y_1 = \theta^{\lambda_1}, \quad y_2 = \theta^{\lambda_2}, \quad \dots, \quad y_\nu = \theta^{\lambda_\nu}, \quad u = \theta^{i}, \quad v = \theta^{-i} \quad (\nu \leqq n).$$

Nous aurons alors le système d'équations aux dérivées partielles, en dissolvant pour un moment, comme nous l'avons déjà fait dans des occasions semblables, toute relation entre $y_1, \dots, y_\nu$, u et v,

$$(24)\quad \begin{cases} \lambda_1 y_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} + \lambda_2 y_2 \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} + \dots + \lambda_\nu y_\nu \dfrac{\partial x_1}{\partial y_\nu} + iu \dfrac{\partial x_1}{\partial u} - iv \dfrac{\partial x_1}{\partial v} - \lambda_1 x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, \\ \lambda_1 y_1 \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} + \lambda_2 y_2 \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} + \dots + \lambda_\nu y_\nu \dfrac{\partial x_2}{\partial y_\nu} + iu \dfrac{\partial x_2}{\partial u} - iv \dfrac{\partial x_2}{\partial v} - \lambda_2 x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1 y_1 \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} + \lambda_2 y_2 \dfrac{\partial x_n}{\partial y_2} + \dots + \lambda_\nu y_\nu \dfrac{\partial x_n}{\partial y_\nu} + iu \dfrac{\partial x_n}{\partial u} - iv \dfrac{\partial x_n}{\partial v} - \lambda_n x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, \end{cases}$$

les φ commençant par des termes du second degré en $x_1, x_2, \dots, x_n$.

On peut, à l'aide de ces équations, calculer des développements des x suivant les puissances de $y_1, y_2, \dots, y_\nu$, u, v, en supposant qu'ils s'annulent pour $y_1 = y_2 = \dots = y_\nu = 0$, et que les coefficients des termes du premier degré en $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ sont des constantes indépendantes de u et v.

Seules les valeurs des dérivées du premier ordre

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial y_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial x_\nu}{\partial y_\nu},$$

pour $y_1 = y_2 = \dots = y_\nu = 0$, restent arbitraires. Le coefficient d'une dérivée d'une quelconque des fonctions x, soit d'une manière générale

$$\frac{\partial^{p_1+\dots+p_\nu+k+l}}{\partial y_1^{p_1}\, \partial y_2^{p_2} \dots \partial y_\nu^{p_\nu}\, \partial u^k\, \partial v^l}$$

dans le calcul des dérivées successives pour les valeurs *zéro* des

variables, est égal à

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_\nu p_\nu + ki - li - \lambda_h.$$

D'ailleurs, d'après la forme admise pour le développement, on n'a à considérer dans ces calculs que des dérivées pour lesquelles $p_1 + \ldots + p_\nu \geqq 2$.

Nous allons faire maintenant des hypothèses parallèles à celles que nous avons faites (Chap. I de ce Volume). Nous aurons seulement ici à considérer les $\nu + 2$ points

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_\nu, \quad i, \quad -i.$$

On suppose d'abord que *les expressions*

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_\nu p_\nu + \gamma i - \lambda_h$$

ne peuvent s'annuler, les p étant des entiers positifs dont la somme est égale ou supérieure à deux, *et γ étant un entier positif ou négatif.*

Nous avons encore besoin, pour la suite de la démonstration, que l'expression

$$|\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_\nu p_\nu + \gamma i - \lambda_h| \tag{25}$$

reste supérieure à un nombre fixe. Or considérons le quotient

$$\frac{\lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_\nu p_\nu + \gamma i}{p_1 + \ldots + p_\nu + |\gamma|}.$$

Il représente l'affixe du centre de gravité des masses $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ et $|\gamma|$ placées aux points $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ et au point $+i$ ou au point $-i$, suivant que γ est positif ou négatif. Si donc on peut entourer les points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ et $+i$ d'une part et, d'autre part, les points λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ et $-i$ par des polygones convexes *ne comprenant pas l'origine*, le quotient précédent restera supérieur à un nombre fixe. Or on a

$$\frac{\lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_\nu p_\nu + \gamma i - \lambda_h}{p_1 + \ldots + p_\nu + |\gamma|} = \frac{\lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_\nu p_\nu + \gamma i}{p_1 + \ldots + p_\nu + |\gamma|} - \frac{\lambda_h}{p_1 + \ldots + p_\nu + |\gamma|},$$

et, comme le second terme du second membre tend vers zéro, il est clair que les expressions (25), qui par hypothèse ne peuvent s'annuler, resteront supérieures à un nombre fixe, puisqu'elles

sont supérieures au produit d'un nombre fixe par la somme $p_1+\ldots+p_\nu+|\gamma|$. Nous désignerons par ε un nombre inférieur aux expressions (25).

25. Il faut maintenant démontrer la convergence des séries que nous avons déduites des équations (24). La méthode suivie dans le cas où u et v ne figurent pas dans les équations, c'est-à-dire la démonstration du § **12** (Chap. I), ne serait pas applicable ici sans quelques longueurs. Celle dont nous allons faire usage, beaucoup plus rapide, pourrait d'ailleurs être employée aussi avec avantage dans le cas particulier que nous venons de citer.

Les fonctions φ qui figurent dans les seconds membres des équations (24) sont des fonctions holomorphes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ autour des origines dans les plans respectifs de ces variables, et de u et v dans des cercles de rayon $R(R>1)$. Nous pouvons prendre comme *fonction de comparaison* pour l'objet que nous avons en vue

$$\begin{aligned}&\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, v)\\&=\left(\frac{M}{1-\dfrac{x_1+\ldots+x_n}{a}}-M-M\frac{x_1+\ldots+x_n}{a}\right)\frac{1}{1-\dfrac{u}{R}}\,\frac{1}{1-\dfrac{v}{R}}.\end{aligned}$$

Ceci posé, en supposant que dans les équations (24) nous prenions l'*unité* comme valeurs initiales de

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1},\quad \frac{\partial x_2}{\partial y_2},\quad \ldots,\quad \frac{\partial x_\nu}{\partial y_\nu},$$

nous remplacerons le système (24) par le système d'équations finies

$$(26)\quad \begin{cases}\varepsilon X_1 &= \varepsilon y_1+\psi(X_1, X_2, \ldots, X_n, u, v),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varepsilon X_\nu &= \varepsilon y_\nu+\psi(X_1, X_2, \ldots, X_n, u, v),\\ \varepsilon X_{\nu+1} &= \psi(X_1, X_2, \ldots, X_n, u, v),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varepsilon X_n &= \psi(X_1, X_2, \ldots, X_n, u, v)\end{cases}$$

qui définissent les X s'annulant pour $y_1=y_2=\ldots=y_\nu=0$, comme fonctions holomorphes de $y_1, \ldots, y_\nu$ et de u et v. On voit immédiatement que les coefficients dans les développements des X donnés par ces équations sont des quantités positives supérieures aux modules des termes correspondants dans les développements des x donnés par

les équations (24). Ceci résulte de l'inégalité

$$\varepsilon < |\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_\nu p_\nu + \gamma i - \lambda_h|.$$

Une seule chose reste à considérer. Quel est le champ de convergence des X définis par les équations (26) dans le plan des variables u et v? Il est essentiel que ce champ corresponde à un cercle d'un rayon supérieur à l'unité pour pouvoir faire t réel quand nous reviendrons à la variable t. Pour répondre à cette question, il suffira de considérer l'unique équation

$$X = y + \frac{M'X^2}{H - X} \frac{1}{1 - \frac{u}{R}} \frac{1}{1 - \frac{v}{R}},$$

en prenant pour les $y_1, \ldots, y_\nu$ leur plus grand module y et faisant tous les X égaux entre eux; M' et H désignant deux constantes positives. La discussion de cette équation du second degré est immédiate; elle peut s'écrire

$$X^2\left[M' + \left(1 - \frac{u}{R}\right)\left(1 - \frac{v}{R}\right)\right] - X\left(1 - \frac{u}{R}\right)\left(1 - \frac{v}{R}\right)(y + H)$$
$$+ yH\left(1 - \frac{u}{R}\right)\left(1 - \frac{v}{R}\right) = 0;$$

la quantité sous le radical se réduit à

$$(H - y)^2\left(1 - \frac{u}{R}\right)\left(1 - \frac{v}{R}\right)\left[\left(1 - \frac{u}{R}\right)\left(1 - \frac{v}{R}\right) - \frac{4M'yH}{(H - y)^2}\right].$$

Si donc on prend y suffisamment petit, on pourra prendre pour champ des variables u et v deux cercles peu différents du cercle de rayon R et par conséquent de rayon supérieur à l'unité.

26. Revenons maintenant à la variable réelle t. Nous avons tiré des équations (24) des développements ordonnés suivant les puissances de

$$A_1\theta^{\lambda_1}, \quad A_2\theta^{\lambda_2}, \quad \ldots, \quad A_\nu\theta^{\lambda_\nu},$$

les coefficients étant eux-mêmes des fonctions holomorphes de u et v, et les A représentant des constantes arbitraires. Or on a

$$\theta = e^t;$$

nous avons, par suite, des intégrales se présentant sous la forme

de séries ordonnées suivant les puissances croissantes de

$$(27) \qquad A_1 e^{\lambda_1 t}, \quad A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad A_\nu e^{\lambda_\nu t},$$

les coefficients étant des fonctions périodiques de t.

Quant à la convergence, elle est assurée tant que les modules des quantités (27) sont suffisamment petits. On peut faire à ce sujet les mêmes remarques qu'au § 22 et, en se bornant aux λ dont la partie réelle est négative, on obtient des solutions *asymptotiques à zéro* quand t tend vers $+\infty$.

Si, au lieu de supposer, comme au § 23, que, dans les équations

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les X s'annulent pour $x_1 = \ldots = x_n = 0$, on supposait que ces équations admettent une solution périodique $x_i = \varphi_i(t)$, on serait ramené au cas étudié en remplaçant x_i par $x_i + \varphi_i(t)$, et l'*on obtiendrait alors des solutions asymptotiques à la solution périodique considérée* (¹).

27. On peut étendre la démonstration que nous venons de donner à un cas plus étendu et qui se rencontre assez fréquemment, ce qui va nous permettre de généraliser le théorème de M. Poincaré relatif aux solutions asymptotiques. Reprenons les équations du § 24

$$\frac{dx_k}{dt} = \lambda_k x_k + \ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

les λ étant toujours des constantes, mais les coefficients des puissances supérieures des x étant développés suivant les cosinus et sinus des multiples de σ arguments

$$\mu_1 t, \quad \mu_2 t, \quad \ldots, \quad \mu_\sigma t,$$

de telle sorte que l'on sera dans le cas étudié plus haut si $\sigma = 1$.

(¹) La démonstration de l'existence de ces solutions est due à M. Poincaré (*Les nouvelles méthodes de la Mécanique celeste*, t. I, p. 335). On comparera sa démonstration avec celle que nous donnons dans le texte, qui en est assez différente.

Posant toujours $\theta = e^t$, nous aurons le système

$$\theta \frac{dx_k}{d\theta} = \lambda_k x_k + \ldots.$$

Admettons que ces coefficients, dans les termes de degré supérieur au premier, puissent se développer en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de

$$u_1 = e^{\mu_1 t i}, \quad v_1 = e^{-\mu_1 t i}, \quad \ldots, \quad u_\sigma = e^{\mu_\sigma t i}, \quad v_\sigma = e^{-\mu_\sigma t i},$$

ces séries étant convergentes à l'intérieur de cercles, d'un rayon supérieur à *un*.

Nous chercherons alors, imitant ce qui a été fait plus haut, à satisfaire aux équations par des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de

$$y_1 = \theta^{\lambda_1}, \quad \ldots, \quad y_\nu = \theta^{\lambda_\nu}, \quad u_1 = \theta^{\mu_1 i}, \quad v_1 = \theta^{-\mu_1 i}, \quad \ldots, \quad u_\sigma = \theta^{\mu_\sigma i}, \quad v_\sigma = \theta^{-\mu_\sigma i}.$$

On formera, comme au § **24**, un système d'équations aux dérivées partielles; il est inutile de l'écrire. Les quantités qui seront les coefficients des dérivées dans les calculs successifs seront ici les expressions

$$(28) \qquad \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_\nu p_\nu + \gamma_1 \mu_1 i + \gamma_2 \mu_2 i + \ldots + \gamma_\sigma \mu_\sigma i - \lambda_h,$$

les p étant des entiers positifs et les γ des entiers positifs ou négatifs.

On suppose que les développements des x ne renferment pas de termes indépendants des y et que les valeurs des dérivées

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial y_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x_\nu}{\partial y_\nu}$$

pour $y_1 = y_2 = \ldots = y_\nu = 0$ se réduisent à des constantes, d'ailleurs arbitraires, indépendantes des u et des v. Nous n'aurons donc ici, comme précédemment, à considérer dans le calcul que des dérivées pour lesquelles la somme $p_1 + \ldots + p_\nu$ est supérieure ou égale à *deux*.

Pour la démonstration de la convergence, nous n'aurons rien à changer à la marche des raisonnements. Notre attention doit se porter seulement sur les expressions (28); la démonstration ne peut réussir que si les modules des expressions (28) pour $p_1 + \ldots + p_\nu \geqq 2$ restent toujours supérieurs à un nombre fixe.

Or les μ sont des nombres réels, et posons

$$\lambda = \lambda'_1 + i\lambda''_1, \quad \ldots, \quad \lambda_\nu = \lambda'_\nu + i\lambda''_\nu;$$

la partie réelle, dans les expressions (28), se réduit alors à

$$\lambda'_1 p_1 + \ldots + \lambda'_\nu p_\nu - \lambda'_h.$$

Si donc cette expression ne peut s'annuler, les p étant les entiers positifs remplissant la condition indiquée, et *si les λ' sont tous de même signe,* nous sommes assuré que les modules des expressions (28) restent supérieurs à un nombre fixe.

Nous avons alors, dans ce cas, *des intégrales se présentant sous forme de séries ordonnées suivant les puissances croissantes de*

$$(29) \qquad A_1 e^{\lambda_1 t}, \quad A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad A_\nu e^{\lambda_\nu t},$$

les coefficients étant des fonctions de t développables suivant les cosinus et sinus des multiples des arguments $\mu_1 t, \ldots, \mu_\sigma t$.

Ainsi se trouve généralisé le théorème de M. Poincaré relatif aux solutions asymptotiques.

La convergence de ces séries exige naturellement que les modules des quantités (29) soient suffisamment petits. Si les λ' sont négatifs, on aura, en prenant les constantes arbitraires A assez petites, des développements valables de $t = 0$, $t = +\infty$.

28. En particulier, si $\nu = n$ et que tous les λ' soient *négatifs,* nous aurons une intégrale dépendant de n constantes arbitraires. Or, pour $t = 0$, on a

$$x_k^0 = A_k + \ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

les termes non écrits étant de degré supérieur au premier en A_1, A_2, ..., A_n. Si donc on prend les valeurs initiales x_k^0 suffisamment petites, il en sera de même des A et, par suite, les séries convergeront. Nous avons donc, avec nos développements, *toutes les intégrales répondant à des valeurs initiales suffisamment petites.*

Ces intégrales tendront vers zéro quand t augmentera indéfiniment, puisque alors les exponentielles

$$e^{\lambda_1 t}, \quad e^{\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad e^{\lambda_n t}$$

tendent vers zéro. Ce résultat, qui se déduit de la forme analytique

des intégrales, peut être facilement établi, *a priori*, et non pas seulement pour les équations précédentes où les termes sont de forme trigonométrique, mais dans une infinité d'autres cas; c'est ce que nous allons montrer en terminant.

29. Pour donner au théorème toute sa généralité, reprenons un système d'équations du premier ordre

$$(30)\qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les X sont des séries ordonnées suivant les puissances de x_1, $x_2, \ldots, x_n$; ces séries ne renferment pas de termes indépendants des x, et chacun de leurs coefficients est une fonction de t dont la valeur absolue ne dépasse pas une limite fixe quand t varie entre o et $+\infty$. Elles sont d'ailleurs convergentes quand les modules des x restent, quel que soit t dans l'intervalle précédent, inférieurs à un certain nombre.

Si nous prenons seulement dans les X les termes de premier degré, nous aurons un système d'équations linéaires

$$(\Sigma)\qquad \frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous nous plaçons maintenant dans l'hypothèse où l'intégrale générale du système (Σ) serait de la forme

$$x_i = C_1 e^{-\alpha_1 t} f_{i1}(t) + \ldots + C_n e^{-\alpha_n t} f_{in}(t),$$

les α étant des constantes dont les parties réelles sont *positives*, et les f des fonctions dont le module est inférieur à un nombre fixe. Supposons, de plus, que l'on ait

$$\int_0^t (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})\,dt = -(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)t + F(t),$$

$|F(t)|$ restant, quel que soit t, moindre qu'une quantité déterminée.

On voit alors immédiatement que, si l'on fait le changement de fonctions

$$x_i = \xi_1 f_{i1}(t) + \ldots + \xi_n f_{in}(t),$$

les équations différentielles en ξ auront respectivement dans leur

second membre comme terme du premier degré

$$-\alpha_1\xi_1, \quad -\alpha_2\xi_2, \quad \ldots, \quad -\alpha_n\xi_n,$$

les coefficients des puissances supérieures ayant des modules moindr
qu'un nombre fixe.

Imaginons donc que nous partions des équations

$$\frac{dx_i}{dt} = -\alpha_i x_i + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les α étant des constantes positives, et les coefficients des puissanc
de degré supérieur étant des fonctions de t, qui restent en vale
absolue inférieures à un nombre fixe.

Soient t_0 une valeur positive arbitraire de t, et

$$x_1^0, \quad x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n^0$$

les valeurs des x pour $t = t_0$. On aura

$$x_i = \varphi_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, t),$$

les φ_i étant des fonctions analytiques de $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ et s'annula
pour $x_1^0 = \ldots = x_n^0 = 0$. Les termes du premier degré dans φ_i s'o
tiennent en réduisant les équations à la partie linéaire, et, par suit

$$x_i = x_i^0 e^{-\alpha_i(t-t_0)} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les termes non écrits étant de degrés supérieurs au premier. Si h d
signe une quantité positive qui va rester fixe, on aura, en désigna
par x_i^h la valeur de x_i pour $t = t_0 + h$,

$$x_i^h = x_i^0 e^{-\alpha_i h} + \ldots.$$

Ces séries seront convergentes pour $|x_i^0|$ assez petits; *quel q
soit* t_0, ces séries en x_i^0 convergeront dans un même champ, et l
peut obtenir des développements de même forme dont les coefficie
indépendants de t_0 soient des nombres positifs supérieurs aux m
dules des coefficients correspondants dans les développements pr
cédents.

Si l'on suppose maintenant que l'on parte de $t = 0$, on aura
substitution permettant de passer de la valeur des x pour $t = 0$ à
valeur de x pour $t = h$. De $t = h$ on passera à $t = 2h$, et ainsi
suite. D'après ce que je viens de dire, il suffit de démontrer qu'u

substitution de la forme

$$x'_i = \mu_i x_i + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les μ_i sont des nombres positifs inférieurs à *un*, répétée un nombre infini de fois, donne pour limites *zéro*, si les valeurs initiales des x sont assez petites. La démonstration est immédiate. Soit λ le module maximum des μ_i; on peut se borner au cas de la seule équation

$$x' = \lambda x + \ldots \qquad (0 < \lambda < 1).$$

Pour x suffisamment petit, on a évidemment

$$x' < hx,$$

h étant compris entre λ et *un*. Donc, au bout de x transformations successives, la valeur de x sera inférieure à

$$h^n x,$$

et tendra, par suite, vers *zéro* quand n augmentera indéfiniment.

Ainsi, sous les hypothèses faites, *toute solution du système* (30) *correspondant à des valeurs initiales assez petites tendra vers zéro quand t augmentera indéfiniment.* Nous établissons ainsi, dans des cas très étendus, l'existence de solutions asymptotiques à $x_1 = \ldots = x_n = 0$ pour un système d'équations de la forme indiquée.

VI. — De la stabilité et de l'instabilité des intégrales de certaines équations différentielles ; théorème de M. Liapounoff sur l'instabilité de l'équilibre.

30. Faisons une application des résultats généraux qui précèdent. Reprenons le système d'équations

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

où les X sont holomorphes dans le voisinage de $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ et s'annulent pour ces valeurs des variables, comme nous l'avons fait au § 22. Nous conserverons les mêmes dénominations relativement à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Nous avons évidemment la solution $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Nous

dirons avec M. Liapounoff [1] que *c'est une solution stable* si, pour tout nombre positif l, quelque petit qu'il soit, on peut assigner un autre nombre positif ε, tel que l'on ait

$$|x_1| < l, \quad |x_2| < l, \quad \ldots, \quad |x_n| < l$$

pour toutes les valeurs positives de t, dès que l'on prend pour les valeurs initiales (correspondant à $t = 0$) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des valeurs réelles quelconques satisfaisant aux inégalités

$$|a_1| < \varepsilon, \quad |a_2| < \varepsilon, \quad \ldots, \quad |a_n| < \varepsilon.$$

Si, au contraire, on peut assigner un nombre fixe l différent de zéro tel que, si petit que soit le nombre positif ε, on puisse toujours trouver des valeurs réelles de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ inférieures à ε en valeurs absolues, et conduisant, pour une valeur positive de t, à une au moins des égalités de la forme

$$|x_i| = l,$$

la solution considérée sera dite instable.

31. Cette définition donnée, nous pouvons démontrer un théorème intéressant de M. Liapounoff :

Si parmi les nombres

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n$$

il y en a dont les parties réelles soient positives, la solution $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ *sera instable.*

Supposons d'abord que parmi les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ se trouvent des nombres réels positifs; désignons par λ le plus grand d'entre eux. En se reportant aux § 11 et 12 du Chapitre I, on voit de suite que l'on aura une solution où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seront holomorphes en $\alpha e^{\lambda t}$, α étant une constante arbitraire, soient

$$x_1 = f_1(\alpha e^{\lambda t}), \quad x_2 = f_2(\alpha e^{\lambda t}), \quad \ldots, \quad x_n = f_n(\alpha e^{\lambda t}),$$

les coefficients des f étant indépendants de α. Ces séries toutes

---

(1) A. Liapounoff, *Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas où la fonction des forces n'est pas un maximum* (*Journal de Jordan*, 5e série, t. III, 1897).

réelles sont convergentes tant que

$$|\alpha| e^{\lambda t} \leqq h,$$

h étant un nombre déterminé pris assez petit. Pour cette solution, la valeur initiale de x_i est

$$f_i(\alpha).$$

Si l'on prend α assez petit, ces valeurs initiales seront moindres en valeur absolue qu'un nombre ε. Prenons maintenant α positif. Au bout du temps correspondant à

$$\alpha e^{\lambda t} = h,$$

c'est-à-dire du temps positif

$$t = \frac{1}{\lambda} \log \frac{h}{\alpha}$$

(α pouvant être pris plus petit que h), les x auront les valeurs

$$f_i(h).$$

Tous ces $f_i(h)$ ne sont pas nuls quel que soit h (¹). L'un d'eux a une valeur absolue non nulle l. Les nombres l et ε peuvent être pris pour ceux de la définition du paragraphe précédent. *L'équilibre est donc instable.*

Le cas que nous venons d'examiner, où il y a parmi les λ une quantité réelle positive, est seul intéressant pour l'application à la Mécanique que nous nous proposons de faire.

Cependant le théorème énoncé est exact dans tous les cas. Il suffira d'indiquer succinctement la démonstration que M. Liapounoff laisse au lecteur le soin de faire. Partons donc des équations réelles

$$\frac{dz_1}{dt} = a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + \ldots + a_{1n} z_n + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{dz_n}{dt} = a_{n1} z_1 + a_{n2} z_2 + \ldots + a_{nn} z_n + \ldots$$

(¹) Puisque, dans le cas contraire, les fonctions f_i seraient toutes identiquement nulles.

et supposons qu'en faisant la réduction canonique à la forme

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 x_1 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = \lambda_n x_n + \ldots$$

il y ait des λ imaginaires. Soient, par exemple, λ_1 et λ_2 imaginaires conjuguées à parties réelles positives; dans ce cas, x_1 et x_2 seront imaginaires conjuguées. Il faut prendre alors x_1 et x_2 ordonnées suivant les puissances de

$$A_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{et} \quad A_2 e^{\lambda_2 t},$$

A_1 et A_2 étant imaginaires conjuguées. $A_1 e^{\lambda_1 t}$ et $A_2 e^{\lambda_2 t}$ jouent le rôle de y_1 et y_2 au § 25. Regardons alors x_1 et x_2 comme fonctions des variables complexes y_1 et y_2. Soit ρ une quantité assez petite, mais qui va rester fixe. Quand y_1 et y_2 restent sur la circonférence de rayon ρ, x_1 et x_2 ont un certain module minimum M.

Or prenons

$$A_1 = A_2 = A \qquad \text{(quantité réelle positive)}$$

et soient

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \qquad \lambda_2 = \alpha - i\beta \qquad (\alpha > 0).$$

Au bout d'un temps t correspondant à

$$A e^{\alpha t} = \rho,$$

y_1 et y_2 seront sur la circonférence de rayon ρ, et, par suite, les modules de x_1 et x_2, et conséquemment celui d'au moins un des x, dépasseront une certaine limite (facile à exprimer avec M). D'autre part, si l'on prend A très petit, on aura, pour $t = 0$, des valeurs initiales *aussi voisines que l'on voudra de l'origine*. Il y a donc *instabilité*.

32. Du théorème de M. Liapounoff, nous allons conclure avec lui une proposition remarquable relative à l'équilibre d'un système.

On sait que, quand il y a une fonction des forces, on peut choisir les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$, fixant la position du système et s'annulant pour l'équilibre, de telle sorte que les termes du second degré

dans la fonction des forces deviennent

$$\lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 + \ldots + \lambda_n q_n^2$$

et que les équations du mouvement soient de la forme

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2 q_1}{dt^2} = \lambda_1 q_1 + \ldots, \\ \dfrac{d^2 q_2}{dt^2} = \lambda_2 q_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d^2 q_n}{dt^2} = \lambda_n q_n + \ldots, \end{array} \right.$$

les termes non écrits étant du second degré par rapport aux q et aux $q' = \dfrac{dq}{dt}$.

M. Liapounoff a montré que, si parmi les λ il y en a *au moins un qui soit positif*, l'équilibre est *instable*. On peut encore dire qu'*il y a instabilité si la non-existence du maximum de la fonction des forces est fournie par les termes du second degré.*

Cette proposition se déduit immédiatement du théorème précédent. Si l'on pose, en effet,

$$\frac{dq_i}{dt} = q'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on a un système de $2n$ équations du premier ordre en q_i et q'_i, et les $2n$ constantes jouant le rôle des quantités λ au § 31 sont

$$\pm\sqrt{\lambda_i}.$$

S'il y a des λ positifs, désignons par λ le plus grand d'entre eux. On raisonne alors sur les fonctions

$$f_i(\alpha e^{\sqrt{\lambda} t})$$

comme nous l'avons fait au § 31 (sauf que λ est remplacé par $\sqrt{\lambda}$), et l'on arrive à la conclusion énoncée.

33. On sait que, dans le cas d'une fonction des forces, il y a stabilité pour une position correspondant à un maximum de la fonction des forces; on démontre, par un raisonnement classique dû à Dirichlet, ce théorème de Lagrange. Mais il n'y a malheureusement rien

à tirer des méthodes de ce Chapitre pour avoir un développement des intégrales. En posant

$$k_i = \sqrt{-\lambda_i} \qquad (\lambda_i < 0), \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

le radical étant pris avec le signe *plus,* on pourrait bien obtenir des développements suivant les puissances de

$$e^{k_1 it}, \quad \ldots, \quad e^{k_n it},$$

mais ces développements ne correspondent pas à des solutions réelles.

Au reste, ce serait une erreur de croire que, s'il n'y a pas de fonction des forces, le fait que tous les λ sont négatifs dans le système Σ entraîne la stabilité. On pourrait le croire d'après le raisonnement insuffisant de Lagrange, mais il n'en est rien. Il suffit, pour s'en convaincre, de considérer le système

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y + P(x),$$

$P(x)$ étant un polynome arbitraire en x commençant par un terme en x^2. La position $x = 0$, $y = 0$ est une position d'équilibre instable.

En fait, on peut dire que, en général, *l'instabilité est la règle* et *la stabilité est l'exception*. Il semble que ce soient des *conditions d'inégalité* qui suffisent à entraîner *l'instabilité,* tandis qu'il faut des *conditions d'égalité* pour entraîner *la stabilité*.

34. D'après ce que nous avons vu au § **29**, on passe, pour un système d'équations différentielles, des valeurs de x pour $t = t_0$ aux valeurs pour $t = t_0 + h$ au moyen d'une certaine substitution. On est ainsi conduit à parler de la *stabilité* et de l'*instabilité* d'une substitution. Écrivons la substitution

$$x_1 = \varphi(x, y, \ldots, t),$$
$$y_1 = \psi(x, y, \ldots, t),$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$t_1 = \chi(x, y, \ldots, t),$$

les seconds membres étant holomorphes et s'annulant pour

$$x = y = \ldots = t = 0.$$

Soit donné l aussi petit que l'on voudra. Si l'on peut déterminer ε tel que les $x, y, \ldots, t$ restent plus petits que l en valeur absolue, quand on répète un nombre quelconque de fois la substitution, les valeurs initiales $x^0, y^0, \ldots, t^0$ étant inférieures à ε, *il y aura stabilité*. Si au contraire, l étant donné, on peut, si petit que soit ε, trouver des $x^0, \ldots, t^0$ initiales inférieures à ε telles que l'un au moins des $|x|, |y|, \ldots, |t|$ devienne égal à l, *la substitution sera instable*.

Si la substitution est réduite à sa forme canonique

$$\begin{aligned} x_1 &= \mu x + \ldots, \\ y_1 &= \nu y + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t_1 &= \pi t + \ldots \end{aligned}$$

et que les $|\mu|, |\nu|, \ldots, |\pi|$ soient plus petits que *un*, la substitution est *stable*, comme nous l'avons vu au § 29.

Un cas encore assez simple est celui où un au moins des $|\mu|$, $|\nu|, \ldots, |\pi|$ est supérieur à *un;* on peut démontrer que, dans ce cas, la substitution est *instable*. Le cas spécialement intéressant, mais extrêmement difficile, est celui où

$$|\mu| = |\nu| = \ldots = |\pi| = 1.$$

M. Levi Civita (1), dans un intéressant Mémoire, a examiné des cas assez étendus. Nous renverrons à son Mémoire, énonçant seulement ce résultat que, pour la substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \ldots, \\ y_1 &= y + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_1 &= t + \ldots, \end{aligned}$$

où les termes non écrits sont de degrés supérieurs au premier, il y a, *en général*, instabilité (2).

(1) LEVI CIVITA, *Sopra alcuni criteri di instabilità* (*Annali di Matematica*, 3e série, t. V).

(2) On pourra consulter encore, relativement à l'instabilité de l'équilibre, les Mémoires de M. Hadamard (*Journal de Math.*, 5e série, t. III, 1897) et de M. Painlevé (*Comptes rendus*, t. CXXV, 1897).

CHAPITRE IX.

POINTS SINGULIERS DES INTÉGRALES RÉELLES DES ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

I. — Des points singuliers généraux des équations du premier ordre et du premier degré.

1. Commençons par étudier les points singuliers des co définies par une équation différentielle du premier ordre et du mier degré, c'est-à-dire par une équation de la forme

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

où X et Y sont des polynomes en x et y; ces polynomes ont coefficients réels et nous ne nous occupons maintenant qu parties réelles des courbes définies par l'équation précédente.

Par tout point (x, y) du plan à distance finie passe une c intégrale et une seule, si l'on n'a pas à la fois en ce point

$$X(x, y) = 0, \qquad Y(x, y) = 0.$$

Les points (x, y), satisfaisant à ces deux équations, sor *points singuliers* de l'équation différentielle, et nous allons d' chercher ce que deviennent les courbes intégrales dans le vois d'un point singulier.

2. En supposant le point singulier à l'origine, l'équation a forme

$$\frac{dx}{ax + by + \ldots} = \frac{dy}{a'x + b'y + \ldots},$$

les termes non écrits étant de degrés supérieurs au premier. D

ce que nous avons vu (Chap. I, § 2), on pourra faire un changement linéaire de variables sur x et y, si l'équation du second degré en λ

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ a' & b'-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

a ses racines distinctes, de telle sorte que l'équation devienne

$$\frac{dx'}{\lambda_1 x' + \ldots} = \frac{dy'}{\lambda_2 y' + \ldots},$$

les deux racines de l'équation (1) étant λ_1 et λ_2.

Différents cas vont se présenter, suivant la nature des racines de cette équation (1), qui s'écrit

$$\lambda^2 - (a+b')\lambda + ab' - a'b = 0.$$

3. Supposons d'abord que les racines de (1) soient réelles et de même signe; on peut alors supposer, en changeant, au besoin, les signes des coefficients a, b, a', b', que

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0.$$

D'après un théorème général, établi au Chapitre I (*voir* aussi Chap. II, Section I, et notamment la remarque faite à la fin du § 1 de ce Chapitre), l'intégrale générale est de la forme

$$(2) \qquad u_1^{\lambda_2} = C u_2^{\lambda_1},$$

u_1 et u_2 étant des fonctions holomorphes de x et y dans le voisinage de $x=0$, $y=0$, et s'annulant pour ces valeurs; C représente la constante arbitraire.

Il résulte immédiatement de ce qui précède que *toutes les courbes intégrales se rapprochant suffisamment de l'origine passent à l'origine*. Il est visible, en effet, que la courbe (2) passe à l'origine, quelle que soit la constante C.

Nous désignerons sous le nom de *nœuds* les points singuliers de la catégorie précédente. Un exemple très simple d'un nœud sera fourni par l'équation

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

dont l'intégrale générale est $y = Cx$; l'origine, ici, est bien un nœud.

Dans les généralités qui précèdent, nous supposons que nous ne sommes pas dans le cas où λ est un entier positif ou l'inverse d'un entier positif. Pour ce cas particulier, il suffit, comme nous venons de le dire, de se borner à $m = 1$, et de considérer les équations de la fin du § 4 (Chap. II)

$$t\frac{dx}{dt} = x + \ldots,$$

$$t\frac{dy}{dt} = \mu x + y + \ldots.$$

Nous avons vu qu'on peut développer x et y suivant les puissances de t et $t\log t$. Les équations (3) en u et v (*loc. cit.*) ne changeant pas quand on remplace u et v par αu et αv, α étant une constante arbitraire, nous pouvons considérer que x et y sont développées suivant les puissances de

$$\alpha t \quad \text{et} \quad \alpha t \log t,$$

et l'on aura

$$\alpha t = f(x, y),$$
$$\alpha t \log t = f_1(x, y),$$

f et f_1 étant holomorphes en x et y et s'annulant pour $x = y = 0$. On en déduit

$$\log t = \frac{f_1(x, y)}{f(x, y)},$$

et, par suite, l'intégrale générale prend la forme

$$\alpha e^{\frac{f_1(x,y)}{f(x,y)}} = f(x, y).$$

On discutera immédiatement cette courbe en posant

$$f(x, y) = x', \qquad f_1(x, y) = y';$$

on a

$$\alpha e^{\frac{y'}{x'}} = x';$$

ces courbes passent à l'origine, quel que soit α, et y ont pour tangente l'axe des y'.

4. Les racines de l'équation (1) restant toujours réelles, supposons-les maintenant de signes contraires. Les théorèmes généraux ne nous donnent plus l'intégrale générale. Nous connaissons seulement

(Chap. II, p. 28) deux courbes intégrales passant à l'origine, et les coefficients angulaires (voir *loc. cit.*) des tangentes à l'origine pour ces deux courbes sont données par l'équation du second degré en t

$$a' + b't - t(a + bt) = 0, \tag{3}$$

dont les racines sont réelles en même temps que celles de l'équation (1).

Ces deux courbes intégrales sont les seules qui passent à l'origine ou qui s'en rapprochent indéfiniment [1]. Nous ne pouvons, pour la démonstration de ce théorème, renvoyer au Chapitre II, car il y a là un point délicat quand les courbes peuvent être complexes (*voir* § 3, Chap. II). Il sera aisé de suppléer à cette lacune, en considérant seulement, comme nous devons le faire ici, les courbes *réelles*. Il suffira d'ailleurs de montrer, d'après un théorème établi (Chap. II, *loc. cit.*), que la courbe a une *tangente déterminée*.

Remarquons d'abord que, les deux courbes intégrales ayant leurs tangentes distinctes et des points simples à l'origine, on peut faire un changement de variables tel que les axes des x et des y soient les intégrales dont nous venons de parler. L'équation différentielle aura nécessairement alors la forme

$$\frac{dx}{x(\lambda_1 + \ldots)} = \frac{dy}{y(\lambda_2 + \ldots)},$$

les termes non écrits, qui sont des séries entières en x et en y, étant au moins du premier degré en x et y.

Il est évident d'abord que, dans la région autour de l'origine, où les séries qui sont aux dénominateurs convergent, une courbe intégrale ne peut rencontrer l'axe des x ou l'axe des y. Si, en effet, une intégrale rencontre l'axe des y au point ($x = 0$, $y \neq 0$), elle sera tangente en ce point à l'axe des y et devra, par suite, coïncider avec lui. Ceci posé, envisageons une courbe intégrale passant à l'origine ou s'en rapprochant indéfiniment, et distincte de Ox et Oy. Nous pouvons supposer que, depuis un certain point P_0, elle est dans

[1] Ce point a, je crois, toujours été admis par ceux qui se sont occupés de ces problèmes avant la première édition de ce Traité, où nous avons donné la démonstration du texte.

le premier quadrant (angle xOy). Suivons la courbe depuis l[e] point P_0 jusqu'à l'origine; si P désigne le point mobile de la courbe le rayon vecteur OP tourne toujours dans le même sens autour d[e] l'origine O, car, autrement, pour la position du point P correspon[-] dant à ce changement de sens, la droite OP serait tangente en P à l[a] courbe, et l'on aurait pour les coordonnées de ce point $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, e[t] par suite,

$$\frac{1}{\lambda_1 + \ldots} = \frac{1}{\lambda_2 + \ldots},$$

égalité impossible, puisque λ_1 est différent de λ_2.

Supposons, pour fixer les idées, que OP marche dans le se[ns] de Ox vers Oy; quand P tendra vers l'origine, OP *aura nécessa[i]rement une limite,* puisque la direction OP marche toujours dans [le] même sens et ne peut dépasser Oy, d'après ce que nous avons d[it] plus haut. Il est donc établi que *la courbe intégrale considérée [a] une tangente à l'origine* et nous sommes alors assuré qu'il n'y [a] que deux courbes intégrales passant par le point singulier considér[é].

Nous désignerons sous le nom de *cols* les points singuliers q[ui] viennent d'être étudiés, *par lesquels passent seulement deu[x] courbes intégrales.*

L'exemple suivant va nous donner, suivant les cas, des cols ou d[es] nœuds. Soit la surface d'un terrain représentée par l'équation

$$z = f(x, y),$$

le plan des xy étant horizontal. L'équation différentielle des lign[es] de *plus grande pente,* c'est-à-dire des lignes dont la tangente e[st] en chaque point perpendiculaire à la tangente de la ligne de nivea[u] ($z =$ const.) passant par ce point, est évidemment

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial y}};$$

les points singuliers de cette équation sont donnés par les valeu[rs] de x et y, pour lesquelles

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

ils correspondent donc aux points de la surface où le plan tange[nt]

est horizontal. En prenant un tel point pour origine, nous avons

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \ldots$$

et, par suite, l'équation différentielle devient

$$\frac{dx}{ax + by + \ldots} = \frac{dy}{bx + cy + \ldots}.$$

L'équation en λ est ici

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0.$$

Les racines sont réelles; leur rapport sera positif si $b^2 - ac < 0$, et alors l'origine est un *fond* ou un *sommet* de la surface, et toutes les lignes de plus grande pente passent par ce point, qui est un nœud pour l'équation différentielle. Si, au contraire, $b^2 - ac > 0$, le rapport des racines est négatif et alors l'origine est un *col* pour la surface, au point de vue topographique; cette dénomination correspond à celle que nous adoptons pour le même point relativement à l'équation différentielle. Il n'y a que deux lignes de plus grande pente passant par un col, d'après le théorème général établi ci-dessus.

5. Supposons maintenant que l'équation (1) ait ses racines imaginaires : λ_1 et λ_2 sont alors imaginaires. Il ne peut y avoir une courbe intégrale passant à l'origine avec une tangente déterminée, puisque l'équation (3) en t, donnant les limites de $\frac{y}{x}$, a ses racines imaginaires, mais la considération de l'intégrale va nous conduire à un résultat plus important.

Pour passer de l'équation proposée à la forme canonique, il faut faire un changement de variables imaginaires

$$x' = \alpha x + \beta y,$$
$$y' = \gamma x + \delta y;$$

α et γ d'une part, β et δ d'autre part, sont imaginaires conjuguées. Nous pouvons ici, à moins que $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ ne soit réel ou négatif, nous servir de l'intégrale générale (2)

$$\frac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}} = \text{const.};$$

les fonctions holomorphes u_1 et u_2 en x et y sont imaginaires conjuguées, et nous pouvons poser

$$u_1 = f + i\varphi, \qquad u_2 = f - i\varphi,$$

f et φ étant des séries réelles en x et y s'annulant pour $x = 0$, $y = 0$, et le déterminant fonctionnel de f et φ ne s'annulant pas pour $x = 0$, $y = 0$. En posant de plus

$$\lambda_1 = p - qi, \qquad \lambda_2 = p + qi,$$

nous aurons l'intégrale générale sous la forme

$$\frac{(f + i\varphi)^{p+qi}}{(f - i\varphi)^{p-qi}} = \text{const.}$$

ou encore

$$(p + qi)\log(f + i\varphi) - (p - qi)\log(f - i\varphi) = \text{const.};$$

en prenant pour les deux logarithmes des déterminations imaginaires conjuguées, la constante sera de la forme Ci, C étant réel, et la courbe précédente sera réelle et sera *une spirale se rapprochant indéfiniment de l'origine*. Pour nous en rendre bien compte, étudions la transformée de cette courbe par le changement de variables

$$f(x, y) = \xi, \qquad \varphi(x, y) = \eta,$$

qui donne pour x et y des fonctions holomorphes de ξ et η dans le voisinage de $\xi = 0$, $\eta = 0$. On aura, si $\xi = \rho\cos\theta$, $\eta = \rho\sin\theta$,

$$(p + qi)(\log\rho + i\theta) - (p - qi)(\log\rho - i\theta) = Ci$$

et, par suite,

$$2q\log\rho + 2p\theta = C,$$

et enfin

$$\rho = C' e^{-\frac{p}{q}\theta},$$

C' étant une autre constante. La transformée est donc une spirale logarithmique, et, par suite, les courbes intégrales que nous étudions sont des spirales tournant indéfiniment autour de l'origine, qui est pour elles un point asymptote. Nous avons donc une infinité d'intégrales ayant à l'origine un point asymptote; ce point singulier sera dit un *foyer*. Il résulte de ce qui précède que *les courbes intégrales,*

se rapprochant suffisamment de l'origine, auront ce point pour asymptote.

Je rappelle que nous avons supposé que $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ n'est pas réel et négatif, ce qui ne peut avoir lieu que si $p = 0$ et alors $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -1$, cas particulier que nous étudierons à la Section II.

Prenons comme exemple l'équation différentielle

$$\frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{x+y}.$$

En faisant la réduction à la forme canonique, on trouve que l'on doit poser

$$x' = x + iy, \qquad y' = x - iy;$$

l'équation différentielle devient

$$(1+i)\frac{dy'}{y'} = (1-i)\frac{dx'}{x'}$$

ou

$$(1+i)\log y' - (1-i)\log x' = \text{const.},$$

et, par suite, si l'on pose

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

l'intégrale générale est la spirale logarithmique

$$r = C e^{\theta}.$$

6. Nous venons d'étudier les points singuliers d'une équation différentielle du premier ordre et du premier degré, que l'on peut appeler *généraux*, c'est-à-dire les points singuliers qui ne supposent aucune relation particulière d'*égalité* entre les coefficients de l'équation.

Ces points singuliers sont les *nœuds*, les *cols* et les *foyers*. Bien d'autres points singuliers peuvent se présenter, mais ils correspondent à des relations particulières; nous allons en voir un exemple dans la Section II de ce Chapitre.

On remarquera que nous n'avons supposé en rien dans les paragraphes précédents que X et Y fussent des polynomes en x et y; ils peuvent être des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de x et y, convergentes pour des valeurs absolues suffisamment petites de ces variables.

Les dénominations de *nœud, col* et *foyer* sont empruntées aux Mémoires [1] de M. Poincaré *Sur les courbes définies par les équations différentielles*. Nous avons complété un point qui, malgré son importance, était resté sans démonstration, à savoir que par un col ne passent que deux courbes intégrales (§ 4).

II. — Étude d'un point singulier spécial; des centres.

7. Dans la première Section de ce Chapitre, nous avons étudié les points singuliers *généraux* des équations du premier ordre et du premier degré. Ces cas généraux sont en même temps les plus simples, mais il peut se présenter des cas particuliers correspondant à des relations particulières entre les coefficients des polynomes X et Y. Nous allons étudier avec quelques détails un cas particulier très intéressant [2] ne présentant pas un caractère trop spécial.

Reprenons l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

X et Y s'annulant pour $x = 0, y = 0$.

A l'équation précédente on peut associer l'équation aux dérivées partielles

$$X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

et il est tout naturel de rechercher si l'on peut satisfaire à cette équation en prenant pour F une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et y. Si nous désignons par

$$\alpha x + \beta y \quad \text{et} \quad \gamma x + \delta y$$

les termes du premier degré en x et en y dans X et Y, on voit immédiatement que le développement de F ne pourra pas commencer par des termes du premier degré, si l'on a

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

---

[1] H. Poincaré, *Sur les courbes définies par les équations différentielles* (*Journal de Liouville*, 1881 et 1882).

[2] *Consulter*, pour l'étude des centres, le Mémoire de M. Poincaré (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. I, p. 172).

Plaçons-nous dans cette hypothèse; le développement de F commencera par des termes du second degré, soit

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

et l'on devra avoir

$$(\alpha x + \beta y)(ax + by) + (\gamma x + \delta y)(bx + cy) = 0,$$

d'où

$$(4)\qquad \begin{cases} a\alpha + b\gamma = 0, \\ a\beta + b(\alpha + \delta) + c\gamma = 0, \\ b\beta + c\delta = 0; \end{cases}$$

ces équations ne seront compatibles que si l'on a

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & \alpha + \delta & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{vmatrix} = 0.$$

Quand cette condition est remplie, on peut obtenir les valeurs de a, b, c. Nous discuterons aisément la condition précédente, en supposant que l'équation a été réduite à la forme canonique employée dans la Section précédente, c'est-à-dire que l'on a

$$\alpha = \lambda_1, \qquad \beta = 0,$$
$$\gamma = 0, \qquad \delta = \lambda_2,$$

λ_1 et λ_2 étant les deux racines d'une équation en λ déjà bien des fois considérée. La condition revient alors à

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0.$$

Si λ_1 et λ_2 sont réels, le rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ sera alors égal à -1, et, par suite, *le point sera un col.* Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires, on se trouvera dans un cas nouveau laissé de côté au § 5 de ce Chapitre : *c'est ce que nous allons étudier.*

Le changement de variable à effectuer sur x et y, pour passer de l'équation primitive à la forme canonique, remplace alors x et y par deux expressions imaginaires conjuguées. Or, dans l'hypothèse $\alpha = \lambda_1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = \lambda_2$ le polynome

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

se réduit, d'après les équations (4), à $2bxy$; ce polynome sera donc,

en revenant aux variables réelles initiales, une forme définie, qu'on peut d'ailleurs supposer positive. Ainsi nous pouvons, dans le cas que nous étudions, admettre que les termes du second degré dans F se réduisent à

$$x^2+y^2$$

et l'on a alors, d'après les équations (4),

$$\alpha=\delta=0, \qquad \beta+\gamma=0.$$

Ainsi, sans diminuer la généralité du cas spécial que nous étudions, nous supposons que

$$\begin{aligned} X &= y+X_2+\ldots+X_n,\\ Y &= -x+Y_2+\ldots+Y_n \end{aligned}$$

et soit

$$F=x^2+y^2+F_3+F_4+\ldots,$$

F_i comme X_i et Y_i désignant un polynome homogène de degré i en x et y. Il faut continuer le calcul de proche en proche des polynomes F_3, F_4, ... On voit que, si l'on a déterminé les F jusqu'au rang $i-1$, le polynome F_i sera déterminé par une équation de la forme

$$(5)\qquad y\frac{\partial F_i}{\partial x}-x\frac{\partial F_i}{\partial y}=H_i,$$

H_i désignant une expression dépendant de X et Y et des polynomes F déjà déterminés.

Nous sommes donc amené à nous poser la question suivante : en désignant par H_i un polynome homogène et de degré i en x et y, déterminer un polynome F_i satisfaisant à l'équation (5).

Pour résoudre cette équation, posons

$$x=\rho\cos\omega, \qquad y=\rho\sin\omega.$$

On a alors, en désignant par F une fonction quelconque de x et y,

$$y\frac{\partial F}{\partial x}-x\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial\omega}.$$

Soient $F_i=\rho^i\varphi(\omega)$, $H_i=\rho^i\psi(\omega)$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \Sigma A_k\cos k\omega+B_k\sin k\omega,\\ \psi(\omega) &= \Sigma C_k\cos k\omega-D_k\sin k\omega, \end{aligned}$$

les entiers k étant au plus égaux à i, et de même parité que i.

L'équation (5) s'écrit alors

$$-\frac{d\varphi}{d\omega}=\psi(\omega).$$

Pour qu'on puisse y satisfaire, il faut et il suffit que $\psi(\omega)$ ne contienne pas de terme indépendant de ω, c'est-à-dire que l'on ait

$$C_0=0.$$

Cette condition est remplie d'elle-même quand i est impair, et il y a alors une manière et une seule de déterminer $\varphi(\omega)$. Quand i est pair, le terme C_0 existera en général, et il n'y aura pas alors possibilité de trouver pour $\varphi(\omega)$ une expression de la forme indiquée. Quand C_0 est nul, cette détermination sera possible, et il restera évidemment une arbitraire dans l'expression de φ.

Revenons sur le cas où i est pair et C_0 différent de zéro. On pourra alors déterminer une expression φ, de manière que

$$-\frac{d\varphi}{d\omega}=\psi(\omega)-C_0;$$

ce qui revient à déterminer un polynome homogène $F_i(x, y)$ de degré i, tel que

$$y\frac{\partial F_i}{\partial x}-x\frac{\partial F_i}{\partial y}=H_i-C_0(x^2+y^2)^{\frac{i}{2}}.$$

8. Ceci posé, dans le calcul successif des polynomes F, on pourra se trouver arrêté dès le calcul de F_4, et on le sera même en général. Pour plus de généralité, supposons que ce soit au rang i (de degré pair) que l'on soit arrêté pour la première fois, c'est-à-dire que la quantité C_0 ne soit pas nulle. Posons

$$F=x^2+y^2+F_3+F_4+\ldots+F_i,$$

le dernier polynome F_i étant calculé, comme nous l'avons dit plus haut, et l'on suppose que l'on a fixé arbitrairement les constantes restant arbitraires dans $F_4, \ldots, F_i$.

Il est clair que chacune des courbes de la famille

$$F=\varepsilon,$$

ε étant une constante suffisamment petite, se compose, dans le voisi-

nage de l'origine, d'une petite courbe fermée entourant ce point. Pour $\varepsilon = 0$, cette courbe se réduit à un point.

L'expression

$$X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y},$$

d'après la manière même dont ont été calculés $F_3, \ldots, F_i$, ne renferme pas de terme de degré inférieur à i et ses termes de degré i se réduisent à

$$-C_0(x^2+y^2)^{\frac{i}{2}}.$$

Donc, si $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ reste moindre qu'un nombre suffisamment petit ρ_0, cette expression aura un signe invariable, le signe opposé à celui de C_0. Supposons, pour fixer les idées, C_0 positif. Considérons maintenant, au lieu de l'équation donnée du premier ordre, le système équivalent

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y).$$

Suivons une trajectoire dans le voisinage de l'origine. Si, dans le polynome $F(x, y)$, on substitue les valeurs de x et y en fonction de t, l'expression F deviendra une fonction de t, et l'on aura

$$\frac{dF}{dt} = X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Par suite, si le point (x, y) est à l'intérieur du cercle décrit de l'origine avec le rayon ρ_0, on aura

$$\frac{dF}{dt} < 0.$$

F ira donc en diminuant quand t augmentera, tant que (x, y) ne sortira pas du cercle ρ_0. Revenons aux courbes

$$F = \varepsilon,$$

en faisant varier ε de zéro à une valeur ε_0 telle que ces courbes (ou du moins la partie fermée autour de l'origine qui nous intéresse seule) ne sortent pas du cercle ρ_0. Quand ε varie de *zéro* à ε_0, ces courbes grandissent et deux quelconques d'entre elles n'ont pas de point commun. Si une trajectoire rencontre une courbe $F = \varepsilon$, *le*

point (x, y) *ne sortira pas de cette courbe,* car, d'après ce qui précède, on aura à l'intérieur de la courbe

$$\frac{dF}{dt} < 0.$$

F ira donc en diminuant, et le point ne pourra pas revenir à la courbe $F = \varepsilon$. Quand t augmentera indéfiniment, F diminuera indéfiniment. La limite de F sera donc une quantité positive ou zéro [1]. Si la limite de F est une quantité positive a différente de zéro, notre trajectoire se rapprochera indéfiniment de la courbe

$$F = a$$

qui sera pour elle une courbe asymptote. Montrons que la courbe $F = a$ sera aussi une courbe intégrale. Tout d'abord, en remplaçant dans l'équation différentielle

$$\frac{dx}{y + \dots} = \frac{dy}{-x + \dots}$$

les coordonnées rectangulaires par les coordonnées polaires (ρ, ω), nous avons une équation de la forme

$$\frac{d\rho}{d\omega} = A\rho^2 + B\rho^3 + \dots,$$

les coefficients A, B, ... étant des polynomes en $\cos\omega$ et $\sin\omega$. Il en résulte que ω pourra croître indéfiniment et que notre trajectoire sera asymptote à la courbe $F = a$ en tournant indéfiniment autour d'elle. Nous pourrons représenter la courbe $F = a$ (dans le voisinage de l'origine) par l'équation

$$\rho_1 = f(\omega),$$

$f(\omega)$ étant une fonction analytique de ω ayant 2π pour période. En posant

$$\rho = f(\omega) + \zeta,$$

---

(1) M. Poincaré suppose immédiatement dans son Mémoire (voir *Journal de Liouville*, 1885, p. 179) que la limite est zéro. Le fait est exact si l'on est suffisamment près de l'origine; mais il est nécessaire de donner une démonstration rigoureuse.

l'équation différentielle devient

$$\frac{d\zeta}{d\omega} = P + Q\zeta + R\zeta^2 + \ldots,$$

les coefficients P, Q, R, ... étant des fonctions de ω admettant la période 2π. Par hypothèse, cette équation admet pour intégrale une fonction ζ qui tend vers zéro en étant toujours positive quand la variable réelle ω augmente indéfiniment. Or je dis que ceci est impossible si P n'est pas identiquement nul. Soit en effet ω_0 une valeur n'annulant pas P, pour $\omega_0 + 2k\pi$ (k étant assez grand); la fonction ζ sera aussi voisine que l'on voudra de zéro. L'équation

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{1}{P + Q\zeta + R\zeta^2 + \ldots}$$

donnera pour ω une fonction de ζ; pour une valeur initiale de ζ inférieure à tel nombre que l'on voudra et pour $\omega = \omega_0 + 2k\pi$, le champ de convergence de ω, développée suivant les puissances de ζ, atteindra l'origine, et l'on aura donc $\zeta = 0$ pour une certaine valeur de ω, ce qui est contre notre hypothèse. Par suite, P est identiquement nul et $\zeta = 0$ satisfait à l'équation différentielle, ce qui revient à dire que la courbe $F = a$ est une courbe intégrale.

Or, si l'on cherche les courbes intégrales de la forme précédente, on ne pourra trouver qu'un nombre limité de valeurs de a. En prenant donc, comme fonction initiale pour notre trajectoire, un point à l'intérieur de la courbe $F = a$, qui correspond à la plus petite valeur de a, on aura la certitude que *la trajectoire considérée aura l'origine pour point asymptote.*

Nous avons, dans ce qui précède, supposé que C_0 était positif. Dans le cas où C_0 serait négatif, on changerait t en $-t$ et la conclusion à laquelle nous venons d'arriver subsiste encore. Nous pouvons donc énoncer que, *dans le cas où l'on rencontre une quantité C_0 différente de zéro, le point singulier considéré est un point asymptote et peut, par suite, être regardé comme un foyer.*

9. Comme nous l'avons dit, il arrivera en général qu'on rencontrera une quantité C_0 différente de zéro, et nous pouvons regarder la discussion du point singulier comme faite dans le cas général; mais le cas particulier, où tous les C_0 seraient nuls et où par conséquent

on ne serait jamais arrêté dans le calcul des polynomes successifs F_i, appelle nécessairement l'attention. M. Poincaré, qui examine ce cas dans son Mémoire (p. 181 du Mémoire cité), démontre directement que la série

$$F = x^2 + y^2 + F_3 + \ldots + F_n + \ldots$$

est convergente pour des valeurs suffisamment petites de x et y. Il en résulte alors que l'équation

$$F = C,$$

C étant une constante suffisamment petite, représente dans le voisinage de l'origine une petite courbe fermée, et, par suite, les courbes intégrales dans le voisinage de l'origine sont des courbes fermées s'enveloppant les unes les autres.

La démonstration de M. Poincaré nous entraînerait trop loin. Je vais donner une démonstration différente en me plaçant à un autre point de vue où nous allons retrouver des solutions périodiques. Prenons l'équation en coordonnées polaires que nous pouvons mettre sous la forme

$$\frac{d\rho}{d\theta} = A\rho^2 + B\rho^3 + \ldots.$$

Les coefficients des diverses puissances de ρ sont des polynomes en $\cos\theta$ et $\sin\theta$; le premier est homogène et du troisième degré.

Considérons l'intégrale de l'équation précédente prenant pour $\theta = 0$ la valeur ρ_0. D'après un théorème général (Chap. VIII, § 4), on pourra la développer suivant les puissances de ρ_0, et ce développement sera convergent dans un intervalle que nous prenons ici de 0 à 2π si ρ_0 est suffisamment petit. On aura ainsi

$$\rho = \alpha_1\rho_0 + \alpha_2\rho_0^2 + \alpha_3\rho_0^3 + \ldots,$$

les α étant des fonctions de θ, que nous pouvons calculer de proche en proche. α_1 prend la valeur *un* et tous les autres α la valeur zéro pour $\theta = 0$.

Dans le cas où il y aura une intégrale de la forme $F = C$, les fonctions α devront avoir la période 2π, et, inversement, si les fonctions α ont la période 2π, toutes les solutions autour de l'origine sont périodiques.

Si nous cherchons les coefficients α, nous voyons qu'en général ils

ne sont pas périodiques; on a d'abord de suite

$$\alpha_1 = 1,$$

puis

$$\frac{d\alpha_2}{d\theta} = A;$$

α_2 sera encore une fonction périodique; on déterminera la constante de manière que α_2 s'annule pour $\theta = 0$. Pour déterminer α_3, nous aurons une équation de la forme

$$\frac{d\alpha_3}{d\theta} = \varphi_3,$$

φ_3 étant périodique. Pour que α_3 soit périodique, il faudra que le terme constant dans φ_3 soit nul; s'il n'en est pas ainsi, α_3 ne sera pas périodique, mais on pourra néanmoins le déterminer et l'on choisira la constante arbitraire de manière que α_3 s'annule pour $\theta = 0$. On continuera ainsi la détermination des fonctions α de proche en proche, les prenant telles qu'elles s'annulent pour $\theta = 0$.

Donc, dans tous les cas, nous déterminerons la solution ρ prenant pour $\theta = 0$ la valeur ρ_0, et elle sera déterminée de 0 à 2π, si ρ_0 est suffisamment petit. Un cas très intéressant est celui où tous les α, calculés comme il vient d'être dit, sont périodiques; il faudra pour cela qu'une suite indéfinie de constantes, successivement rencontrées dans le calcul, soit nulle. Le développement qui représente ρ étant convergent de 0 à 2π sera alors évidemment convergent pour toute valeur de θ, *et nous aurons comme intégrales autour de l'origine une succession de courbes fermées enveloppant ce point.*

10. Il sera intéressant de considérer maintenant le système des deux équations

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \quad y + \ldots, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \ldots \end{cases}$$

en nous plaçant dans le cas où les conditions que nous venons de dire sont remplies. Nous devons chercher comment l'angle polaire θ

est relié à t. En remplaçant x et y par $\rho\cos\theta$ et $\rho\sin\theta$, nous avons

$$\frac{d\rho}{dt}\cos\theta - \rho\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = \quad \rho\sin\theta + \ldots,$$
$$\frac{d\rho}{dt}\sin\theta + \rho\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = -\rho\cos\theta + \ldots,$$

que nous pouvons écrire, en remplaçant $\frac{d\rho}{dt}$ par $\frac{d\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$ ou par

$$\frac{d\theta}{dt}(A\rho^2 + B\rho^3 + \ldots),$$

$$\frac{d\theta}{dt}[-\sin\theta + \rho(\quad)] = \quad \sin\theta + \rho(\quad),$$
$$\frac{d\theta}{dt}[\quad\cos\theta + \rho(\quad)] = -\cos\theta + \rho(\quad);$$

d'où l'on déduit

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2[1 + \rho(\quad)] = 1 + \rho(\quad),$$

les parenthèses représentant des séries ordonnées suivant les puissances de ρ dont les coefficients sont des fonctions périodiques de θ avec la période 2π. On a donc

$$dt = \sqrt{1 + \rho(\quad)}\,d\theta.$$

Pour une intégrale, ρ sera, par hypothèse, une fonction périodique de θ avec la période 2π, et nous ne considérons que les intégrales pour lesquelles ρ est suffisamment petit. Il en résulte que t est une fonction périodique de θ, t augmentant d'une certaine constante quand θ augmente de 2π. Les solutions du système (6) sont donc des fonctions périodiques de t, et nous avons ainsi un exemple d'un système ayant toutes ses solutions périodiques [pourvu que les valeurs initiales (x_0, y_0) soient assez petites]; mais *la période varie d'une intégrale à l'autre,* dépendant de la position initiale (x_0, y_0); ce dernier point est évident, car la période de t, considérée comme fonction de θ, dépend de ρ_0.

III. — Équations du premier ordre et de degré supérieur. Application à la recherche des lignes de courbure passant par un ombilic.

11. Des questions analogues à celles que nous avons traitées dans les deux Sections précédentes se posent pour les équations du pre-

mier ordre et de degré supérieur. Soit une telle équation

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Nous devons considérer les points (x, y) pour lesquels une ou plusieurs valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont indéterminées. Supposons que l'origine soit un tel point; la recherche des courbes intégrales passant en ce point et *ayant une tangente déterminée* se ramènera à des questions déjà traitées. Tout d'abord, l'équation donnant les coefficients angulaires de ces tangentes se forme immédiatement, puisque $\frac{y}{x}$ et $\frac{dy}{dx}$ ont, dans ce cas, la même limite. Posant alors $y = tx$, on a une équation différentielle en t

$$\varphi\left(x, t, \frac{dt}{dx}\right) = 0,$$

et il faut chercher les intégrales de cette équation, prenant, pour $x = 0$, les valeurs trouvées pour les coefficients angulaires. On sera donc ramené en général à des problèmes de la nature de ceux qui ont été traités au Chapitre II et dans la première Section de ce Chapitre.

Prenons, comme exemple [1], l'équation du second degré

$$(ax + by + \ldots)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2(a_1x + b_1y + \ldots)\frac{dy}{dx} + (a_2x + b_2y + \ldots) = 0,$$

où les termes non écrits dans les parenthèses sont de degrés supérieurs au premier. L'équation aux coefficients angulaires des tangentes aux courbes intégrales passant à l'origine est ici

$$(7) \qquad (a + bt)t^2 + 2(a_1 + b_1t)t + a_2 + b_2t = 0.$$

Des circonstances différentes se présenteront suivant la nature des racines de cette équation du troisième degré; les racines réelles seules seront ici intéressantes, et à une racine réelle t_0 correspondront, pour l'équation, une seule intégrale ou une infinité d'intégrales suivant que l'équation différentielle en t, transformée de la proposée en posant $y = tx$, aura une intégrale ou une infinité d'intégrales prenant pour $x = 0$ la valeur t_0.

---

(1) J'ai indiqué, dans les *Comptes rendus* (11 mars 1895), le résultat de cette discussion qui n'avait, je crois, jamais été faite auparavant.

L'équation (7) se retrouve en faisant dans l'équation $y = tx$. Résolvant d'abord, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(a_1x + b_1y + \ldots) \pm \sqrt{(a_1x + b_1y + \ldots)^2 - (ax + by + \ldots)(a_2x + b_2y + \ldots)}}{ax + by + \ldots}$$

et, par suite,

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{-t(a + bt) - (a_1 + b_1t) + x(\ \ ) \pm \sqrt{(a_1 + b_1t)^2 - (a + bt)(a_2 + b_2t) + x(\ \ )}}{a + bt + x(\ \ )},$$

en marquant par les parenthèses des séries entières en x et t. Pour $x = 0$, le second membre se réduit à

$$\frac{-t(a + bt) - (a_1 + b_1t) \pm \sqrt{(a_1 + b_1t)^2 - (a + bt)(a_2 + b_2t)}}{a + bt}.$$

En égalant cette expression à zéro, on retrouve l'équation (7) du troisième degré, après suppression de la racine $t = -\frac{a}{b}$.

On pourrait avoir à craindre, pour l'équation différentielle en t, quelque difficulté à cause de cette racine $t = -\frac{a}{b}$, distincte, nous le supposons, des racines de l'équation (7). Le second membre de cette équation se présente, en effet, sous forme indéterminée pour

$$x = 0, \qquad t = -\frac{a}{b},$$

du moins pour une des déterminations du radical. Ne pourrait-il pas y avoir alors une intégrale t de l'équation tendant vers $-\frac{a}{b}$ quand x tend vers zéro? Pour voir que la chose est impossible, il suffira de considérer, dans l'équation différentielle proposée, x comme fonction de y et, posant $x = t'y$, on aura une équation différentielle entre y et t', et cette équation ne pourra avoir une intégrale t' tendant vers $-\frac{b}{a}$ quand y tend vers zéro, car il n'y a plus ici aucune difficulté, puisque $ab_2 - a_2b \neq 0$.

Les courbes d'intégrales que nous venons d'étudier étaient supposées avoir une tangente à l'origine. *Peut-il exister d'autres intégrales?* Telle est la question qui doit maintenant nous occuper. Il est d'ailleurs entendu que nous restons dans le cas général et que nous ne supposons remplie aucune condition particulière d'égalité entre les divers coefficients.

Outre l'équation (7), nous aurons encore à considérer l'équation

$$(8)\qquad (a_1 + b_1 t)^2 - (a + bt)(a_2 + b_2 t) = 0,$$

correspondant aux directions qui donnent une racine double pour $\frac{dy}{dx}$.

12. Supposons d'abord que l'équation (8) ait ses racines imaginaires. En se servant des coordonnées polaires, l'équation de la courbe devient

$$\frac{\theta\, d\rho + \rho\cos\theta\, d\theta}{\theta\, d\rho - \rho\sin\theta\, d\theta} = \frac{-(a_1\cos\theta + b_1\sin\theta) + \rho(\quad) \pm \sqrt{(a_1\cos\theta + b_1\sin\theta)^2 - (a\cos\theta + b\sin\theta)(a_2\cos\theta + b_2\sin\theta}}{a\cos\theta + b\sin\theta + \rho(\quad)}$$

que nous écrirons sous la forme

$$(9)\qquad [f(\theta) + \rho(\quad)]\, d\rho = \rho[\varphi(\theta) + \rho(\quad)]\, d\theta,$$

en posant

$$f(\theta) = -\sin\theta(a\cos\theta + b\sin\theta) - \cos\theta(a_1\cos\theta + b_1\sin\theta)$$
$$\pm\cos\theta\sqrt{(a_1\cos\theta + b_1\sin\theta)^2 - (a\cos\theta + b\sin\theta)(a_2\cos\theta + b_2\sin\theta)};$$

les coefficients de ρ, qui sont marqués dans l'équation (9) par des parenthèses, sont des séries ordonnées suivant les puissances de ρ et convergentes quel que soit θ; nous nous appuyons pour ce dernier point sur ce que l'équation (8) a ses racines imaginaires, d'où il résulte que l'expression

$$(a_1\cos\theta + b_1\sin\theta)^2 - (a\cos\theta + b\sin\theta)(a_2\cos\theta + b_2\sin\theta)$$

ne peut s'annuler. Les racines de l'équation (7) correspondent aux racines de l'équation

$$f(\theta) = 0,$$

et il est entendu, une fois pour toutes, que, parmi ces racines, nous ne comptons pas la racine, sans intérêt pour nous d'après une remarque du paragraphe précédent, répondant à

$$a\cos\theta + b\sin\theta = 0.$$

Il résulte de la forme de l'équation (9) que, partant d'une valeur initiale (ρ_0, θ_0) avec une détermination fixée pour le radical qui figure dans $f(\theta)$, *nous pourrons toujours faire varier* θ *dans le même*

sens (¹), les seules valeurs de θ appelant l'attention étant les racines de $f(\theta) = 0$. Si, θ arrivant à une telle racine θ_0, ρ prend la valeur zéro, nous serons dans le cas étudié d'une courbe ayant une tangente déterminée à l'origine.

Si ρ ne prend pas la valeur zéro, le point ne présente rien de particulier pour nous. On pourrait encore *a priori* faire l'hypothèse que, θ tendant vers θ_0, ρ ne tend vers aucune limite, mais oscille entre *zéro* et une autre valeur, mais on voit de suite que cela est impossible.

Nous venons de voir que l'on pourra toujours suivre une courbe

---

(¹) Si l'on veut développer davantage ce point, on peut raisonner de la manière suivante. Il pourrait se faire que le rayon vecteur changeât de sens de rotation, si l'on arrivait à un point (x, y) de la courbe intégrale telle que la tangente en ce point passe à l'origine. Or, le lieu des points des courbes intégrales pour lesquels la tangente passe à l'origine est la courbe que l'on obtient en remplaçant dans l'équation différentielle $\frac{dy}{dx}$ par $\frac{y}{x}$. Cette courbe a un point triple à l'origine, les tangentes correspondant aux directions données par l'équation (7). En coordonnées polaires, cette courbe a pour équation le coefficient de $d\rho$ dans (9), c'est-à-dire

$$(\mathrm{L}) \qquad f(\theta) + \rho(\quad) = 0.$$

On pourrait craindre qu'une intégrale eût, sur une branche de la courbe précédente, une infinité de points dans le voisinage de l'origine, pour lesquels la tangente à l'intégrale passerait à l'origine. Dans ce cas, il ne serait plus permis d'affirmer que, si près de l'origine qu'on considère l'intégrale, le rayon vecteur marche toujours dans le même sens. Pour démontrer qu'il n'en peut être ainsi, remarquons qu'il y a une courbe intégrale tangente à l'origine à la branche considérée de la courbe (L); nous pouvons supposer, en effectuant préalablement un changement de variable, que cette courbe intégrale est l'axe des x. Pour une détermination convenable du radical, $f(\theta)$ s'annulera pour $\theta = 0$, et l'équation différentielle devant être satisfaite pour $\theta = 0$, quel que soit ρ, le second terme dans (L) s'annulera pour $\theta = 0$, quel que soit ρ. Il en résulte que, dans le voisinage de $\theta = 0$, l'équation différentielle peut prendre la forme

$$\theta[1 + (\quad)]\,d\rho = \rho[\varphi(\theta) + \rho(\quad)]\,d\theta,$$

la quantité représentée dans le premier membre par une parenthèse s'annulant pour $\rho = \theta = 0$. Si maintenant on suit une intégrale à partir d'une détermination initiale (θ_0, ρ_0), θ_0 et ρ_0 désignant des quantités positives très petites, et que θ commence par décroître, il continuera nécessairement à décroître jusqu'à $\theta = 0$, car le multiplicateur de $d\rho$ ne s'annule que pour $\theta = 0$. Ce sera pour cette dernière valeur que ρ s'annulera si la courbe se rapproche indéfiniment de l'origine; il est clair que $\varphi(0)$ sera alors nécessairement positif.

Les considérations précédentes un peu développées permettraient même d'éviter la discussion que nous faisons ensuite dans le texte, mais l'étude directe fait pénétrer davantage dans la question.

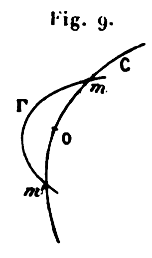
intégrale en faisant varier θ dans le même sens, tant que l'on n'aura pas atteint l'origine. On peut donc penser qu'il est possible d'avoir une intégrale ayant la forme d'une spirale; nous allons voir qu'il n'en est rien.

L'équation (7) ayant au moins une racine réelle, il y aura toujours une courbe intégrale correspondant à l'intégrale holomorphe de l'équation différentielle, qui passera par l'origine. (Nous nous plaçons toujours dans le cas général où il n'y a aucune relation particulière d'égalité entre les coefficients.)

Soit C cette courbe; concevons une autre courbe intégrale Γ, rencontrant en m la première et passant à l'origine ou s'en rapprochant indéfiniment. En suivant Γ, nous pourrons arriver au point O, θ marchant toujours dans le même sens. Cherchons si Γ peut rencontrer C en un second point m' qui sera nécessairement ([1]) situé sur C de l'autre côté que m par rapport à O. En m l'équation différentielle donne pour $\frac{dy}{dx}$ deux valeurs; l'une convient à C, l'autre à Γ.

Sous le radical qui figure dans l'expression de $\frac{dy}{dx}$ se trouve une

Fig. 9.



expression toujours positive. Les points m et m' sont de part et d'autre de O et très voisins. Supposons qu'en m ce soit la détermination positive du radical qui convienne à Γ, le coefficient angulaire de la tangente à Γ en m est

$$(E) \qquad \frac{-(a_1x+b_1y+\ldots)+\sqrt{(a_1x+b_1y+\ldots)^2-\ldots}}{ax+by+\ldots},$$

tandis que, pour C, il faudra mettre le signe *moins* devant le radical. Suivons maintenant (x, y) sur Γ de m en m'; le radical gardera toujours le même signe, en m' et m les coordonnées x et y sont respec-

([1]) Dans le cas contraire, θ aurait dû rétrograder à un certain moment.

tivement de signes contraires, les rapports $\frac{y}{x}$ ayant, à très peu près, la même valeur. Il en résulte qu'en suivant Γ nous trouvons en m' une valeur de E très voisine de la valeur de $\frac{dy}{dx}$ en m pour la courbe C et, par suite, très voisine de celle de $\frac{dy}{dx}$ en m' pour la même courbe C. Mais, en m', l'équation différentielle donne deux valeurs différentes pour $\frac{dy}{dx}$; les deux valeurs, que nous avons trouvées peu différentes, sont donc rigoureusement égales, et, par suite, la tangente en m' à la courbe C coïncide avec la tangente à Γ : les deux courbes C et Γ coïncideraient donc, ce qui est absurde. La courbe Γ ne peut donc rencontrer C en aucun autre point que O (en dehors de m), et elle arrive par suite en O avec une tangente déterminée, rentrant ainsi dans la classe d'intégrales dont nous avons fait l'étude. Notre conclusion est donc que *toutes les courbes intégrales cherchées ont à l'origine une tangente déterminée.*

13. Examinons maintenant le cas où l'équation (8) a ses racines réelles. En écrivant que les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ données par l'équation différentielle sont égales, on obtient une courbe ayant un point double à l'origine avec tangentes distinctes. On peut faire un changement de variables tel que les deux branches de la courbe coïncident avec Ox et Oy; nous allons nous placer dans cette hypothèse. Les axes de coordonnées sont alors (Chap. III, § 2) le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales, et celles-ci, avant d'atteindre l'origine, resteront dans un même quadrant que nous pouvons supposer être le premier. Quand on suit une courbe intégrale, le rayon vecteur marche toujours dans le même sens, sauf pour les positions Ox et Oy où change le sens du mouvement; c'est ce qui résulte de ce que la seule irrationnelle figurant dans l'équation est le radical

$$P(\theta) = \sqrt{(a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta)^2 - (a \cos\theta + b \sin\theta)(a_2 \cos\theta + b_2 \sin\theta)},$$

qui d'ailleurs ici se réduit à $\sqrt{\cos\theta \sin\theta}$ d'après nos hypothèses. Le signe de ce radical sera à changer quand θ arrivera à zéro ou à $\frac{\pi}{2}$.

Remarquons encore que toute racine réelle τ de l'équation (7) satisfait à l'inégalité

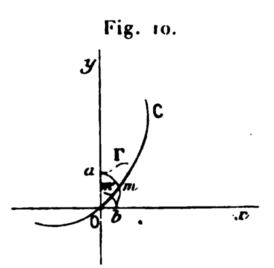
$$(a_1 + b_1\tau)^2 - (a + b\tau)(a_2 + b_2\tau) > 0,$$

comme on le conclut de suite de l'équation

$$(a + b\tau)\tau^2 + 2(a_1 + b_1\tau)\tau + a_2 + b_2\tau = 0.$$

Il en résulte qu'il y aura, au moins dans le premier quadrant, une courbe intégrale avec une tangente déterminée.

Fig. 10.



Nous pouvons maintenant chercher à suivre une courbe intégrale qui tendrait vers l'origine. Soit C (*fig.* 10) une intégrale ayant une tangente déterminée à l'origine; suivons une autre intégrale Γ et supposons que, en suivant la courbe en allant vers l'origine, θ aille d'abord en croissant. Il pourra arriver que ρ tende vers zéro pour une valeur de θ moindre que $\frac{\pi}{2}$, et alors nous aurons une branche de courbe avec une tangente déterminée. Dans le cas contraire θ pourra croître jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, et la courbe Γ aura un point de rebroussement a sur l'axe des y. Il faut alors faire décroître θ. Deux cas pourront alors se rencontrer : ou bien ρ prendra la valeur zéro pour une certaine valeur de θ comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et o, et alors nous aurons une courbe intégrale avec une tangente déterminée; ou bien θ pourra atteindre la valeur zéro et l'on aura en b sur Ox un second point de rebroussement. Dans ce cas, il y aura certainement un point m de rencontre de C et de Γ, et pour la branche ab de Γ le radical $\sqrt{P(\theta)}$ aura un certain signe. Continuons à décrire Γ; ou bien la courbe intégrale arrivera à l'origine avec une tangente déterminée, ou bien θ pourra aller jusqu'à $\frac{\pi}{2}$; mais alors il y aurait un second point de rencontre m' de Γ avec C. Pour la branche bm', le radical $\sqrt{P(\theta)}$ a dans l'équation différentielle un autre signe que pour la branche bm. Or, en m, l'équation différentielle donne deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ correspondant aux

deux courbes intégrales passant en m ; ces valeurs correspondent aux deux signes du radical. L'une correspond à C, l'autre à Γ, mais en m et m' les coefficients angulaires de la tangente à C sont très peu différents. Il s'ensuit que le coefficient angulaire de la tangente en m' à Γ coïncide avec le coefficient angulaire de la tangente à C (puisqu'en m ils étaient distincts, et que le signe du radical a changé en b). Nous arrivons donc à une contradiction qui établit l'impossibilité du second point de rencontre m', à moins que ce dernier ne coïncide avec l'origine. Nous avons donc dans tous les cas la conclusion suivante :

Toutes les courbes intégrales passant à l'origine ou s'en rapprochant indéfiniment arrivent nécessairement en ce point avec une tangente déterminée.

L'étude de ces courbes se fera donc sans difficulté, *pour le cas général,* en appliquant les considérations développées dans la Section I.

14. Nous allons appliquer les généralités précédentes à un problème intéressant de Géométrie, celui des lignes de courbure passant par un ombilic [1].

Supposons que l'ombilic soit à l'origine, et prenons le développement de z sous la forme

$$z = \tfrac{1}{2}k(x^2+y^2) + \tfrac{1}{6}(ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3)+\ldots,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} p &= kx + \tfrac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)+\ldots,\\ q &= ky + \tfrac{1}{2}(bx^2+2cxy+dy^2)+\ldots,\\ r &= k + ax + by + \ldots,\\ s &= \phantom{k + {}} bx + cy + \ldots,\\ t &= k + cx + dy + \ldots. \end{aligned}$$

L'équation différentielle de la projection des lignes de courbure est,

(1) M. Cayley a fait le premier l'étude des lignes de courbure passant par un ombilic, sans la rattacher d'ailleurs à aucune théorie générale (*voir* CAYLEY, *Mathematical Papers,* t. V, p. 115).

comme on sait,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2[(1+q^2)s-pqt]$$
$$+\frac{dy}{dx}[(1+q^2)r-(1+p^2)t]-[(1+p^2)s-pqr]=0.$$

En substituant les valeurs précédentes, on a

$$(bx+cy+\ldots)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2(fx+gy+\ldots)\frac{dy}{dx}-(bx+cy+\ldots)=0,$$

en posant

$$2f=a-c, \qquad 2g=b-d.$$

L'équation (7) aux coefficients angulaires des tangentes aux courbes intégrales est ici

$$(b+ct)(t^2-1)+2(f+gt)t=0,$$

et elle aura évidemment, suivant les cas, une ou trois racines réelles. Quant à l'équation (8) du second degré en t, elle se réduit à

$$(f+gt)^2+(b+ct)^2=0,$$

et a, par suite, ses racines imaginaires. En posant $y=tx$, nous avons l'équation en t, où nous n'écrivons pas dans le second membre les termes en x inutiles pour la discussion

$$x\frac{dt}{dx}=\frac{-t(b+ct)-(f+gt)\pm\sqrt{(f+gt)^2+(b+ct)^2}}{b+ct}.$$

Nous savons que le second membre s'annule pour trois valeurs de t qui sont les racines de l'équation du troisième degré écrite ci-dessus. Soit α une racine de cette équation, il faut trouver le signe de la dérivée du second membre de l'équation précédente pour $t=\alpha$. Il suffit de prendre la dérivée du numérateur et de la diviser par $b+ct$ et, comme on a

$$\pm\sqrt{(f+g\alpha)^2+(b+c\alpha)^2}=\alpha(b+c\alpha)+f+g\alpha,$$

on trouve d'abord, après avoir ainsi fait disparaître le radical,

$$-1+\frac{-2\alpha(c\alpha+g)+c(\alpha^2+1)}{2[\alpha(b+c\alpha)+f+g\alpha]},$$

et, après quelques transformations, en tenant compte de l'équation

du troisième degré que vérifie α,

$$\frac{-2c\alpha^3-(2g+b)\alpha^2-b}{(\alpha^2+1)(b+c\alpha)}.$$

Si cette expression est positive, il y a une infinité d'intégrales tangentes à la droite $y = \alpha x$; il n'y en a qu'une, si elle est négative. Les deux circonstances sont possibles, car cette expression ne contient pas f qui figure dans l'équation du troisième degré.

Il y a donc, suivant les cas, une seule ligne de courbure ou une infinité de lignes de courbure passant par un ombilic et ayant pour tangente une des directions données par l'équation du troisième degré.

15. Un cas particulier très simple est celui où l'on aurait

$$b = 0.$$

L'équation du troisième degré est alors

$$ct(t^2-1)+2(f+gt)t = 0.$$

Nous avons donc la racine $\alpha = 0$, et l'expression correspondante, dont le signe est à rechercher, se réduit à

$$-1+\frac{c}{2f}.$$

Supposons, par exemple, que

$$\frac{c}{2f} < 1.$$

Nous aurons une seule intégrale tangente à la droite $y = 0$; si, de plus, comme il est possible, l'équation

$$c(t^2-1)+2(f+gt) = 0$$

a ses racines imaginaires, nous aurons un exemple d'un ombilic par lequel passe une seule ligne de courbure.

Ces conditions se trouvent vérifiées pour une surface du second degré. On reconnaît aisément que, en prenant pour plan des zx le plan principal passant par l'ombilic, l'équation de la surface peut s'écrire

$$z + A(x^2+y^2) + A'z^2 + 2B'zx = 0,$$

et l'on a, par suite, un développement de la forme

$$z = \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{6}(ax^3 + axy^2) + \ldots.$$

On a donc

$$b = d = 0,$$

$$c = \frac{a}{3}$$

et, par suite,

$$f = \frac{a}{3}, \qquad g = 0.$$

On a bien $\frac{c}{2f} < 1$ et l'équation aux coefficients angulaires des ta gentes se réduit à

$$t(t^2 + 1) = 0.$$

Il ne passe donc par un ombilic d'une quadrique qu'une seule lig de courbure réelle, résultat d'ailleurs bien connu.

CHAPITRE X.

SUR LA FORME DES COURBES SATISFAISANT A UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE ET DU PREMIER DEGRÉ (1).

I. — Étude des points à l'infini; relation entre les nombres des divers points singuliers.

1. Après avoir fait l'étude des points singuliers d'une courbe définie par une équation différentielle du premier ordre et du premier degré (Sect. I, Chap. XI), cherchons à nous rendre compte de la forme des courbes définies par une telle équation. Reprenons donc l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

où X et Y sont des polynomes en x et y. Nous désignerons d'une manière générale, sous le nom de *caractéristiques,* les courbes que nous avons appelées jusqu'ici *courbes intégrales* de cette équation différentielle.

Nous n'avons jusqu'ici considéré que les points à distance finie. Pour discuter plus facilement les formes des caractéristiques à l'infini, nous projetterons ces courbes sur une sphère, en plaçant le point de vue au centre de la sphère. En joignant le point (x, y) du plan au point de vue, on a une droite qui rencontre la sphère en deux points. En supposant la sphère partagée en deux hémisphères par un plan diamétral P, parallèle au plan (x, y), l'un de ces points sera

---

(1) Nous suivons dans ce Chapitre le beau Mémoire de M. Poincaré [*Sur les courbes définies par les équations différentielles* (*Journal de Liouville,* 1881 et 1882)], en cherchant surtout à mettre en évidence les points les plus intéressants relatifs au côté qualitatif de la question.

situé dans le premier hémisphère, l'autre dans le second. Les points à l'infini du plan (x, y) correspondront à la circonférence E, intersection de la sphère et du plan P; nous appellerons E l'équateur.

Nous appellerons *cycle* sur la sphère une courbe telle qu'on revienne au point de départ après en avoir parcouru un arc fini. Nous ne considérerons que les cycles analytiques; nous entendons par là des cycles formés d'arcs *réguliers* de lignes analytiques (*voir* t. II, p. 298, 2e édition, pour la définition des arcs analytiques).

Une *spirale* sur la sphère sera une courbe qui coupe un cycle en un seul point; telle est, par exemple, la loxodromie qui coupe les parallèles en un seul point.

Si l'on considère les deux portions d'une même caractéristique qui se trouvent de part et d'autre d'un de ses points, on aura divisé cette caractéristique (à moins qu'elle ne soit un cycle) en deux *demi-caractéristiques* distinctes.

2. Dans l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

nous supposerons X et Y de même degré m et, de plus, aucune circonstance spéciale ne se présente relativement aux points singuliers, c'est-à-dire que ceux-ci se réduisent à des foyers, des nœuds et des cols.

Pour étudier les points à l'infini, on pose, s'il s'agit d'un point non situé sur le grand cercle qui correspond à $x = 0$,

$$x = \frac{1}{z}, \qquad y = \frac{t}{z};$$

et l'on a ainsi, pour le point considéré, $z = 0$, t étant égale à un quantité *finie*.

Si l'on veut considérer le point à l'infini situé sur le grai cercle $x = 0$, on posera

$$x = \frac{t}{z}, \qquad y = \frac{1}{z}.$$

3. Nous avons fait précédemment l'étude des points singuli qui sont à l'intersection des deux courbes

$$X = 0, \qquad Y = 0.$$

Nous n'avons considéré que les points d'intersection à distance finie. Si les deux courbes précédentes se coupent en un point situé sur l'équateur, soit, par exemple, en un point non situé sur $x = 0$, l'équateur devient, en posant

$$x = \frac{1}{z}, \qquad y = \frac{t}{z}$$

($z = 0$, $t = \alpha$ correspondant au point considéré à l'infini),

$$\frac{-dz}{X\left(\frac{1}{z}, \frac{t}{z}\right)} = \frac{z\,dt - t\,dz}{Y\left(\frac{1}{z}, \frac{t}{1}\right)}$$

ou

$$dz(tX_1 - Y_1) = dt\,zX_1,$$

en posant $X\left(\frac{1}{z}, \frac{t}{z}\right) = \frac{X_1(t, z)}{z^m}$, $Y\left(\frac{1}{z}, \frac{t}{z}\right) = \frac{Y_1(t, z)}{z^m}$. On aura, d'après l'hypothèse que $z = 0$, $t = \alpha$ correspond à un point de rencontre,

$$X_1(\alpha, 0) = 0, \qquad Y_1(\alpha, 0) = 0.$$

4. Je dis d'abord que *tout système de caractéristiques admet des points singuliers*. Le seul cas, où l'affirmation précédente est douteuse, est celui où les courbes $X = 0$, $Y = 0$ ne se rencontreraient qu'à l'infini ou ne se couperaient en aucun point. Dans le premier cas, il résulte immédiatement de ce que nous avons dit au paragraphe précédent qu'un point de rencontre ($t = \alpha$, $z = 0$) est un point singulier, car pour ce point

$$zX_1 = 0, \qquad tX_1 - Y_1 = 0,$$

et, par suite, les dénominateurs de l'équation

$$\frac{dz}{zX_1} = \frac{dt}{tX_1 - Y_1}$$

s'annulent pour $t = \alpha$, $z = 0$.

Considérons donc le cas où les deux courbes $X = 0$, $Y = 0$ n'auraient aucun point commun; le degré m de X et Y est alors pair évidemment.

En désignant par X_2 et Y_2 les termes du degré le plus élevé en x et y dans X et Y, nous devons supposer que l'on n'a pas identi-

quement

$$xY_2 - yX_2 = 0 :$$

cette identité est, en effet, incompatible avec nos hypothèses. Car, si l'on avait

$$xY_2 = yX_2,$$

X_2 serait divisible par x et Y_2 par y. Soit

$$X_2 = xX_3, \qquad Y_2 = yY_3,$$

on déduit de l'identité ci-dessus

$$X_3 = Y_3.$$

X_3 est une fonction homogène et de degré impair; donc elle s'annule, soit pour $x = 0$, soit pour une certaine valeur $\frac{y}{x} = \alpha$. On aurait donc

$$X_2 = Y_2 = 0,$$

soit pour $x = 0$, soit pour $\frac{y}{x} = \alpha$, c'est-à-dire que les courbes $X = 0$, $Y = 0$ se couperaient en un point de l'équateur.

L'équation $yX_2 - xY_2 = 0$, étant de degré impair, a nécessairement une racine réelle, que nous désignerons par α. Or, en posant, comme plus haut,

$$x = \frac{1}{z}, \qquad y = \frac{t}{z},$$

on voit que les équations

$$zX_1 = 0, \qquad tX_1 - Y_1 = 0$$

s'annuleront pour $z = 0$, $t = \alpha$, car $tX_1 - Y_1$ pour $z = 0$ se réduit à $tX_2(1, t) - Y_2(1, t)$.

5. Nous plaçant toujours dans le cas général, nous pouvons supposer que les courbes

$$X = 0, \qquad Y = 0$$

n'ont que des points simples de rencontre, et que ces points sont à distance finie. De plus, nous supposons que l'équation

$$xY_2 - yX_2 = 0$$

n'a que des racines simples. De cette façon, $t = \alpha$, $z = 0$ (au para-

graphe précédent) est une solution simple des deux équations

$$zX_1 = 0, \qquad tX_1 - Y_1 = 0.$$

Dans ces conditions, tous les points singuliers (en dehors de l'équateur ou sur l'équateur) sont des points singuliers ordinaires du type de ceux que nous avons rencontrés dans la discussion du Chapitre précédent : *foyers, cols* ou *nœuds,* et exceptionnellement des centres (ceux-ci correspondant à des relations d'égalité).

J'ajoute encore que *l'équateur sera une caractéristique,* comme il résulte de l'équation

$$\frac{dz}{+zX_1} = \frac{dt}{tX_1 - Y_1},$$

qui est vérifiée pour $z = 0$. Il en résulte que *tout point singulier situé sur l'équateur sera un nœud ou un col,* car toutes les caractéristiques, passant par un foyer, ont ce point comme point asymptote.

Enfin, le nombre des points singuliers sur la sphère *est évidemment pair,* puisque tout est symétrique par rapport au centre de la sphère.

6. Considérons maintenant une courbe fermée tracée dans un hémisphère; il lui correspond une courbe fermée C dans le plan (x, y). Formons l'intégrale

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2 + Y^2},$$

que l'on prendra le long du contour C dans le sens positif. Comme nous l'avons vu (t. I, 2e éd., p. 99), l'intégrale J représente la différence entre le nombre des racines communes aux équations

$$X = 0, \qquad Y = 0,$$

contenues dans C, pour lesquelles le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}$$

est positif, et celles pour lesquelles il est négatif.

Si à l'intérieur de C il n'y a pas de point singulier, c'est-à-dire de point pour lequel $X = Y = 0$, on aura évidemment $J = 0$. Supposons

qu'il y ait un point singulier à l'intérieur de C, et cherchons la valeur de J. Si ce point est à l'origine, on aura

$$X = ax + by + \ldots,$$
$$Y = a'x + b'y + \ldots.$$

Si l'on a

$$ab' - ba' > 0,$$

on aura, d'après ce qui précède, $J = 1$. Au contraire, si l'on a

$$ab' - ba' < 0,$$

il viendra $J = -1$.

Or, dans le premier cas $[ab' - ba' > 0]$, les deux racines de l'équation en λ

$$\lambda^2 - (a + b')\lambda + ab' - ba' = 0$$

seront de même signe ou imaginaires, et, par suite, le point singulier sera un nœud ou un foyer. Si, au contraire, $ab' - ba' < 0$, les deux racines seront réelles et de signes contraires, et nous aurons un col. En désignant donc respectivement par N, F, C les nombres des nœuds, des foyers et des cols contenus dans un contour Γ, on aura

$$J = N + F - C.$$

On peut appeler J *l'indice du cycle;* il peut être encore défini de la manière suivante. En appelant p le nombre de fois que le quotient

$$\frac{Y}{X}$$

passe de $+\infty$ à $-\infty$ quand le point (x, y) décrit Γ dans le sens positif, et par n le nombre de fois que ce quotient passe de $-\infty$ à $+\infty$ dans les mêmes conditions, on aura

$$J = \frac{p - n}{2}.$$

7. En adoptant cette dernière définition, on peut parler de *l'indice de l'équateur*. Cet indice est le nombre précédent pour la fraction

$$\frac{Y_2}{X_2},$$

quand on y pose $x = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$ et qu'on fait varier ω de 0

à 2π; ce sera donc l'indice de la fraction rationnelle

$$\mathop{\mathrm{I}}_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{Y_2(1, t)}{X_2(1, t)}\right],$$

pour t variant de $-\infty$ à $+\infty$, puisque tout est symétrique par rapport au centre de la sphère (*voir*, pour l'indice des fractions rationnelles, t. II, 2ᵉ éd., p. 193), et l'on peut évidemment aussi considérer l'indice de l'équateur comme la limite de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2+Y^2},$$

quand on pose $x = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$, r étant une constante qu'on fait grandir indéfiniment.

Reprenons l'équation du § 5

$$z\frac{dt}{dz} = \frac{-Y_1 + tX_1}{X_1}.$$

Les valeurs de t, intéressantes pour nous, sont les racines de l'équation

$$(1)\qquad Y_1(t, 0) - tX_1(t, 0) = 0,$$

mais, puisqu'on a

$$Y_1(t, 0) = Y_2(1, t),$$
$$X_1(t, 0) = X_2(1, t),$$

on peut écrire l'équation sous la forme

$$z\frac{dt}{dz} = \frac{-Y_2(1, t) + tX_2(1, t)}{X_2(1, t)},$$

et les racines de l'équation

$$(2)\qquad Y_2(1, t) - tX_2(1, t) = 0$$

correspondent à des nœuds ou des cols. Or, considérons l'expression

$$\frac{Y_2(1, t)}{X_2(1, t)} - t,$$

et désignons par α et β le nombre de fois qu'elle passe du positif au négatif et du négatif au positif, quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$. Cette expression peut passer du positif au négatif, soit quand t rencontre

une racine de (2), et alors nous avons un nœud, soit quand elle devient infinie en passant de $+\infty$ à $-\infty$; de même elle peut passer du négatif au positif, soit quand t rencontre une racine de (2) correspondant à un col, soit quand elle devient infinie en passant de $-\infty$ à $+\infty$. D'ailleurs, puisque pour $t=+\infty$ l'expression est négative, et positive pour $t=-\infty$, on aura

$$\alpha-\beta=1,$$

et, par suite, si nous désignons par $2N'$ et $2C'$ le nombre évidemment pair (puisqu'il y a symétrie par rapport au centre de la sphère des nœuds et des cols sur l'équateur, nous aurons

$$N'-C'+\underset{-\infty}{\overset{+\infty}{I}}\left(\frac{Y_2}{X_2}\right)=1.$$

L'indice de l'équateur est donc égal à

$$1+C'-N'.$$

8. En égalant les deux expressions trouvées dans les deux paragraphes précédents pour l'indice d'une courbe du premier hémisphère très voisine de l'équateur, nous aurons une relation entre les cols, les foyers et les nœuds sur la sphère. Nous appelons, comme ci-dessus, $2C'$ et $2N'$ les nombres des cols et des nœuds situés sur l'équateur. Désignons de même comme ci-dessus par $2C$, $2N$, $2F$ les nombres évidemment pairs des cols, nœuds et foyers sur le reste de la sphère. Sur un hémisphère, les cols, nœuds et foyers sont en nombres respectivement égaux à C, N, F. On aura donc

$$1+C'-N'=N+F-C,$$

que nous écrirons

$$2(N+N')+2F=2(C+C')+2.$$

On peut donc dire que, sur toute la sphère, *le nombre des nœuds plus le nombre des foyers est égal au nombre des cols plus deux*.

II. — Remarques générales sur la forme des caractéristiques.

9. Faisons d'abord une première remarque relative à la continuation des intégrales. Quand on suit à partir d'un point une carac-

téristique, divers cas peuvent se présenter; il peut arriver que l'on arrive à un col ou un nœud (nous ne parlons pas des foyers auxquels on n'arrive pas puisque ce sont des points asymptotes). Quand on arrive à un col, on peut, soit suivre l'arc de courbe situé de l'autre côté du col et ayant la même tangente, soit prendre l'arc à droite ou l'arc à gauche, et nous ferons bientôt une hypothèse particulière à ce sujet. Pour les nœuds, les choses se présentent différemment et il faut nécessairement arrêter la caractéristique à un nœud. Nous savons en effet que, moyennant une transformation convenable des variables, on peut mettre l'équation des caractéristiques sous la forme

$$y = Cx^{\lambda},$$

C étant la constante arbitraire, et λ une constante réelle positive. Considérons une caractéristique arrivant à l'origine; soit, par exemple, pour une valeur donnée de C, la branche parfaitement définie correspondant aux valeurs positives de x obtenue en donnant à x^{λ} sa valeur arithmétique. Une fois arrivé à l'origine, nous n'avons plus aucune raison en général de suivre une courbe intégrale plutôt qu'une autre (sauf dans le cas particulier où λ serait commensurable), et *nous arrêtons alors l'intégrale à un nœud.*

Ceci posé, voici un premier théorème à peu près évident, mais fort important pour la suite. Je considère une demi-caractéristique C passant par un point singulier A. Nous supposons qu'elle n'aille pas passer par un nœud, et nous allons montrer dans ces conditions que, *si cette demi-caractéristique ne coupe tout cycle analytique qu'en un nombre fini de points, elle se réduit nécessairement à un cycle.*

Partageons la sphère, d'abord en deux calottes sphériques S_1 et S_2 par un cycle analytique. Comme la caractéristique étudiée ne rencontre ce cycle qu'en un nombre fini de points, il arrivera un moment où elle restera toujours dans l'une des deux calottes sphériques, soit S_1. Celle-ci devra contenir A; sinon, nous la partagerions en un certain nombre de parties par des cycles, et il y en aurait nécessairement une dans laquelle la ligne resterait toujours, cela pour la même raison que plus haut; finalement, on arriverait à avoir des cycles de plus en plus petits, à l'intérieur desquels resterait toujours la caractéristique, cycles qu'on pourrait faire tendre vers zéro, et alors le point limite serait un foyer, ce qui est incompatible avec l'hypo-

thèse que tout cycle ne coupe la courbe qu'en un nombre fini de points. Revenons donc à la calotte S_1 ; on la décomposera encore en deux parties, et la caractéristique finira par rester dans l'une d'elles, celle qui contient A, comme le montre toujours le même raisonnement. Finalement nous aurons une série de cycles de plus en plus petits contenant A, à l'intérieur desquels restera la courbe; celle-ci va donc repasser par le point A, et *nous avons bien un cycle,* comme nous voulions l'établir.

10. Une considération d'une grande importance est celle du nombre des points où un arc de courbe donné sur la sphère touche une caractéristique, c'est-à-dire le nombre des contacts de cet arc. Pour un arc analytique régulier ou formé d'un nombre fini d'arcs réguliers, le nombre des contacts sera nécessairement fini. Soit donné dans le plan un arc pris entre deux points A et B de la courbe représentée par l'équation

$$F(x, y) = 0;$$

on cherchera les contacts de cet arc en écrivant qu'en un point (x, y) de cette courbe, le coefficient angulaire de la tangente est égal à la valeur de $\frac{dy}{dx}$ donnée par l'équation différentielle, d'où l'on conclut

$$X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Les intersections des deux courbes précédentes comprises entre A et B donnent les contacts cherchés. Si les deux courbes étaient tangentes en un point, il y aurait plusieurs contacts confondus, et alors la caractéristique en ce point aurait un contact d'ordre supérieur avec l'arc donné. En tenant compte du degré de multiplicité, on voit que *les nombres des contacts d'un cycle sans point anguleux et ne passant pas par un point singulier est toujours un nombre pair;* c'est une conséquence immédiate de ce que deux courbes fermées de la sphère ont un nombre pair de points de rencontre.

Si le cycle a un point anguleux, le résultat précédent ne subsiste pas sans modification, car le point anguleux figure parmi les contacts. Nous supposons que le point anguleux est un point ordinaire pour l'équation. Deux cas peuvent se présenter : la caractéristique passant par le point anguleux traverse ou non le cycle. Dans le premier cas,

un cycle peu différent du cycle donné, mais sans point anguleux, n'aura pas de contact voisin du point anguleux, et, par suite, pour le cycle donné, nous avons un contact de plus que pour le cycle auxiliaire; la parité sera donc différente pour les deux cycles, et nous pouvons dire alors que le point anguleux *change la parité du nombre des contacts*. Dans le second cas, il y aura pour le cycle auxiliaire un contact voisin du point anguleux, et le point anguleux *ne change pas la parité du nombre des contacts*.

11. Si l'on joint deux points A et B d'une caractéristique par un arc de courbe qui n'ait avec la caractéristique d'autre point commun que ses deux extrémités A et B, l'arc de courbe et l'arc de caractéristique compris entre les deux points formeront par leur ensemble un cycle sphérique. Mais deux cas peuvent se présenter, et cette distinction est d'une grande importance. *En premier lieu*, les deux branches de courbes formées par la caractéristique prolongée au delà de A et B sont toutes deux intérieures ou toutes deux extérieures au cycle formé par les deux arcs. Nous dirons dans ce cas que l'arc de courbe *sous-tend* l'arc de caractéristique. *En second lieu*, les deux branches prolongées au delà de A et B sont l'une intérieure, l'autre extérieure au cycle formé par les deux arcs; nous dirons alors que l'arc de courbe *sur-tend* l'arc de caractéristique.

Ces définitions posées, considérons un arc de caractéristique ne passant par aucun point singulier et sous-tendu par un arc de courbe AB.

Nous allons montrer que *le nombre des contacts de cet arc de courbe est impair*. Supposons que l'arc de courbe AB, supposé analytique, soit représenté par l'équation

$$F(x, y) = 0.$$

On pourra définir l'arc de caractéristique par les deux équations

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y,$$

et, puisqu'il ne passe par aucun point singulier, on peut admettre qu'on va de A en B sur la caractéristique, en faisant varier t de t_0 à t_1 $(t_0 < t_1)$. Puisque l'arc AB de la courbe F sous-tend la caractéristique, la fonction

$$F(x, y),$$

quand on substitue les expressions des coordonnées x et y de l: caractéristique, passera d'un signe à un autre, par exemple du positi au négatif, quand t passera par t_0, et du négatif au positif quand passera par t_1; la dérivée de $F(x, y)$ par rapport à t, c'est-à-dire

$$X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y},$$

sera donc négative au point A et positive au point B. Faisons main tenant décrire à (x, y) l'arc AB de F; l'expression précédente s'an nulera un nombre impair de fois, et, par suite, *le nombre de contacts de l'arc est impair.*

12. Dans le théorème précédent, l'arc de caractéristique ne passai par aucun point singulier, car un point singulier ne peut être attein que pour $t = \infty$, et nous n'avons plus alors de démonstration. O peut présenter autrement la démonstration du théorème précédent en supposant alors que la fonction $F(x, y)$ n'est pas seulemer définie dans le voisinage de l'arc sous-tendant AB, mais pour tous le points à l'intérieur du cycle formé par cet arc et la caractéristiqu Il résulte, en effet, de ce que nous avons dit plus haut, que la fon tion

$$F(x, y)$$

s'annulant en A et B, et passant, quand (x, y) décrit la caract ristique, du positif au négatif en A et du négatif au positif en passera sur l'arc de caractéristique par un nombre impair de maxi ou de minima. Or, pour ces maxima ou minima, on a

$$X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

c'est-à-dire que cette dernière courbe coupe l'arc de caractéristiq en un nombre impair de points. Or cette courbe est analytique; e coupe donc le cycle formé par la caractéristique et l'arc sous-tenda lui-même analytique, en un nombre pair de points. Il faut donc q les contacts sur l'arc sous-tendant soient en nombre impair; c'est l théorème du paragraphe précédent. Dans le raisonnement précédent on a supposé que les points de rencontre de la courbe (3) avec l cycle étaient des points simples correspondant à des contacts. Le ca où la caractéristique passerait par un col demande un examen parti

culier, car la courbe (3) passe en ce point. Si la caractéristique, arrivée en un col, continue par la courbe ayant même tangente, la courbe (3) traversera au col la caractéristique; la courbe $F(x, y) = F(x_0, y_0)$, en désignant par (x_0, y_0) les coordonnées du col, traversera aussi en général la caractéristique, et la fonction F n'aura au col ni maximum, ni minimum; un point est donc à défalquer dans l'énumération des contacts, et *nous avons alors un nombre pair pour les contacts de l'arc sous-tendant.*

Supposons, au contraire, que la caractéristique arrivée à un col soit considérée comme se continuant par un arc n'ayant pas même tangente. Étudions la disposition de la courbe (3), de la courbe $F = F_0$ et du cycle dans le voisinage du col (x_0, y_0); nous pouvons supposer $(x_0 = 0,\ y_0 = 0)$, et que, de plus,

$$X = x + \ldots,$$
$$Y = \lambda y + \ldots,$$

λ étant *négatif*. Le cycle est formé d'une courbe tangente à Ox et d'une courbe tangente à Oy. La courbe $F = F_0$ a pour tangente la droite

$$\alpha x + \beta y = 0$$

en posant $F = F_0 + \alpha x + \beta y + \ldots$, et la courbe (3) a pour tangente

$$\alpha x + \lambda \beta y = 0.$$

Ces deux dernières droites ne sont pas dans le même quadrant. Si la courbe $F = F_0$ traverse le cycle au col, la courbe (3) ne le traversera pas; nous aurons alors au col *deux* points de rencontre de (3) avec le cycle, et il n'y aura ni maximum ni minimum pour F. Au contraire, si (3) traverse le cycle, nous ne devons plus compter le col que pour *un* point de rencontre; mais il y a alors maximum ou minimum pour F, puisque alors la courbe $F = F_0$ ne traverse pas le cycle. Dans les deux cas, la conclusion est la même pour ce qui concerne la parité du nombre des contacts; ici, comme au paragraphe précédent, *le nombre des contacts de l'arc sous-tendant sera un nombre impair.*

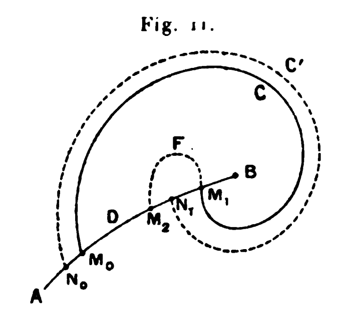
13. Dorénavant, quand nous suivrons une caractéristique, *nous prendrons pour son prolongement, si nous rencontrons un col, un*

arc de caractéristique n'ayant pas même tangente au col. Ce prolongement pourra nécessairement alors se faire de deux manières différentes, car on peut prendre l'arc de droite ou l'arc de gauche par rapport à celui que l'on suivait d'abord. Cette façon de procéder peut paraître au premier abord singulière; il pourrait sembler plus naturel de suivre l'arc ayant même tangente, ce qui ne donnerait lieu d'ailleurs à aucune indétermination; mais alors nous n'aurions plus un nombre *impair* de contacts pour un arc sous-tendant, et l'on ne peut arriver à quelques résultats généraux que moyennant cette condition.

On peut démontrer, pour les arcs qui *sur-tendent* un arc de caractéristique, un théorème analogue à celui des §§ **11** et **12**. Seulement, *le nombre des contacts sera pair.*

14. Parmi les arcs analytiques tracés sur la sphère, les arcs *sans contact* présentent un intérêt particulier. Considérons un arc sans contact ADB, et soit M_0 un point de cet arc; par ce point passe une caractéristique que nous suivons dans un certain sens, et supposons qu'en la suivant ainsi nous rencontrions une nouvelle fois l'arc ADB au point M_1. On remarquera d'abord que l'arc M_0M_1 *sur-tend* l'arc de caractéristique M_0CM_1, car, s'il le sous-tendait, il y aurait un nombre impair de contacts sur l'arc M_0DM_1, *un* au moins, par con-

Fig. 11.



séquent; ce qui est impossible, puisqu'il est sans contact. Ensuite, si l'on continue à suivre l'arc M_0CM_1, de caractéristique, je dis qu'on ne rencontrera plus l'arc M_0DM_1; car, si l'on avait l'arc M_1FM_2, il serait nécessairement sous-tendu par M_1M_2, ce qui ne se peut.

Ceci posé, soit N_0 un point voisin de M_0 et à gauche de M_0M_1 sur l'arc AB (*fig.* 9); par le point N_0 passe un arc de caractéristique

voisin du premier. Il viendra rencontrer AB en un point N_1 à gauche de M_1, car, dans le cas contraire, il devrait rencontrer M_0CM_1. Si donc nous considérons le cycle $N_0C'N_1DM_0N_0$, ce cycle ne rencontre la caractéristique M_0CM_1 qu'en un seul point M_0. D'après nos définitions du début, la caractéristique considérée est une spirale.

15. De ce résultat nous allons déduire une proposition extrêmement intéressante relativement à la nature des caractéristiques. Envisageons une caractéristique de la nature de celle que nous étudions, c'est-à-dire qui, prolongée indéfiniment, n'aboutisse pas à un nœud. Cette caractéristique pourra être un cycle. Dans le cas contraire, elle rencontrera au moins un cycle analytique en une infinité de points, d'après le théorème du § 9. Un tel cycle se composera d'un nombre fini d'arcs sans contact. Un de ces arcs AB au moins est rencontré une infinité de fois par notre caractéristique; en suivant la caractéristique à partir d'un premier point de rencontre M_0 avec AB, on en rencontre nécessairement un second M_1 et les conclusions du paragraphe précédent sont applicables. La caractéristique est donc une spirale. Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Toute caractéristique n'aboutissant pas à un nœud est un cycle ou une spirale.

Cette proposition nous donne déjà un renseignement précis sur la *forme des courbes caractéristiques*. Avant de continuer cette étude, revenons à l'équation différentielle et rappelons comment on peut obtenir quelque représentation analytique de l'intégrale.

16. Les remarques qui vont suivre s'appliquent à un système d'un nombre quelconque d'équations; prenons un système de p équations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_p}{X_p},$$

où nous supposons que les X sont des polynomes de degré m en $x_1, \ldots, x_p$; de plus, les termes du plus haut degré dans ces polynomes n'ont pas de facteur commun.

M. Poincaré a indiqué un développement des intégrales de ces équations. Nous considérerons le système

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{X_i}{1 + X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_p^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

et nous allons chercher à obtenir un développement des x cons . dérés comme fonction de t. Quand les x sont réels, les modul des seconds membres des équations précédentes sont moindr que $\frac{1}{2}$. Soit

$$x_1^0,\quad x_2^0,\quad \ldots,\quad x_p^0$$

un système quelconque de valeurs réelles des x; on peut, autour ces points, dans les plans respectifs des variables complexes , $x_2, \ldots, x_p$, décrire des cercles de rayon ρ tels que dans ces cercl on ait

$$\left|\frac{X_i}{1+X_1^2+\ldots+X_p^2}\right| < 1.$$

Ce rayon ρ a un minimum *qui n'est pas nul,* quelles que puissent être les quantités réelles x_i^0. La difficulté pourrait provenir du cas où un ou plusieurs des x_i^0 serait très grand. Soit, par exemple, x_1^0 la plus grande des quantités x_i^0, nous poserons

$$x_1 = \frac{1}{x'},\qquad x_2 = \frac{y_1}{x'},\qquad \ldots,\qquad x_p = \frac{y_{p-1}}{x'};$$

x' sera très petit, et les y de modules moindres que *un*. Or, en substituant ces valeurs dans l'inégalité ci-dessus, on voit qu'elle sera certainement vérifiée pour x' suffisamment petit, quels que soient les y entre -1 et $+1$ (en tenant compte de l'hypothèse faite sur les termes du plus haut degré des X) et, par suite, nous pourrons toujours tracer dans le plan des x les cercles de rayon fixe ρ, de façon à avoir l'inégalité indiquée.

Ceci posé, nous allons montrer que les x, intégrales de l'équation différentielle, sont des *fonctions holomorphes de la variable complexe t dans une bande parallèle à l'axe réel,* ayant cet axe comme médiane et une épaisseur 2ρ. Il suffit pour cela de nous reporter au théorème général relatif à l'existence des intégrales; en employant les notations du Tome II (p. 322), le rayon de convergence assurée est la plus petite des deux quantités

$$a,\quad \frac{b}{M}.$$

Nous n'avons pas ici à considérer le nombre a, puisque les seconds membres ne dépendent pas de t. Nous avons, d'autre part, $b = \rho$,

$M=1$, et par suite les développements s'effectueront de proche en proche, en partant d'un système de valeurs initiales réelles et en faisant décrire à t l'axe réel, à l'aide de cercles de rayon ρ ; ceci revient à dire, comme nous l'avons énoncé, que les intégrales sont holomorphes dans une bande d'épaisseur 2ρ.

Il est alors facile d'obtenir des développements en séries. Il suffit de faire la représentation conforme de la bande sur un cercle de rayon *un;* on l'obtiendra en posant

$$z = \frac{e^{\frac{\pi t}{2\rho}} - 1}{e^{\frac{\pi t}{2\rho}} + 1},$$

qui revient à

$$t = \frac{2\rho}{\pi} \log \frac{1+z}{1-z},$$

et il est immédiat que la bande et le cercle de rayon *un* se correspondent uniformément. Toute intégrale se trouve alors holomorphe par rapport à z dans ce cercle, et *elle peut être développée en série suivant les puissances de* z.

17. On pourrait obtenir bien d'autres représentations analytiques des intégrales : je proposerai la suivante. Prenons les équations

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{X_i}{\sqrt{1 + X_1^2 + \ldots + X_p^2}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

et reportons-nous à la méthode des approximations successives, et notamment au Chapitre V de ce Volume. Nous aurons bien ici des équations rentrant dans la classe signalée, car les dérivées partielles du premier ordre des seconds membres des équations précédentes restent moindres qu'un nombre fixe pour toutes les valeurs réelles des x. *Les approximations successives nous conduiront donc à des développements convergents pour toute valeur réelle de* t.

Il est clair que bien d'autres formes pourraient être adoptées, et l'on se trouverait dans les mêmes conditions pour une infinité de fonctions $\lambda(x_1, \ldots, x_p)$ qui conduiraient à des équations

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

du type que nous venons de considérer.

18. Les développements précédents, qui paraissent au premier abord intéressants pour la discussion des intégrales, sont en réalité de peu d'importance pratique. On ne peut savoir, en général, par eux ce que deviennent les x quand t augmente indéfiniment. Il pourra arriver que les x ne tendent vers aucune limite, ou bien les x tendront vers des limites déterminées. Nous pouvons supposer, en transformant préalablement les équations, s'il est nécessaire, que ces limites sont finies; soit donc

$$a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_p$$

le système limite des x pour $t=\infty$. Nous allons voir facilement que les a doivent satisfaire aux p équations

$$X_i(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Remarquons d'abord que l'intégrale du système

$$\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_p}{X_p},$$

répondant aux conditions initiales $a_1, \ldots, a_p$, se comporte régulièrement en ce point si, pour ces valeurs, tous les X ne s'annulent pas, c'est-à-dire que la *courbe* intégrale aura en ce point une tangente déterminée. Or soit $X_i \neq 0$ pour $a_1, \ldots, a_p$; nous avons

$$dt = \frac{dx_i\sqrt{1+X_1^2+\ldots+X_p^2}}{X_i},$$

et par suite t ne peut augmenter indéfiniment quand les x tendent vers les a.

19. Considérons en particulier l'équation différentielle

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

dont l'étude fait l'objet de ce Chapitre. Nous pourrons former le système

$$\frac{dx}{dt} = \frac{X}{\sqrt{1+X^2+Y^2}}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{Y}{\sqrt{1+X^2+Y^2}}.$$

Lorsque t augmentera indéfiniment, ou bien x et y ne tendront vers aucune limite, ou bien le point (x, y) tendra vers un point sin-

ulier. Nous arrêtons, comme nous l'avons dit, à un nœud, les intégrales qui passent par un nœud, et il n'y a pas à parler des foyers qui ont des points asymptotiques. Quant à une intégrale passant par un col, nous la prolongeons, comme il a été convenu, par la courbe droite ou la courbe à gauche (§ 13). Après avoir rencontré une première fois un col, une caractéristique peut rencontrer une seconde fois un col; mais, en continuant à suivre la caractéristique, il est clair qu'à partir d'un certain moment elle ne rencontrera plus de nouveau un col, à moins qu'elle ne soit une intégrale très particulière se réduisant à un cycle contenant un certain nombre de cols. Nous pouvons donc nous poser le problème *d'approfondir l'étude des caractéristiques qui, à partir d'un certain moment, ne rencontrent plus de points singuliers,* et dont nous savons déjà (§ 15) qu'elles sont des spirales; c'est ce que nous ferons dans la Section suivante.

20. Dans les paragraphes précédents nous n'avons pas utilisé une propriété fondamentale de la méthode de Cauchy-Lipschitz, que nous avons indiquée dans la seconde édition du Tome II de cet Ouvrage (p. 333). Elle sera particulièrement intéressante dans les problèmes où une variable indépendante, le temps par exemple, sera spécifiée.

Nous avons donné un exemple intéressant (t. II, 2ᵉ édition, p. 337), relatif au mouvement d'un corps solide pesant mobile autour d'un point fixe. Les trois composantes de la rotation instantanée et les trois cosinus des angles des axes d'inertie avec la verticale ont été exprimés par *des séries de polynomes valables pour toute valeur du temps.*

Nous avons aussi considéré (t. II, p. 339) le mouvement de p points se repoussant en raison inverse de la $\mu^{\text{ième}}$ puissance de la distance ($\mu > 1$). La méthode de Cauchy-Lipschitz peut aussi s'appliquer dans le cas de l'attraction, mais alors la distance de deux points ne reste pas nécessairement supérieure à un nombre fixe, et les séries obtenues, en application de la méthode, ne restent convergentes que jusqu'à l'instant d'un choc, si toutefois il s'en produit.

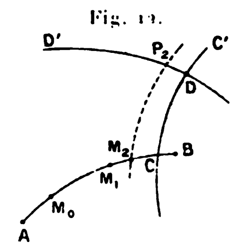
III. — Des cycles limites.

21. Comme nous l'avons expliqué au § 19, nous allons considérer les caractéristiques, qui ne sont pas des cycles, qui à partir d'un cer-

tain moment ne rencontrent plus de points singuliers et n'ont pas un foyer comme point asymptotique. Nous savons déjà (§ 15) qu'elles sont des spirales. Il va être facile, en complétant les théorèmes de Section II, d'approfondir davantage la nature de ces caractéristiques.

Une demi-caractéristique, comme celle que nous suivons à partir d'un certain point, rencontrera certains cycles analytiques en une infinité de points. Un tel cycle se composera d'un nombre fini d'arcs sans contact. Un de ces arcs AB au moins est rencontré une infinité de fois par la caractéristique. Ainsi, si l'on considère la caractéristique passant par le point M_0 de l'arc sans contact AB, elle rencontre d'abord, au point M_1, le même arc AB. Il résulte des explications des § 14 et 15, que le point suivant M_2 de rencontre ne sera pas

Fig. 19.



entre M_0 et M_1 ; il sera à droite de M_1, c'est-à-dire entre M_1 et B. Or, nous avons une infinité de points de rencontre de AB avec la caractéristique, et, par suite, une infinité de points

$$M_0, \quad M_1, \quad M_2, \quad \ldots, \quad M_n, \quad \ldots,$$

chacun étant sur l'arc AB, dans la figure, à la droite du précédent. Il en résulte que M_n aura une limite C. Par ce point, qui n'est pas un point singulier, passera une caractéristique; si C ne coïncide pas avec l'extrémité B de l'arc sans contact AB, la caractéristique passant par C ne sera pas tangente à l'arc.

Il pourrait arriver que C coïncidât avec B et que, en B, la caractéristique fût tangente à BA. Quoique ce ne soit là la source d'aucune difficulté, nous pouvons toujours supposer qu'il n'en est pas ainsi, car, dans cette hypothèse, on mènera, par B, un arc non tangent à AB, qui sera sans contact si on le prend assez petit, et sur lequel nous pourrons raisonner.

Soit donc CC' la caractéristique passant par le point limite C. On voit immédiatement que *cette caractéristique est un cycle.* En effet,

la caractéristique, passant par M_n, passe par un point M_{n+1}, compris entre M_n et C; or, pour n très grand, M_n est aussi rapproché que l'on veut de C. Il en résulte que la caractéristique, passant par C, revient passer en ce point, c'est-à-dire qu'elle est un cycle.

Soit maintenant D un point sur CC', et menons par D un arc analytique DD'. En prenant n suffisamment grand, il est clair que la caractéristique, passant par M_n, ira rencontrer DD', et l'on aura sur cet arc une suite de points

$$P_0, \ P_1, \ \ldots, \ P_n, \ \ldots$$

(si la rencontre a lieu depuis $n = 0$) qui se comporteront sur DD', comme se comportaient les points M sur AB. La limite de P_n sera le point D.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

La demi-caractéristique considérée a un cycle limite.

Nous donnons le nom de *cycle limite* à la caractéristique CC', qui est une courbe asymptote autour de laquelle s'enroule la demi-caractéristique étudiée.

22. D'une manière plus générale, toutes les demi-caractéristiques, passant par un point de l'arc AB, auront comme cycle limite le cycle CC', si l'on suppose qu'à aucun point de l'arc AB ne correspond une caractéristique passant par un col, et qu'au seul point C de l'arc AB correspond un cycle limite. En effet, nous avons une première caractéristique passant par M_0 avec le cycle limite CC'. Si nous prenons N_0 voisin de M_0, nous aurons une caractéristique voisine de la précédente et définie sans ambiguïté dans son prolongement, d'après les remarques des § 14 et 15, on aura des points de rencontre voisins de $M_1, \ldots, M_n$, et tous à gauche de ces points, si N_0 est à gauche de M_0. En prenant N_0 suffisamment voisin de M_0, le point N_1 sera compris entre M_0 et M_1, et, de même, N_n entre M_{n-1} et M_n; la caractéristique passant par N_0 aura donc encore CC' comme cycle limite. En allant ainsi de proche en proche, on voit que toutes les demi-caractéristiques correspondant à un point de l'arc AC auront le même cycle limite CC'.

Envisageons maintenant les points de l'arc CB qui sont de l'autre côté de la caractéristique.

La caractéristique passant par le point C revient au point C, puisqu'elle est un cycle. Par un point très voisin de C, sur CB passera, par conséquent, une caractéristique, qui coupera certainement, une seconde fois, l'arc CB; on se trouve alors pour l'arc CB dans les mêmes conditions que pour l'arc CA et il en résulte que CC′ est aussi un cycle limite pour les caractéristiques passant par un point de CB.

Le cycle CC′ *est donc cycle limite pour deux séries de caractéristiques, qui sont les unes à l'intérieur du cycle, les autres à l'extérieur.*

Autour de CC′ se trouve une région annulaire, telle que toute demi-caractéristique correspondant à un point de cette région est asymptote au cycle limite.

De plus, on peut, dans cette région, tracer une infinité de *cycles sans contact*. Considérons, en effet, une certaine caractéristique; on peut tracer dans l'anneau un cycle Γ ne rencontrant la caractéristique qu'en *un seul* point. Il est aisé de voir que Γ sera un cycle sans contact, car, autrement, on aurait une demi-caractéristique rencontrant Γ en deux points et alors toute demi-caractéristique, passant par un point de Γ, rencontrerait au moins cette courbe en deux points, et il en serait ainsi de la caractéristique dont nous sommes parti.

23. Les deux paragraphes précédents, joints aux considérations développées dans la Section II, nous donnent des renseignements précis sur la *nature* des caractéristiques. L'existence des cycles limites est un point capital dans la théorie de M. Poincaré. Pour résumer l'étude précédente, nous pouvons dire que *les caractéristiques, dont la continuation ne se trouve pas arrêtée par un nœud, sont ou bien des cycles, ou bien des courbes asymptotes à un cycle limite.* Le cas du cycle limite, se réduisant à un point, correspond aux caractéristiques qui s'enroulent autour d'un foyer.

Si nous voulions continuer cette étude et passer de la partie *qualitative* à la partie *quantitative* de la recherche des caractéristiques, il faudrait montrer comment on peut arriver à fixer approximativement la position des cycles limites. Nous renverrons pour cette suite aux Mémoires cités de M. Poincaré, où l'on verra que, sinon dans le cas général, du moins dans bien des cas, la question peut être poussée jusqu'à son terme.

24. Terminons par une remarque relative aux équations algébriques du premier ordre, mais de degré supérieur en $\frac{dy}{dx}$. Un exemple simple va nous montrer que dans ce cas la nature des caractéristiques peut être très différente de celle que nous venons de trouver pour les équations du premier ordre et du premier degré. Prenons, en effet, l'équation différentielle en coordonnées polaires

$$\alpha \frac{d\rho}{d\omega} = \sqrt{(b-\rho)(\rho-a)} \qquad (A < b),$$

α étant une constante.

Si des coordonnées polaires on passe aux coordonnées rectilignes, on aura une équation algébrique en x, y, $\frac{dy}{dx}$. De l'équation

$$d\omega = \alpha \frac{d\rho}{\sqrt{(b-\rho)(\rho-a)}},$$

il résulte que nous aurons des caractéristiques comprises entre les deux circonférences

$$\rho = a, \qquad \rho = b.$$

Les solutions seront périodiques, si α est commensurable. Mais, si α est incommensurable, nous aurons une courbe qui, à un certain moment, pourra se rapprocher, autant qu'on voudra, d'un point arbitrairement choisi dans la couronne, et qui d'ailleurs s'en éloignera ensuite. On a là une circonstance toute différente de celle qui se présentait pour les équations du premier degré; *le prolongement d'une caractéristique se trouve couvrir, en quelque sorte, l'aire tout entière de la couronne comprise entre les cercles* $\rho = a$ et $\rho = b$.

Cet exemple montre bien l'intérêt de l'étude résumée au paragraphe précédent.

IV. — Étude de quelques cas singuliers.

25. Nous avons examiné plus haut pour l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

les cas généraux, c'est-à-dire ceux où aucune relation particulière

n'existait entre les coefficients; seul le cas des centres pouvait être regardé comme un cas particulier.

Dans un Mémoire très important (*Acta mathematica*, t. XXIV), M. Bendixson a étudié dans toute sa généralité l'équation précédente dans le voisinage d'un point singulier O pour lequel s'annulent les polynomes X et Y. Il a établi en particulier que, s'il existe pour cette équation *une* courbe intégrale allant au point O avec une tangente déterminée, *toutes* les courbes intégrales allant à l'origine y parviendront avec des tangentes déterminées.

Dans les travaux de M. Bendixson, une équation de forme particulière joue un rôle important. C'est l'équation

$$x^m \frac{dy}{dx} = F(x, y),$$

la fonction holomorphe $F(x, y)$ autour de $x = 0$, $y = 0$ s'annulant pour ces valeurs; nous allons l'étudier.

Prenons d'abord le cas de $m = 2$.

Le coefficient de y dans $F(x, y)$ joue un rôle important. Posons

$$F(x, y) = by \quad - f(x, y),$$
$$f(x, y) = x\varphi(x) + y\chi(x, y),$$

avec l'hypothèse

$$\chi(0, 0) = 0.$$

En supposant $b = 1$, ce qui est évidemment légitime puisqu'il suffit de remplacer x par bx, nous avons l'équation

$$(1) \qquad x^2 \frac{dy}{dx} = y - f(x, y).$$

Soit un point x_0, y_0, *d'abscisse* x_0 *positive*. Nous allons démontrer que, si x_0 et $|y_0|$ sont suffisamment petits, l'intégrale passant par ce point passe aussi à l'origine.

Procédons par approximations successives; formons les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} x^2 \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - f(x, 0), \\ x^2 \dfrac{dy_2}{dx} = y_2 - f(x, y_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x^2 \dfrac{dy_n}{dx} = y_n - f(x, y_{n-1}); \end{cases}$$

tous les y_i doivent prendre, pour $x = x_0$, la valeur y_0. Nous allons démontrer que les y_i convergent uniformément vers une limite.

Soit h une quantité donnée, on peut prendre x_0 assez petit pour que l'on ait

$$|f(x, y)| < \frac{h}{2},$$

quand $x < x_0$ et $|y| < h$, et pour qu'en même temps soit remplie la condition

$$|f(x, y') - f(x, y)| < g|y - y'| \qquad (g < 1).$$

Si, au moyen des équations (2), on calcule successivement y_1, $y_2, \ldots, y_{n-1}$, la dernière donne, par une intégration immédiate,

$$(3) \qquad y_n = y_0 e^{-\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)} + e^{-\frac{1}{x}} \int_x^{x_0} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} f(x, y_{n-1})\, dx.$$

Considérons d'abord y_1,

$$y_1 = y_0 e^{-\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)} + e^{-\frac{1}{x}} \int_x^{x_0} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} f(x, 0)\, dx.$$

Je dis que, x tendant vers o par valeurs positives, y_1 tend vers o et s'annule pour $x = 0$.

Il suffit pour cela de démontrer que

$$e^{-\frac{1}{x}} \int_x^{x_0} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \psi(x)\, dx$$

tend vers o, quand x tend vers o comme il vient d'être dit, sous la condition $\psi(0) = 0$.

Soit l une quantité positive fixe, qu'on prendra aussi petite que l'on veut, mais fixe une fois choisie; l'expression précédente peut s'écrire

$$e^{-\frac{1}{x}} \int_x^{l} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \psi(x)\, dx + e^{-\frac{1}{x}} \int_l^{x_0} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \psi(x)\, dx.$$

La seconde partie s'annule pour $x = 0$; la première partie peut s'écrire, en désignant par ξ une quantité comprise entre l et x,

$$e^{-\frac{1}{x}} \psi(\xi) \int_x^{l} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \psi(\xi)\left[1 - e^{\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{x}\right)}\right].$$

Quand x tend vers o par valeurs positives, cette expression tend vers $\psi(\xi)$; d'après les hypothèses faites sur ξ, l et ψ, cette limite ne peut être autre que zéro. On a donc

$$y_1(0) = 0.$$

Il en résulte que *tous* les y_n s'annulent de même pour $x = 0$.

Il faut, avant tout, s'assurer que les y_n sont en module inférieurs à h.

Prenons

$$|y_0| < \frac{h}{2},$$

nous aurons

$$|y_1| < \frac{h}{2} + e^{-\frac{1}{x}} \int_x^{x_0} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \frac{h}{2}\, dx$$

ou

$$|y_1| < \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\left[1 - e^{\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}\right)}\right] < h.$$

En allant de proche en proche on aura de même

$$|y_n| < h.$$

Formons maintenant la différence $y_n - y_{n-1}$; on a

$$y_n - y_{n-1} = e^{-\frac{1}{x}} \int_x^{x_0} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} [f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-2})]\, dx,$$

d'où il résulte

$$|y_n - y_{n-1}| < e^{-\frac{1}{x}} \int_x^{x_0} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} g\, |y_{n-1} - y_{n-2}|\, dx;$$

donc

$$|y_2 - y_1| < e^{-\frac{1}{x}} \int_x^{x_0} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} gh\, dx < gh,$$

et ensuite

$$|y_3 - y_2| < g^2 h, \qquad \ldots, \qquad |y_m - y_{m-1}| < g^{m-1} h.$$

Puisque $g < 1$, il résulte de là que *la série*

$$y_1 + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_m - y_{m-1}) + \ldots$$

est uniformément convergente.

Dans *les équations* (2) le passage à la limite maintenant légitime

donne

$$y = y_0 e^{-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)} + e^{-\frac{1}{x}} \int_x^{x_0} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} f(x,y)\,dx;$$

et il faut vérifier que la fonction y que l'on vient de définir vérifie bien l'équation différentielle proposée; on a

$$y e^{\frac{1}{x}} = y_0 e^{\frac{1}{x_0}} + \int_x^{x_0} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} f(x,y)\,dx,$$

et en différentiant

$$-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} y + \frac{dy}{dx} e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} f(x,y);$$

d'où

$$(1) \qquad x^2 \frac{dy}{dx} = y - f(x,y).$$

En résumé nous avons établi que l'intégrale de cette équation, passant par un point suffisamment voisin de l'origine d'abscisse positive, va passer par l'origine.

26. Nous devons maintenant nous demander si les courbes trouvées ont une tangente à l'origine. Si y représente une intégrale déterminée de l'équation (1), on peut écrire cette équation sous la forme

$$x^2 \frac{dy}{dx} = y[1+\psi(x)] + \varphi(x);$$

la fonction continue $\psi(x)$ s'annule pour $x = 0$ et il en est de même pour la série entière en x, $\varphi(x)$; ainsi

$$\psi(0) = 0, \qquad \varphi(x) = ax + bx^2 + \ldots.$$

Appliquons la méthode classique d'intégration à l'équation linéaire précédente; nous obtenons la formule

$$y = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} \frac{1+\psi(x)}{x^2}dx} + e^{\int_{x_0}^{x} \frac{1+\psi(x)}{x^2}dx} \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{1+\psi(x)}{x^2}dx} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx.$$

Cherchons si $\frac{y}{x}$ a une limite pour $x = 0$. Le premier terme

$$y_0 \frac{e^{\int_{x_0}^{x} \frac{1+\psi(x)}{x^2}dx}}{x}$$

a zéro pour limite, car, pour des valeurs suffisamment petites de x, $\frac{1+\psi(x)}{x^2}$ est compris entre $\frac{P}{x^2}$ et $\frac{Q}{x^2}$, P et Q étant deux nombres positifs donnés; l'intégrale $e^{\int_{x_0}^{x}\frac{1+\psi(x)}{x^2}dx}$ est alors comprise entre $e^{-Q\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)}$ et $e^{-P\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)}$. Considérons donc maintenant le second terme; après division par x, il faut chercher la limite de

$$\frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{1+\psi(x)}{x^2}dx}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx}{x e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{1+\psi(x)}{x^2}dx}}.$$

Prenons le rapport des dérivées

$$\frac{e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{1+\psi(x)}{x^2}dx}\frac{\varphi(x)}{x^2}}{e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{1+\psi(x)}{x^2}dx}-x\frac{1+\psi(x)}{x^2}e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{1+\psi(x)}{x^2}dx}}=\frac{\frac{\varphi(x)}{x^2}}{1-\frac{1+\psi(x)}{x}}=\frac{\frac{\varphi(x)}{x}}{-1+x-\psi(x)}.$$

Or

$$\frac{\varphi(x)}{x}=a+bx+\ldots.$$

La limite cherchée sera donc $-a$. Ainsi pour nos intégrales on a

$$\lim_{x=0}\frac{y}{x}=-a.$$

Elles ont une tangente à l'origine, la même pour toutes; cette tangente est celle de la courbe

$$y-f(x,y)=0.$$

27. On aurait pu démontrer directement l'existence de ces intégrales. Reprenons l'équation

$$x^2\frac{dy}{dx}=y-f(x,y),$$

en posant

$$f(x,y)=x\varphi(x)+y(\alpha x-\beta y+\ldots).$$

Considérons la courbe Γ

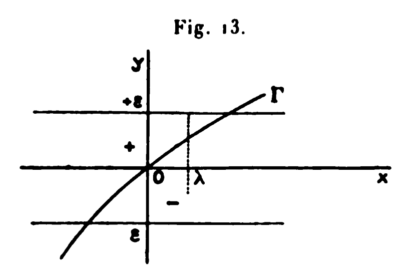
$$y - f(x, y) = 0;$$

elle est tangente à la droite

$$y = \alpha_1 x \quad \text{si} \quad \varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots.$$

Pour fixer les idées et tracer une figure (*fig.* 11) supposons $\alpha_1 > 0$.

Fig. 13.



$f(x, y)$ étant de la forme

$$P(x) + Q(x) y + R(x) y^2 + \ldots$$

avec

$$P(0) = 0, \qquad Q(0) = 0,$$

il est évident qu'on peut trouver deux valeurs $+\varepsilon$ et $-\varepsilon$ telles que, si x est moindre qu'un nombre suffisamment petit λ, la fonction $y - f(x, y)$ soit positive pour $y = +\varepsilon$, négative pour $y = -\varepsilon$ et que l'équation

$$y - f(0, y) = 0$$

ait la seule racine $y = 0$ entre $+\varepsilon$ et $-\varepsilon$. Cela suppose naturellement que le rayon de convergence de $f(x, y)$ par rapport à y est supérieur à ε quand $|x| < \lambda$. La fonction $y - f(x, y)$ est positive au-dessus de Γ, négative au-dessous.

Suivons alors une intégrale en partant d'un point x_0, y_0 ($x_0 < \lambda$, $|y_0| < \varepsilon$). Si le point (x, y) est au-dessous de Γ, la fonction y augmente quand x diminue, puisque $\frac{dy}{dx} < 0$. Si le point (x, y) est au-dessus de Γ, la fonction y diminue avec x. Si, d'autre part, la courbe intégrale rencontre Γ, sa tangente au point de rencontre sera parallèle à Ox. Cette courbe ne peut donc atteindre en aucun cas les droites $y = +\varepsilon$ et $y = -\varepsilon$. Il résulte de tout cela que y tend vers une valeur déterminée entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$ quand x tend vers zéro.

D'ailleurs cette valeur déterminée doit être nulle, car, si cette valeur était $k \neq 0$, l'équation

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2}{y - f(x, y)}$$

aurait une intégrale x, fonction de y, qui pour $y = k$ serait nulle. Mais, comme $k - f(0, k) \neq 0$, cette équation n'admet pas d'autre intégrale passant par le point $(0, k)$ que $x \equiv 0$.

28. Nous ne nous sommes occupé jusqu'à présent que de la région du plan située à droite de l'axe Oy puisque nous avons essentiellement supposé $x_0 > 0$. Montrons maintenant que du côté *gauche* de cet axe il n'y a pour l'équation

$$x^2 \frac{dy}{dx} = y - f(x, y)$$

qu'*une seule intégrale arrivant à l'origine*. Tout d'abord il ne peut y avoir de ce côté deux intégrales s'annulant pour $x = 0$. On aurait, en effet, en désignant par y_1 et y_2 ces deux intégrales,

$$x^2 \frac{dy_1}{dx} = y_1 - f(x, y_1),$$

$$x^2 \frac{dy_2}{dx} = y_2 - f(x, y_2),$$

donc

$$x^2 \frac{d(y_2 - y_1)}{dx} = (y_2 - y_1)\, g(x),$$

$g(x)$ prenant pour $x = 0$ la valeur *un*.

On en conclut

$$\frac{d(y_2 - y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{g(x)}{x^2}\, dx,$$

donc, en posant

$$y_2 - y_1 = u,$$

$$u = u_0 e^{\int_{x_0}^{x} \frac{g(x)}{x^2} dx} \qquad (x_0 < 0).$$

Or, l'expression

$$e^{\int_{x_0}^{x} \frac{g(x)}{x^2} dx}$$

grandit indéfiniment quand x tend vers zéro par valeurs négatives. Comme u devrait tendre vers zéro, il y a contradiction.

L'intégrale unique peut être obtenue par approximations successives, dans le même ordre d'idées que précédemment. On forme toujours les équations

$$x^2 \frac{dy_1}{dx} = y_1 - f(x, 0),$$

$$x^2 \frac{dy_2}{dx} = y_2 - f(x, y_1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x^2 \frac{dy_n}{dx} = y_n - f(x, y_{n-1}),$$

et l'on prend

$$y_n = e^{-\frac{1}{x}} \int_x^0 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} f(x, y_{n-1})\, dx,$$

qui satisfait bien à la relation entre y_n et y_{n-1}. On voit de suite que y_n s'annule pour $x = 0$, car, en posant

$$f(x, y_{n-1}) = \psi(x),$$

on peut écrire

$$y_n = e^{-\frac{1}{x}} \psi(\xi) \int_x^0 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\, dx = -\psi(\xi) \qquad (x < \xi < 0).$$

Or $\psi(\xi)$ s'annule pour $\xi = 0$.

En suivant la même marche qu'aux paragraphes **25** et **26**, on démontrera la convergence uniforme de y_n vers sa limite et l'existence d'une tangente.

29. *Tout ce que nous venons de dire pour l'équation*

$$x^2 \frac{dy}{dx} = by - f(x, y) \qquad (b \neq 0)$$

s'applique à l'équation

$$x^{2m} \frac{dy}{dx} = by - f(x, y).$$

D'un côté de l'axe des y (*à droite si* $b > 0$) *une infinité d'intégrales arrivent à l'origine; de l'autre côté une seule* (1).

---

(1) I. Bendixson, *Acta mathematica*, t. XXIV.

30. Les circonstances sont très différentes pour l'équation

$$x^{2m+1}\frac{dy}{dx} = by - f(x, y).$$

Le signe de b va prendre ici une grande importance. En effet :

1° *Si $b > 0$, l'intégrale passant par un point (x_0, y_0) suffisamment près de l'origine va passer par l'origine;*

2° *Si $b < 0$, il passe seulement à l'origine trois courbes intégrales, l'une à droite de Oy, l'autre à gauche, la troisième étant l'axe des y.*

D'après ce qui précède, ces résultats sont faciles à établir. En changeant x en $-x$, l'équation conserve la même forme; tous les raisonnements subsistent donc à gauche comme à droite de Oy. Par suite, si $b > 0$, on pourra prendre $b = 1$, et l'intégrale passant par (x_0, y_0) suffisamment voisin de l'origine passe toujours par l'origine. Si $b < 0$, nous sommes dans les circonstances que nous avons rencontrées plus haut, à gauche de Oy. Il y aura *une seule intégrale à gauche de* Oy arrivant à l'origine, *une seule à droite*. Le théorème se trouve donc établi.

31. *Le calcul des dérivées successives va nous donner un résultat intéressant pour la représentation asymptotique des intégrales.* Nous avons montré plus haut que les intégrales avaient des dérivées premières pour $x = 0$. Elles ont aussi des dérivées de tout ordre.

Reprenons en effet l'équation

$$x^m\frac{dy}{dx} = F(x, y), \qquad F(x, y) = by + ax + \ldots \qquad (m \geqq 2).$$

On a vu que y avait une dérivée égale à $-\frac{a}{b}$ pour $x = 0$. Soit

$$-\frac{a}{b} = a_1,$$

et posons

$$y = a_1 x + z_1 x,$$

z_1 aura zéro pour limite et l'on a

$$x^m\left(a_1 + z_1 + x\frac{dz_1}{dx}\right) = b(a_1 x + z_1 x) + ax + \ldots$$

ou

$$x^m \frac{dz_1}{dx} = F_1(z_1, x),$$

avec

$$F_1(o, o) = o.$$

Cette équation est de même forme que la première ; le coefficient de z_1 dans F_1 est également b.

Il en résulte que $\frac{dz_1}{dx}$ existera pour $x = o$ et aura pour valeur a_2 ; en posant

$$z_1 = a_2 x + z_2 x,$$

on continuera de même. Finalement on obtiendra ainsi

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + z_n x^n;$$

les coefficients a_i étant des constantes *déterminées de proche en proche au moyen de l'équation seule.* z_n s'annule d'ailleurs pour $x = o$ et satisfait à l'équation

$$x^m \frac{dz_n}{dx} = F_n(z_n, x), \qquad F_n(o, o) = o;$$

de plus $\frac{dz_n}{dx}$ a pour $x = o$ une valeur déterminée.

De cette remarque résultent plusieurs faits importants. D'abord toutes les intégrales (quand il y en a une infinité d'un côté de Oy) ont un contact *d'ordre infini.*

Ensuite on peut calculer $\frac{d^p y}{dx^p}$, ce qui donne

$$\frac{d^p y}{dx^p} = 1.2\ldots p a_p + \ldots + n(n-1)\ldots(n-p+1) a_n x^{n-p} + x^{n-pm} \chi(z_n, x),$$

$\chi(z_n, x)$ étant une fonction entière de z_n et de x. On peut d'ailleurs supposer $n > pm$. On a donc, pour $x = o$,

$$\left(\frac{d^p y}{dx^p}\right) = 1.2\ldots p a_p,$$

de sorte que toutes les dérivées de y sont déterminées pour $x = o$.

On a donc la même représentation asymptotique pour toutes les intégrales. Ceci veut dire que, pour une valeur donnée de p, on a, pour toute intégrale,

$$y = a_1 x + \ldots + (a_p + \varepsilon_p) x^p,$$

ε_p tendant vers zéro avec x.

Si la série $a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ est convergente, elle donne une intégrale holomorphe. Mais, en général, cette série n'est pas convergente. Il suffit, pour en donner un exemple, de considérer l'équation

$$x^2 \frac{dy}{dx} = ax + by.$$

On a

$$a_n = -\frac{1.2\ldots(n-1)}{b^n} a,$$

et la série diverge.

Dans l'équation

$$x^m \frac{dy}{dx} = ax + by + \ldots,$$

nous avons supposé $b \neq 0$. La question devient difficile si b est nul. Nous allons nous y arrêter un moment, mais seulement en supposant $m = 1$.

Faisons auparavant une remarque sur l'équation

$$x \frac{dy}{dx} = ax + by + \ldots,$$

étudiée par Briot et Bouquet. Elle admet une intégrale holomorphe passant par l'origine (du moins si b n'est pas un *entier* positif). On le démontre en faisant le calcul des coefficients d'une série qui vérifie d'une manière littérale l'équation précédente et en établissant la convergence de cette série. A cet effet, écrivons l'équation sous la forme

$$x \frac{dy}{dx} - by = ax + \ldots,$$

et prenons la dérivée d'ordre n des deux membres; en faisant ensuite dans le premier membre $x = 0$, on obtient

$$(n - b)\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0.$$

Si donc $n - b$ n'est pas nul ($n \geqq 1$) on pourra calculer les coefficients du développement cherché. Pour démontrer la convergence, prenons pour le second membre

$$ax + \varphi_2(x, y) + \ldots$$

une fonction majorante n'ayant pas de terme constant et pas de terme du premier degré en y; ce sera

$$\frac{M}{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)\left(1-\frac{y}{r}\right)} - M - M\frac{y}{r}.$$

Si ω est le minimum de $|n-b|$, on compare le développement obtenu pour y, à la fonction algébrique y définie par l'équation

$$\omega y = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)\left(1-\frac{y}{r}\right)} - M - M\frac{y}{r},$$

s'annulant bien entendu pour $x = 0$, et l'on constate immédiatement que cette fonction algébrique est une majorante pour l'intégrale.

Revenons au cas où, dans l'équation

$$x\frac{dy}{dx} = ax + \varphi_2(x, y) + \ldots,$$

le second membre ne contient pas de terme en $y (b = 0)$. Cette équation possède, on vient de le voir, une intégrale holomorphe Y passant par l'origine. Remplaçons y par $Y + y$, on aura l'équation

$$x\frac{dy}{dx} = y(Ay^m + Bx + \ldots),$$

le terme $Ay^m (m \geq 1)$ étant le terme de moindre degré en y seul, dans la parenthèse.

La parité de m et le signe de A vont jouer un rôle important dans la discussion des courbes intégrales passant par l'origine. On a, bien entendu, dans tous les cas, les deux axes de coordonnées comme intégrales.

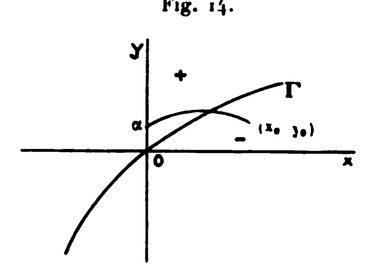
Supposons $A > 0$, et construisons la courbe Γ,

$$y(Ay^m + Bx + \ldots) = 0.$$

Elle se compose de l'axe des x et, suivant la parité de m et la valeur de B, de zéro, une ou plusieurs courbes passant par l'origine. Si $B \neq 0$, il n'y aura qu'une seule branche. Dans la figure 12, le tracé suppose que $m = 1$, puisque la courbe Γ n'est pas tangente à Oy; mais cela est sans importance. Le point important est qu'*au-dessus de* Ox il y a une région positive et une région négative pour la fonc-

tion $y(Ay^m + Bx + \ldots)$; ces régions sont marquées sur la figure. Si le point (x_0, y_0), au-dessus de Ox, est dans la région négative, $\frac{dy}{dx}$ étant négative, y augmentera quand x diminuera; si la courbe intégrale rencontre Γ, y alors diminuera et arrivera à l'origine ou à

Fig. 14.



un point d'ordonnée α sur l'axe des y quand x deviendra nulle. Mais ce point α ne peut être que l'origine, sans quoi l'on aurait $x = 0$ pour $y = \alpha \neq 0$; donc x serait identiquement nulle, ce qui est absurde.

Par conséquent, si le point (x_0, y_0), au-dessus de $Ox (y_0 > 0)$, est suffisamment rapproché de l'origine, l'intégrale passant, par ce point, passe aussi par l'origine.

Qu'arrive-t-il maintenant, A étant toujours positif, quand y_0 est négatif?

Si m est pair, on peut changer dans l'équation y en $-y$, les conclusions précédentes s'appliquent donc alors au-dessous de Ox, de sorte que, si A *est positif et m pair, l'intégrale passant par un point (x_0, y_0) suffisamment voisin de l'origine passe aussi par l'origine.*

Si, A étant positif, m est impair, il en est autrement. *Il n'y a plus alors d'intégrale au-dessous de Ox et passant par* O. Supposons en effet qu'une telle intégrale existe. Écrivons alors l'équation

$$x\frac{dy}{dx} = y^{m+1}[A + \lambda(y)] + xy\chi(x, y) \qquad [\lambda(0) = 0].$$

Posons

$$y = -y', \qquad y' > 0,$$

nous aurons

$$-x\frac{dy'}{dx} = y'^{m+1}[A + \lambda(y')] - xy'\chi(x, -y').$$

C'est une équation d'un type élémentaire; écrivons-la

$$-x\frac{dy'}{dx}=y'^{m+1}\varphi(x)-xy'\psi(x) \qquad [\varphi(0)=A>0].$$

On aura, en posant

$$\frac{1}{y'^m}=u,$$

$$+\frac{x}{m}\frac{du}{dx}+xu\psi(x)=\varphi(x).$$

En intégrant cette équation linéaire du premier ordre, on obtient

$$u=e^{-m\int_{x_0}^{x}\psi(x)\,dx}\left[C+m\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)}{x}e^{+m\int_{x_0}^{x}\psi(x)\,dx}dx\right].$$

Quand x tend vers zéro, d'après l'hypothèse faite, u tend vers $+\infty$; or le second membre devient infini comme $k\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}$, k étant une constante positive, et comme $|x|<|x_0|$, ce second membre tend vers $-\infty$; il y a donc contradiction.

Ainsi donc, si A est positif et m impair, il n'y a pas d'intégrale passant par l'origine au-dessous de Ox.

L'étude du cas où A est négatif se fait de la même manière. Si m est impair, en changeant y en $-y$ on est ramené au cas précédent; *au-dessous* de Ox l'intégrale passant par (x_0, y_0) suffisamment près de l'origine passe par l'origine; au-dessus de Ox aucune intégrale ne passe par l'origine. Le seul cas nouveau est donc celui où A est négatif et m pair. Dans ce cas il n'y a comme intégrales que les deux droites Ox et Oy. On le voit par un calcul analogue à celui qui a déjà été fait. L'équation

$$x\frac{dy}{dx}=y^{m+1}[A+\lambda(y)]+xy\,\chi(x,y)$$

ou

$$x\frac{dy}{dx}=y^{m+1}\varphi(x)+xy\psi(x) \qquad (\text{ici } \varphi(0)<0)$$

donne

$$\frac{1}{y^m}=e^{-\int_{x_0}^{x}m\psi(x)\,dx}\left[\frac{1}{y_0^m}-m\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)}{x}e^{\int_{x_0}^{x}m\psi(x)\,dx}dx\right].$$

Comme m est pair, y^m est toujours positif quel que soit le signe

de y. Quand x tend vers zéro, le premier membre tendrait vers $+\infty$ s'il existait une intégrale y passant par l'origine; or le second membre tend vers $-\infty$. La contradiction est manifeste.

32. La question est donc traitée dans tous les cas. Il reste à étudier la forme analytique des intégrales. On peut y parvenir en se servant d'une transformation déjà employée par Briot et Bouquet. Faisons auparavant la remarque que, si l'on suit jusqu'à l'origine une intégrale autre que Ox, le quotient

$$\frac{x}{y^{m+1}}$$

tend vers zéro quand x tend vers zéro. En effet, en se reportant aux formules précédentes et en supposant x positif, ce qui est permis puisqu'on ne change rien d'essentiel à l'équation en changeant x en $-x$, on a

$$\frac{1}{y^m} = k(x)\log x + \theta(x),$$

$k(x)$ et $\theta(x)$ tendant vers des valeurs finies quand x tend vers zéro, la limite de $k(x)$ étant de plus différente de zéro. On a donc

$$\frac{x}{y^{m+1}} = x(k\log x + \theta)^{\frac{m+1}{m}}.$$

Or le second membre tend vers zéro quand x tend vers zéro.

Si l'on fait alors le changement de variable

$$x = \lambda y^{m+1},$$

l'équation

$$x\frac{dy}{dx} = y(\mathrm{A}y^m + \mathrm{B}x + \ldots)$$

devient

$$y^{m+1}\frac{d\lambda}{dy} = \lambda\left[\frac{1}{\mathrm{A}} + \varphi(\lambda, y)\right],$$

$\varphi(\lambda, y)$ étant une fonction holomorphe de λ et de y dans le voisinage de l'origine et s'annulant pour $\lambda = 0$, $y = 0$. On est donc ramené au cas précédemment examiné.

CHAPITRE XI.

GÉNÉRALITÉS SUR LES POINTS SINGULIERS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ([1]).

I. — Théorèmes fondamentaux.

1. Abordons maintenant l'étude d'une classe particulière d'équations différentielles, qui a fait, depuis 40 ans, l'objet d'un nombre considérable de travaux; ce sont les équations différentielles linéaires et homogènes. On entend par là des équations de la forme

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m y = 0, \tag{1}$$

où les coefficients p sont des fonctions de la seule variable x, que nous supposerons uniformes dans une certaine région du plan à contour simple et n'ayant d'autres points singuliers que des pôles.

Pour une certaine valeur x_0 de x, qui n'est pas un point singulier des p, on peut se donner arbitrairement la valeur d'une intégrale et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$. Soient donc m intégrales particulières

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_m$$

déterminées chacune par leurs valeurs initiales pour $x = x_0$ et par celles de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$. On peut supposer que le Tableau de ces valeurs initiales, c'est-à-dire le déterminant sui-

([1]) On consultera surtout pour ces généralités les deux Mémoires classiques de M. Fuchs (*Journal de Crelle*, t. 66 et 68), et deux Mémoires de M. Thomé (*Journal de Crelle*, t. 74 et 75). *Voir* aussi la Thèse de M. Jules Tannery (*Annales de l'École Normale*, 1875).

vant, pris pour $x = x_0$,

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ \dfrac{dy_1}{dx} & \dfrac{dy_2}{dx} & \cdots & \dfrac{dy_m}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} & \dfrac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}} & \cdots & \dfrac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}} \end{vmatrix}$$

ait une valeur différente de zéro. De plus, ces solutions particulières sont toutes holomorphes à l'intérieur d'un certain cercle Γ décrit de x_0 comme centre.

Ceci posé, considérons une intégrale quelconque y; elle sera déterminée par la valeur qu'elle prend en x_0, ainsi que ses $m - 1$ premières dérivées. Or, formons la combinaison

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_m y_m.$$

On peut choisir les constantes C de manière que cette expression, ainsi que ses $m - 1$ premières dérivées, soient égales respectivement à y et à ses $m - 1$ premières dérivées pour $x = x_0$. On aura, pour cette détermination, à résoudre un système d'équations du premier degré pour lesquelles le déterminant ne sera pas nul d'après l'hypothèse faite ci-dessus. Or il n'y a qu'une seule intégrale qui prenne, ainsi que ses $m - 1$ premières dérivées, des valeurs données pour un point non singulier x_0; on a, par suite,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_m y_m.$$

On peut donc avec m intégrales quelconques (sauf la restriction d'inégalité mentionnée) former l'intégrale générale.

Une autre conséquence très importante à tirer de ce qui précède est qu'*une intégrale quelconque y est holomorphe à l'intérieur du cercle* Γ. Ainsi, considérons une aire A, à *contour simple,* ne comprenant aucun point singulier des coefficients p de l'équation différentielle. Pour chaque point de cette aire, nous pouvons tracer, autour de ce point comme centre, un cercle à l'intérieur duquel toute intégrale est holomorphe. Le rayon de ce cercle peut varier avec la position du point, quand celui-ci varie dans A, mais *son minimum n'est certainement pas nul.*

Par suite, l'extension analytique dans la région A peut se faire de

proche en proche avec un cercle de rayon *fixe* (le cercle de rayon minimum) et nous avons cette proposition capitale :

Toute intégrale de (1) *est holomorphe dans une région du plan à contour simple ne comprenant aucun des points singuliers des coefficients de l'équation différentielle.*

Il résulte encore des considérations précédentes que *les intégrales de* (1) *ne peuvent avoir d'autres points singuliers que ceux des coefficients p.* Nous appellerons ces derniers les *points singuliers de l'équation différentielle.*

2. On donne à tout système d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$, pour lequel le déterminant (2) n'est pas identiquement nul, le nom de *système fondamental* d'intégrales. On doit remarquer qu'entre les intégrales

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_m$$

d'un système fondamental n'existe pas de relation homogène et linéaire à coefficients constants telle que

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_m y_m = 0,$$

car, en différentiant $m-1$ fois cette relation et éliminant les α, on voit que le déterminant (2) serait nul.

Réciproquement, si pour m fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de x, le déterminant (2) formé avec ces fonctions est identiquement nul, il y aura entre les y une relation de la forme précédente, les α étant des constantes. Pour le montrer, nous pouvons supposer que le déterminant d'ordre $m-1$, obtenu en supprimant dans (2) la dernière ligne et la dernière colonne, n'est pas identiquement nul, car autrement on serait ramené du cas de m au cas de $m-1$. Dans ces conditions, nous pouvons former l'équation linéaire E d'ordre $m-1$ ayant pour système fondamental d'intégrales

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_{m-1}.$$

Le déterminant (2) étant nul, y_m satisfera à l'équation E, et, par suite, on aura, d'après le premier théorème du paragraphe précédent,

$$y_m = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_{m-1} y_{m-1},$$

les α étant des constantes.

3. Revenons à la région A du plan à contour simple, où les p sont des fonctions holomorphes de la variable complexe x. La méthode des approximations successives, déjà étudiée à diverses reprises (*voir* notamment p. 88 de ce Volume), permet d'obtenir pour toute intégrale un développement convergent dans cette région; c'est ce que nous avons déjà dit. A la vérité, nous supposions que la variable restait réelle, mais l'extension à la variable complexe se fait d'elle-même, comme nous avons déjà eu l'occasion de le voir ([1]). Nous avons donc le théorème suivant ([2]) :

Toute intégrale de l'équation (1) *peut être représentée par une même série dans une région quelconque du plan à contour simple ne comprenant aucun point singulier de l'équation différentielle.*

4. Abordons maintenant l'étude des points singuliers. Nous allons supposer que, dans une certaine région du plan, les coefficients p aient comme points singuliers des pôles. Soit a un de ces points; il pourra être un point singulier pour les intégrales de l'équation différentielle.

Partons d'un système fondamental

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_m,$$

défini dans une certaine aire voisine de a et ne contenant pas ce point. Si, partant d'un point de cette aire, nous faisons décrire à la variable x un contour fermé autour du point a, il arrivera, en général, que nous ne retrouverons plus le système initial. Mais, comme l'équation différentielle n'a pas changé, nous retrouverons un autre système d'intégrales de la même équation

$$Y_1, \quad Y_2, \quad \ldots, \quad Y_m,$$

et l'on aura

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + \ldots + a_{1m}\, y_m, \\ Y_2 &= a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + \ldots + a_{2m}\, y_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_m &= a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \ldots + a_{mm} y_m, \end{aligned}$$

([1]) Tome II de ce Traité, 2e édition, p. 351.

([2]) Pour les applications de la méthode des approximations successives aux équations linéaires, on pourra consulter une Note que j'ai publiée dans le *Bulletin de la Société mathématique* (1894).

les α étant des constantes. Nous allons chercher si l'on peut trouver une intégrale

$$u = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_m y_m,$$

qui se reproduirait, à un facteur constant près, par la circulation précédente. Après avoir tourné autour de a, nous avons, pour u, une valeur U, et l'on a

$$U = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \ldots + \alpha_m Y_m.$$

Écrivons donc que

$$\begin{aligned} &\alpha_1(a_{11}y_1 + \ldots + a_{1m}y_m) + \alpha_2(a_{21}y_1 + \ldots + a_{2m}y_m) + \ldots \\ &\quad + \alpha_m(a_{m1}y_1 + \ldots + a_{mm}y_m) = \mu(\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_m y_m). \end{aligned}$$

Or, il ne peut pas exister de relation linéaire et homogène à coefficients constants entre les y; sinon, le déterminant (2) serait identiquement nul. On aura donc

$$\begin{array}{llll} \alpha_1(a_{11} - \mu) + \alpha_2 a_{21} & + \ldots + \alpha_m a_{m1} & = 0, \\ \alpha_1 a_{12} + \alpha_2(a_{22} - \mu) & + \ldots + \alpha_m a_{m2} & = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & , \\ \alpha_1 a_{1m} + \alpha_2 a_{2m} & + \ldots + \alpha_m(a_{mm} - \mu) & = 0, \end{array}$$

et l'on en conclut

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \mu & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} - \mu & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{mm} - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Il est facile de voir que les racines de cette équation de degré m en μ sont des invariants, c'est-à-dire sont indépendantes du système fondamental dont on est parti. En effet, toute combinaison linéaire des y est une combinaison linéaire des éléments z d'un autre système fondamental et inversement; par suite, à toute combinaison linéaire des y, se reproduisant au facteur μ près, correspond une combinaison des z, se reproduisant au même facteur μ. Les équations de la forme (3), correspondant à l'un et l'autre système, ont donc mêmes racines.

Remarquons encore que l'équation (3) ne peut avoir de racine nulle, car le déterminant $|a_{ik}|$ devrait être nul, et alors les Y et, par suite, les y ne formeraient pas un système fondamental.

5. Supposons que l'équation (3) ait ses racines distinctes. Aux m racines

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots, \quad \mu_m$$

correspondront m intégrales

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_m;$$

ces intégrales seront linéairement indépendantes, car, si l'on avait entre elles une relation à coefficients constants,

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_m u_m = 0.$$

En faisant faire un tour à x autour de a, on aurait

$$k_1 \mu_1 u_1 + k_2 \mu_2 u_2 + \ldots + k_m \mu_m u_m = 0,$$

et donc, d'une manière générale,

$$k_1 \mu_1^i u_1 + k_2 \mu_2^i u_2 + \ldots + k_m \mu_m^i u_m = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

Ces m relations sont impossibles, car on en déduirait que le déterminant de Vandermonde relatif aux μ est égal à zéro.

Ainsi donc, pour le cas général où l'équation (3) n'a pas de racines égales, *on a un système fondamental d'intégrales* u_1, u_2, ..., u_m, *se reproduisant respectivement multipliées par les constantes* μ_1, μ_2, ..., μ_m, *quand x tourne autour de a.*

On peut aisément donner la forme analytique générale de ces intégrales. La fonction

$$(x-a)^{r_1}$$

se reproduit multipliée par $e^{2\pi r_1 i}$, quand x tourne autour de a; si donc on a

$$e^{2\pi r_1 i} = \mu_1 \qquad \text{ou} \qquad r_1 = \frac{1}{2\pi i} \log \mu_1,$$

on voit que l'on a

$$u_1 = (x-a)^{r_1} \varphi_1(x),$$

$\varphi_1(x)$ étant uniforme dans le voisinage de a. On a, d'une manière générale, les m intégrales

$$u_i = (x-a)^{r_i} \varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

les φ étant uniformes autour de a.

6. Supposons maintenant que l'équation (3) ait des racines multiples. Nous allons montrer que, s'il y a des racines multiples d'ordre α, β, ..., on peut s'arranger de manière que les intégrales se partagent en groupes de α, β, ... lettres, de telle sorte que, μ_1 désignant la racine d'ordre α, on ait pour les α intégrales que nous désignerons par x_1, x_2, ..., x_α la substitution linéaire suivante, correspondant à une circulation autour de a,

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{ll} x_1 & \mu_1 x_1, \\ x_2 & \mu_1 x_2 + \lambda_{11} x_1, \\ x_3 & \mu_1 x_3 + \lambda_{12} x_2 + \lambda_{22} x_1, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_\alpha & \mu_1 x_\alpha + \lambda_{1\alpha-1} x_{\alpha-1} + \ldots + \lambda_{\alpha-1,\alpha-1} x_1, \end{array}\right.$$

et des substitutions analogues pour les autres groupes de lettres.

Pour démontrer ce théorème, nous le supposerons vrai pour $m-1$ lettres et nous montrerons qu'il est vrai pour m. Nous partons donc de

$$y_1,\quad y_2,\quad \ldots,\quad y_m;$$

on peut toujours supposer que l'on remplace ce système par un autre système y, x_1, x_2, ..., x_{m-1}, pour lequel la substitution correspondant à la circulation autour de a sera exprimée par le Tableau

$$\begin{array}{ll} y & \mu_1 y, \\ x_1 & X_1 \quad + \lambda_1 y, \\ x_2 & X_2 \quad + \lambda_2 y, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{m-1} & X_{m-1} + \lambda_{m-1} y, \end{array}$$

les X étant des fonctions linéaires en x_1, x_2, ..., x_{m-1}. Les racines de l'équation en μ relative aux y, que nous savons être des invariants, se composent de μ_1 et des racines de l'équation de degré $m-1$ relative aux formes linéaires X_1, X_2, ..., X_{m-1}. Si μ_1 est une racine de degré α, elle sera, pour cette dernière équation, de degré $\alpha-1$. D'après l'hypothèse admise que le théorème est vrai pour $m-1$ lettres, nous pouvons faire sur x_1, x_2, ..., x_{m-1} une substitution telle que nous ayons pour elles les substitutions de la forme indiquée; nous n'aurons cependant pas encore la forme voulue, sauf pour le premier groupe de α lettres correspondant à la racine μ_1, à cause des termes en y, qui ne doivent pas figurer dans les groupes suivants. Mais il suffit

alors de remplacer

$$x_i \text{ par } x_i - k_i y \qquad (i \geq 2),$$

k_i étant une constante convenable, pour que la substitution ait la forme indiquée. Ainsi, par exemple, si la substitution relative à x_i est

$$x_i, \quad \mu_i x_i + \lambda_i y,$$

nous substituerons à la variable x_i la variable

$$x_i - ky;$$

elle se transforme alors en

$$\mu_i x_i - k\mu_1 y + \lambda_i y,$$

c'est-à-dire

$$\mu_i(x_i - ky) + k(\mu_i - \mu_1)y + \lambda_i y.$$

Si donc on choisit k de manière à avoir

$$k(\mu_i - \mu_1) - \lambda_i = 0,$$

ce qui est possible, puisque $\mu_i \neq \mu_1$, on aura effectué la transformation cherchée.

7. Nous pourrions nous servir de la forme de la substitution (4) pour trouver une expression analytique de $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$. Nous procéderons autrement, en considérant une équation auxiliaire qui reviendra souvent par la suite. Soit une première intégrale

$$y_1 = (x - a)^{r_1} \varphi_1(x),$$

$\varphi_1(x)$ étant uniforme dans le voisinage de a. Posons

$$y = y_1 \int z\, dx;$$

z satisfera à une équation différentielle d'ordre $m - 1$ de même forme que la proposée

$$\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + q_1 \frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + \ldots + q_{m-1} z = 0.$$

A cette équation d'ordre $m - 1$ correspond une équation en μ analogue à (3) et de degré $m - 1$; ses racines seront les racines de (3), prises à l'exclusion de μ_1, divisées par μ_1. Dans le cas actuel, si r_1

correspond à la racine multiple μ_1 d'ordre α, nous aurons pour l'équation en z une racine multiple d'ordre $\alpha - 1$ égal à *un*. L'équation en z a donc au moins une intégrale uniforme autour de a. On opérera sur l'équation en z comme on a opéré sur l'équation en y, et finalement on obtient un groupe de α intégrales

$$\begin{aligned} y_1 &= (x-a)^{r_1}\varphi_{01}, \\ y_2 &= y_1\int z\,dx, \\ y_3 &= y_1\int z\,dx\int u\,dx, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_\alpha &= y_1\int z\,dx\int u\,dx\int\ldots\int w\,dx, \end{aligned}$$

les $\alpha - 1$ fonctions $z, u, \ldots, w$ étant, comme φ_1, uniformes dans le voisinage de a. Les intégrations successives montrent que y_i est de la forme

$$y_i = (x-a)^{r_1}\{\varphi_{0i}(x) + \varphi_{1i}(x)\log(x-a) + \ldots + \varphi_{i-1,i}(x)[\log(x-a)]^{i-1}\},$$

les φ étant uniformes.

Il est à remarquer, d'une manière générale, que les fonctions

$$\varphi_{01},\quad \varphi_{12},\quad \varphi_{23},\quad \ldots,\quad \varphi_{i-1,i},$$

coefficients des puissances les plus élevées des logarithmes, sont dans un rapport constant, comme il résulte de suite du calcul successif des intégrales.

8. Nous avons donc maintenant la forme analytique générale des intégrales dans le voisinage d'un point singulier, forme où figurent des fonctions uniformes autour de a, *ayant, en général, ce point comme point singulier essentiel.*

Supposons que l'équation proposée ait *une* intégrale pour laquelle *toutes* les fonctions uniformes, qui figurent dans son expression comme coefficients des logarithmes, aient le point a comme *pôle;* nous allons montrer que l'équation aura au moins une intégrale de la forme

$$(x-a)^r\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ ayant a pour pôle.

Désignons, en effet, par

$$y = (x-a)^r \{ A + B\log(x-a) + \ldots + L[\log(x-a)]^\alpha \}$$

cette intégrale; les coefficients A, ..., L sont des fonctions de x ayant au plus a pour pôle, et L n'est pas identiquement nul. Si l'on fait tourner x autour de a, l'intégrale y se transformera en Y, et, si l'on forme la combinaison

$$Y - \mu y \qquad (\mu = e^{2\pi r i}),$$

on aura une nouvelle intégrale qui sera de la forme

$$(x-a)^r \{ A_1 + B_1 \log(x-a) + \ldots + L_1[\log(x-a)]^{\alpha-1} \},$$

où L_1 n'est pas identiquement nul et où les $A_1, \ldots, L_1$ ont au plus a pour pôle. En continuant ainsi, on arrive à une intégrale de la forme

$$(x-a)^r \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ ayant au plus a pour pôle et $\varphi(x)$ n'étant pas identiquement nul : c'est ce que nous voulions établir.

En augmentant, s'il est nécessaire, r d'un entier convenable, on peut admettre que $\varphi(x)$ est holomorphe autour de a et ne s'annule pas pour $x = a$.

Considérons maintenant le cas où l'équation admettrait s intégrales linéairement indépendantes, pour lesquelles les coefficients des diverses puissances des logarithmes auraient seulement des pôles en a ; nous aurons d'abord une intégrale y_1 de la forme

$$y_1 = (x-a)^r \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant holomorphe en a, et $\varphi(a)$ étant différent de zéro. Je pose

$$y = y_1 \int z\, dx;$$

la fonction z satisfera à une équation d'ordre $m-1$,

$$\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + q_1 \frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + \ldots + q_{m-1} z = 0,$$

où les q ont, comme les p, le point a pour pôle. Je dis que *cette équation aura $s-1$ intégrales linéairement indépendantes de l'espèce indiquée.*

Soient en effet $y_1, y_2, \ldots, y_s$ les s intégrales de l'équation en y dont nous avons supposé l'existence; l'équation en z admettra

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right), \quad \ldots, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y_s}{y_1}\right),$$

qui seront linéairement indépendantes et de la nature voulue. Elles sont linéairement indépendantes, car, si l'on avait

$$c_2\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)+\ldots+c_s\frac{d}{dx}\left(\frac{y_s}{y_1}\right)=0,$$

on en conclurait

$$c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_sy_s=0,$$

ce qui n'a pas lieu.

II. — Équations dont toutes les intégrales sont régulières en un point singulier.

9. Un cas très simple, particulièrement étudié par M. Fuchs, est celui où, *pour toutes les intégrales, les φ n'ont que des pôles*. On dit alors que toutes les intégrales sont *régulières* en a. Nous allons d'abord trouver une forme nécessaire pour les coefficients p de l'équation différentielle, et nous montrerons ensuite qu'elle est suffisante.

D'après ce que nous avons dit, nous aurons certainement une intégrale

$$y_1=(x-a)^r\varphi(x) \qquad [\varphi(a)\neq 0].$$

Posons alors, comme ci-dessus,

$$y=y_1\int z\,dx;$$

nous avons l'équation

$$\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}+q_1\frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}}+\ldots+q_{m-1}z=0,$$

et l'on trouve immédiatement

$$q_1=\frac{1}{y_1}\left(m\frac{dy_1}{dx}+p_1y_1\right),$$

et d'une manière générale

$$q_i = \frac{1}{y_1}\left[\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2\ldots i}\frac{d^i y_1}{dx^i}\right.$$
$$\left.+\frac{(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2\ldots(i-1)}p_1\frac{d^{i-1}y_1}{dx^{i-1}}+\ldots+(m-i+1)p_{i-1}\frac{dy_1}{dx}+p_i y_1\right].$$

L'équation en z a, comme l'équation proposée, toutes ses intégrales régulières.

Soit d'abord $m=1$. Nous avons l'équation

$$\frac{dy}{dx}+p_1 y=0;$$

il faudra nécessairement que p_1 soit de la forme $\frac{f(x)}{x-a}$, $f(x)$ étant holomorphe, pour que les intégrales soient régulières, comme le montre la formule

$$y = \mathrm{C}e^{-\int p_1 dx}.$$

Faisons maintenant $m=2$; l'équation en z sera alors du premier degré et par suite q_1 sera de la forme $\frac{f(x)}{x-a}$; il en sera donc de même de p_1 d'après l'expression de q_1. D'autre part, on a

$$\frac{1}{y}\left(\frac{d^2y}{dx^2}+p_1\frac{dy}{dx}\right)=-p_2.$$

En substituant $y=(x-a)^r\varphi(x)$, on voit que p_2 est de la forme $\frac{f(x)}{(x-a)^2}$. Ainsi donc, l'équation du second ordre, dont les intégrales sont toutes régulières, est nécessairement de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{f_1(x)}{(x-a)}\frac{dy}{dx}+\frac{f_2(x)}{(x-a)^2}y=0,$$

f_1 et f_2 étant holomorphes autour de a.

Admettons maintenant que, pour une équation d'ordre $m-1$, la forme nécessaire pour que toutes les intégrales soient régulières soit

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\frac{f_1(x)}{x-a}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\frac{f_2(x)}{(x-a)^2}\frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}}+\ldots+\frac{f_{m-1}(x)}{(x-a)^{m-1}}y=0,$$

les f étant holomorphes autour de a; nous allons montrer sans peine que la même condition subsiste pour les équations d'ordre m.

Nous partons donc d'une équation d'ordre m à intégrales toutes régulières autour du point a. L'équation correspondante en z aura aussi, comme nous l'avons vu, ses intégrales régulières; elle sera donc de la forme écrite ci-dessus. En prenant

$$y_1 = (x-a)^r \varphi(x) \qquad [\varphi(a) \neq 0],$$

on déduit de l'expression générale de q_i que p_i est de la forme $\frac{f_i(x)}{(x-a)^i}$, $f_i(x)$ étant holomorphe autour de a. Il ne reste plus à trouver que la forme de p_m; c'est à quoi l'on parvient à l'aide de la relation tirée de l'équation différentielle elle-même

$$\frac{1}{y_1}\left(\frac{d^m y_1}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + \ldots + p_{m-1}\frac{dy_1}{dx}\right) = -p_m,$$

qui montre que p_m est de la forme $\frac{f_m(x)}{(x-a)^m}$, et le théorème est par suite établi.

10. Traitons maintenant la question inverse, et démontrons qu'une équation de la forme

$$(5) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + \frac{f_1(x)}{x-a}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^2}\frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + \frac{f_m(x)}{(x-a)^m} y = 0,$$

où les f sont holomorphes dans le voisinage de a, *a toutes ses intégrales régulières* au voisinage de ce point.

Pour abréger l'écriture, nous pouvons faire $a = 0$. Au lieu de considérer une équation linéaire d'ordre m, nous allons, pour un moment, envisager un système d'équations linéaires du premier ordre.

Si l'on pose

$$x\frac{dy}{dx} = y_1, \qquad x\frac{dy_1}{dx} = y_2, \qquad \ldots, \qquad x\frac{dy_{m-2}}{dx} = y_{m-1},$$

on reconnaît immédiatement que y_{m-1} se met sous la forme d'un polynome à coefficients numériques en

$$x\frac{dy}{dx}, \quad x^2\frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \ldots, \quad x^{m-1}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}},$$

et inversement les expressions précédentes s'expriment linéairement

en $y, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$. L'équation (5) devient alors

$$x\frac{dy_{m-1}}{dx} = a_1 y + a_2 y_1 + \ldots + a_m y_{m-1},$$

les a étant holomorphes dans le voisinage de $x = 0$. Au lieu du système précédent, nous pouvons prendre d'une manière plus générale le système de m équations homogènes et linéaires du premier ordre

$$\begin{aligned}
x\frac{dy_1}{dx} &= A_{11}\, y_1 + A_{12}\, y_2 + \ldots + A_{1m}\, y_m,\\
x\frac{dy_2}{dx} &= A_{21}\, y_1 + A_{22}\, y_2 + \ldots + A_{2m}\, y_m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x\frac{dy_m}{dx} &= A_{m1} y_1 + A_{m2} y_2 + \ldots + A_{mm} y_m,
\end{aligned}$$

les A étant holomorphes dans le voisinage de $x = 0$. Cherchons s'il existe un système d'intégrales de la forme

$$y_1 = x^r u_1, \qquad y_2 = x^r u_2, \qquad \ldots, \qquad y_m = x^r u_m,$$

r étant une constante convenablement choisie, et les u étant holomorphes autour de l'origine.

En désignant par $c_1, c_2, \ldots, c_m$ les valeurs des u pour $x = 0$, valeurs qu'on peut supposer, en prenant r convenablement, n'être pas toutes nulles, on a, en substituant dans l'équation différentielle,

$$\begin{aligned}
(a_{11} - r) c_1 + a_{12} c_2 + \ldots + a_{1m} c_m &= 0,\\
a_{21}\, c_1 + (a_{22} - r) c_2 + \ldots + a_{2m} c_m &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &,\\
a_{m1} c_1 + a_{m2} c_2 + \ldots + (a_{mm} - r) c_m &= 0,
\end{aligned}$$

les a désignant les valeurs des A pour $x = 0$. Il résulte de ces équations que l'on a

$$(6) \qquad \begin{vmatrix}
a_{11} - r & a_{12} & \ldots & a_{1m}\\
a_{21} & a_{22} - r & \ldots & a_{2m}\\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} - r
\end{vmatrix} = 0;$$

r sera donc racine de cette équation du $m^{\text{ième}}$ degré ; nous désignerons

par

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_m$$

les m racines de l'équation (6). Écrivons alors le système sous la forme

$$(7)\quad \begin{cases} x\dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 + \ldots + a_{1m}\,y_m + x(B_{11}\,y_1 + \ldots + B_{1m}\,y_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x\dfrac{dy_m}{dx} = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mm}y_m + x(B_{m1}y_1 + \ldots + B_{mm}y_m), \end{cases}$$

les B étant holomorphes autour de l'origine. Cherchons à simplifier la forme de ces équations en effectuant sur les y une substitution linéaire convenable. Faisons abstraction des termes en x dans les seconds membres de (7). Posons $x\dfrac{dy}{dx} = Dy$ et considérons la substitution

$$\begin{aligned} Dy_1 &= a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 + \ldots + a_{1m}\,y_m, \\ Dy_2 &= a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + \ldots + a_{2m}\,y_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Dy_m &= a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mm}y_m, \end{aligned}$$

qui consiste à substituer à $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les expressions linéaires placées dans les seconds membres.

Mais reportons-nous à ce que nous venons de dire (§ 4 et 5) sur la réduction des substitutions linéaires. Nous avons donné une forme canonique à laquelle on peut ramener une telle substitution; c'est précisément l'équation (6) qui joue le rôle essentiel dans cette réduction. Si cette équation a ses racines distinctes, nous pourrons donc supposer que dans les seconds membres de (7) les termes indépendants de x se réduisent (¹) à

$$r_1 y_1, \quad r_2 y_2, \quad \ldots, \quad r_m y_m.$$

Dans le cas où il y aura des racines multiples, ces termes se partageront en groupes correspondant à la même racine. Ainsi, pour une racine r_1 multiple d'ordre α, les α premières équations auront pour

(¹) Comparer les considérations précédentes à la question analogue étudiée à la page 4 de ce Volume.

en $y, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$. L'équation (5) devient alors

$$x\frac{dy_{m-1}}{dx} = a_1 y + a_2 y_1 + \ldots + a_m y_{m-1},$$

les a étant holomorphes dans le voisinage de $x = 0$. Au lieu du système précédent, nous pouvons prendre d'une manière plus générale le système de m équations homogènes et linéaires du premier ordre

$$\begin{aligned}
x\frac{dy_1}{dx} &= A_{11}\, y_1 + A_{12}\, y_2 + \ldots + A_{1m}\, y_m,\\
x\frac{dy_2}{dx} &= A_{21}\, y_1 + A_{22}\, y_2 + \ldots + A_{2m}\, y_m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x\frac{dy_m}{dx} &= A_{m1} y_1 + A_{m2} y_2 + \ldots + A_{mm} y_m,
\end{aligned}$$

les A étant holomorphes dans le voisinage de $x = 0$. Cherchons s'il existe un système d'intégrales de la forme

$$y_1 = x^r u_1, \qquad y_2 = x^r u_2, \qquad \ldots, \qquad y_m = x^r u_m,$$

r étant une constante convenablement choisie, et les u étant holomorphes autour de l'origine.

En désignant par $c_1, c_2, \ldots, c_m$ les valeurs des u pour $x = 0$, valeurs qu'on peut supposer, en prenant r convenablement, n'être pas toutes nulles, on a, en substituant dans l'équation différentielle,

$$\begin{aligned}
(a_{11} - r) c_1 + a_{12} c_2 + \ldots + a_{1m} c_m &= 0,\\
a_{21}\, c_1 + (a_{22} - r) c_2 + \ldots + a_{2m} c_m &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&,\\
a_{m1} c_1 + a_{m2} c_2 \qquad + \ldots + (a_{mm} - r) c_m &= 0,
\end{aligned}$$

les a désignant les valeurs des A pour $x = 0$. Il résulte de ces équations que l'on a

$$(6) \qquad \begin{vmatrix}
a_{11} - r & a_{12} & \ldots & a_{1m}\\
a_{21} & a_{22} - r & \ldots & a_{2m}\\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} - r
\end{vmatrix} = 0;$$

r sera donc racine de cette équation du $m^{\text{ième}}$ degré; nous désignerons

par

$$r_1,\quad r_2,\quad \ldots,\quad r_m$$

les m racines de l'équation (6). Écrivons alors le système sous la forme

$$(7)\quad \begin{cases} x\dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 + \ldots + a_{1m}\,y_m + x(B_{11}\,y_1 + \ldots + B_{1m}\,y_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x\dfrac{dy_m}{dx} = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mm}y_m + x(B_{m1}y_1 + \ldots + B_{mm}y_m), \end{cases}$$

les B étant holomorphes autour de l'origine. Cherchons à simplifier la forme de ces équations en effectuant sur les y une substitution linéaire convenable. Faisons abstraction des termes en x dans les seconds membres de (7). Posons $x\dfrac{dy}{dx} = Dy$ et considérons la substitution

$$\begin{aligned} Dy_1 &= a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 + \ldots + a_{1m}\,y_m, \\ Dy_2 &= a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + \ldots + a_{2m}\,y_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Dy_m &= a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mm}y_m, \end{aligned}$$

qui consiste à substituer à $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les expressions linéaires placées dans les seconds membres.

Mais reportons-nous à ce que nous venons de dire (§ 4 et 5) sur la réduction des substitutions linéaires. Nous avons donné une forme canonique à laquelle on peut ramener une telle substitution; c'est précisément l'équation (6) qui joue le rôle essentiel dans cette réduction. Si cette équation a ses racines distinctes, nous pourrons donc supposer que dans les seconds membres de (7) les termes indépendants de x se réduisent [1] à

$$r_1 y_1,\quad r_2 y_2,\quad \ldots,\quad r_m y_m.$$

Dans le cas où il y aura des racines multiples, ces termes se partageront en groupes correspondant à la même racine. Ainsi, pour une racine r_1 multiple d'ordre α, les α premières équations auront pour

---

(1) Comparer les considérations précédentes à la question analogue étudiée à la page 4 de ce Volume.

en $y, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$. L'équation (5) devient alors

$$x\frac{dy_{m-1}}{dx} = a_1 y + a_2 y_1 + \ldots + a_m y_{m-1},$$

les a étant holomorphes dans le voisinage de $x = 0$. Au lieu du système précédent, nous pouvons prendre d'une manière plus générale le système de m équations homogènes et linéaires du premier ordre

$$x\frac{dy_1}{dx} = A_{11}\, y_1 + A_{12}\, y_2 + \ldots + A_{1m}\, y_m,$$
$$x\frac{dy_2}{dx} = A_{21}\, y_1 + A_{22}\, y_2 + \ldots + A_{2m}\, y_m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x\frac{dy_m}{dx} = A_{m1} y_1 + A_{m2} y_2 + \ldots + A_{mm} y_m,$$

les A étant holomorphes dans le voisinage de $x = 0$. Cherchons s'il existe un système d'intégrales de la forme

$$y_1 = x^r u_1, \quad y_2 = x^r u_2, \quad \ldots, \quad y_m = x^r u_m,$$

r étant une constante convenablement choisie, et les u étant holomorphes autour de l'origine.

En désignant par $c_1, c_2, \ldots, c_m$ les valeurs des u pour $x = 0$, valeurs qu'on peut supposer, en prenant r convenablement, n'être pas toutes nulles, on a, en substituant dans l'équation différentielle,

$$\begin{aligned} (a_{11} - r)c_1 + a_{12}\, c_2 + \ldots + a_{1m} c_m &= 0, \\ a_{21}\, c_1 + (a_{22} - r)c_2 + \ldots + a_{2m} c_m &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&, \\ a_{m1} c_1 + a_{m2} c_2 + \ldots + (a_{mm} - r)c_m &= 0, \end{aligned}$$

les a désignant les valeurs des A pour $x = 0$. Il résulte de ces équations que l'on a

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} - r & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} - r \end{vmatrix} = 0;$$

r sera donc racine de cette équation du $m^{\text{ième}}$ degré; nous désignerons

par

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_m$$

les m racines de l'équation (6). Écrivons alors le système sous la forme

$$(7) \quad \begin{cases} x\dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + \ldots + a_{1m}\, y_m + x(\mathrm{B}_{11}\, y_1 + \ldots + \mathrm{B}_{1m}\, y_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x\dfrac{dy_m}{dx} = a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \ldots + a_{mm} y_m + x(\mathrm{B}_{m1} y_1 + \ldots + \mathrm{B}_{mm} y_m), \end{cases}$$

les B étant holomorphes autour de l'origine. Cherchons à simplifier la forme de ces équations en effectuant sur les y une substitution linéaire convenable. Faisons abstraction des termes en x dans les seconds membres de (7). Posons $x\dfrac{dy}{dx} = \mathrm{D}y$ et considérons la substitution

$$\begin{aligned} \mathrm{D}y_1 &= a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + \ldots + a_{1m}\, y_m, \\ \mathrm{D}y_2 &= a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + \ldots + a_{2m}\, y_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{D}y_m &= a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \ldots + a_{mm} y_m, \end{aligned}$$

qui consiste à substituer à $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les expressions linéaires placées dans les seconds membres.

Mais reportons-nous à ce que nous venons de dire (§ 4 et 5) sur la réduction des substitutions linéaires. Nous avons donné une forme canonique à laquelle on peut ramener une telle substitution; c'est précisément l'équation (6) qui joue le rôle essentiel dans cette réduction. Si cette équation a ses racines distinctes, nous pourrons donc supposer que dans les seconds membres de (7) les termes indépendants de x se réduisent [1] à

$$r_1 y_1, \quad r_2 y_2, \quad \ldots, \quad r_m y_m.$$

Dans le cas où il y aura des racines multiples, ces termes se partageront en groupes correspondant à la même racine. Ainsi, pour une racine r_1 multiple d'ordre α, les α premières équations auront pour

[1] Comparer les considérations précédentes à la question analogue étudiée à la page 4 de ce Volume.

en $y, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$. L'équation (5) devient alors

$$x\frac{dy_{m-1}}{dx} = a_1 y + a_2 y_1 + \ldots + a_m y_{m-1},$$

les a étant holomorphes dans le voisinage de $x = 0$. Au lieu du système précédent, nous pouvons prendre d'une manière plus générale le système de m équations homogènes et linéaires du premier ordre

$$\begin{aligned} x\frac{dy_1}{dx} &= A_{11}\, y_1 + A_{12}\, y_2 + \ldots + A_{1m}\, y_m, \\ x\frac{dy_2}{dx} &= A_{21}\, y_1 + A_{22}\, y_2 + \ldots + A_{2m}\, y_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x\frac{dy_m}{dx} &= A_{m1}\, y_1 + A_{m2} y_2 + \ldots + A_{mm} y_m, \end{aligned}$$

les A étant holomorphes dans le voisinage de $x = 0$. Cherchons s'il existe un système d'intégrales de la forme

$$y_1 = x^r u_1, \qquad y_2 = x^r u_2, \qquad \ldots, \qquad y_m = x^r u_m,$$

r étant une constante convenablement choisie, et les u étant holomorphes autour de l'origine.

En désignant par $c_1, c_2, \ldots, c_m$ les valeurs des u pour $x = 0$, valeurs qu'on peut supposer, en prenant r convenablement, n'être pas toutes nulles, on a, en substituant dans l'équation différentielle,

$$\begin{aligned} (a_{11} - r) c_1 + a_{12}\, c_2 + \ldots + a_{1m} c_m &= 0, \\ a_{21}\, c_1 + (a_{22} - r) c_2 + \ldots + a_{2m} c_m &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ a_{m1} c_1 + a_{m2} c_2 \quad + \ldots + (a_{mm} - r) c_m &= 0, \end{aligned}$$

les a désignant les valeurs des A pour $x = 0$. Il résulte de ces équations que l'on a

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} - r & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} - r \end{vmatrix} = 0;$$

r sera donc racine de cette équation du $m^{\text{ième}}$ degré; nous désignerons

par

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_m$$

les m racines de l'équation (6). Écrivons alors le système sous la forme

$$(7) \quad \begin{cases} x\dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + \ldots + a_{1m}\, y_m + x(B_{11}\, y_1 + \ldots + B_{1m}\, y_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x\dfrac{dy_m}{dx} = a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \ldots + a_{mm} y_m + x(B_{m1} y_1 + \ldots + B_{mm} y_m), \end{cases}$$

les B étant holomorphes autour de l'origine. Cherchons à simplifier la forme de ces équations en effectuant sur les y une substitution linéaire convenable. Faisons abstraction des termes en x dans les seconds membres de (7). Posons $x\dfrac{dy}{dx} = \mathrm{D}y$ et considérons la substitution

$$\begin{aligned} \mathrm{D}y_1 &= a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + \ldots + a_{1m}\, y_m, \\ \mathrm{D}y_2 &= a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + \ldots + a_{2m}\, y_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{D}y_m &= a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \ldots + a_{mm} y_m, \end{aligned}$$

qui consiste à substituer à $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les expressions linéaires placées dans les seconds membres.

Mais reportons-nous à ce que nous venons de dire (§ 4 et 5) sur la réduction des substitutions linéaires. Nous avons donné une forme canonique à laquelle on peut ramener une telle substitution; c'est précisément l'équation (6) qui joue le rôle essentiel dans cette réduction. Si cette équation a ses racines distinctes, nous pourrons donc supposer que dans les seconds membres de (7) les termes indépendants de x se réduisent [1] à

$$r_1 y_1, \quad r_2 y_2, \quad \ldots, \quad r_m y_m.$$

Dans le cas où il y aura des racines multiples, ces termes se partageront en groupes correspondant à la même racine. Ainsi, pour une racine r_1 multiple d'ordre α, les α premières équations auront pour

[1] Comparer les considérations précédentes à la question analogue étudiée à la page 4 de ce Volume.

seconds membres (aux termes en x près), d'après ce qui a été dit (§ 5),

$$r_1 y_1,$$
$$r_1 y_2 + \lambda_{11} y_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$r_1 y_\alpha + \lambda_{1,\alpha-1} y_{\alpha-1} + \ldots + \lambda_{\alpha-1,\alpha-1} y_1,$$

et l'on aura des groupes de même forme pour les équations restantes.

11. Supposons donc que les équations (7) aient la forme indiquée. Nous avons, après la réduction qui vient d'être effectuée, les équations

$$\begin{aligned}
x\frac{dy_1}{dx} &= r_1 y_1 + x(B_{11} y_1 + \ldots),\\
x\frac{dy_2}{dx} &= r_1 y_2 + \lambda_{11} y_1 + x(\quad),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x\frac{dy_\alpha}{dx} &= r_1 y_\alpha + \lambda_{1,\alpha-1} y_{\alpha-1} + \ldots + \lambda_{\alpha-1,\alpha-1} y_1 + x(\quad),\\
x\frac{dy_{\alpha+1}}{dx} &= r_2 y_{\alpha+1} + x(\quad),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Nous allons porter notre attention sur la racine r_1; son ordre de multiplicité α (qui peut, bien entendu, être égal à *un*) ne figurera d'ailleurs pas dans le résultat auquel nous voulons parvenir.

Cherchons si le système précédent admet des intégrales de la forme

$$y_1 = x^{r_1} u_1, \qquad y_2 = x^{r_1} u_2, \qquad \ldots, \qquad y_m = x^{r_1} u_m.$$

Nous aurons, en substituant, les nouvelles équations

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
x\frac{du_1}{dx} &= x(\quad),\\
x\frac{du_2}{dx} &= \lambda_{11} u_1 + x(\quad),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x\frac{du_\alpha}{dx} &= \lambda_{1,\alpha-1} u_{\alpha-1} + \ldots + \lambda_{\alpha-1,\alpha-1} u_1 + x(\quad),\\
x\frac{du_{\alpha+1}}{dx} &= (r_2 - r_1) u_{\alpha+1} + x(\quad).\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

les parenthèses étant holomorphes en x. On va montrer qu'on peut satisfaire à ces équations en prenant pour les u des fonctions holomorphes de x, si toutefois certaines conditions, que nous indiquerons, ne sont pas remplies.

Les équations différentielles permettent de calculer de proche en proche les coefficients des développements. Pour $x = 0$, les u seront nuls en général, sauf u_α dont la valeur initiale restera arbitraire. Pour qu'on ne soit pas arrêté dans le calcul des dérivées successives, il faut qu'aucune des différences

$$r_i - r_1 \qquad (i \neq 1)$$

ne soit égale à un entier positif.

Il ne reste plus qu'à voir que les développements ainsi obtenus sont convergents. Nous emploierons à cet effet les méthodes de comparaison dont nous nous sommes déjà tant de fois servi. Les valeurs initiales des u sont toutes nulles, sauf celle de u_α, dont nous désignerons le module par u_α^0. Soit, d'autre part, λ le module maximum des quantités λ et de leurs analogues dans les équations différentielles, et soit enfin ε le module minimum de la différence

$$m - (r_2 - r_1),$$

où m est un entier positif quelconque, et de ses analogues pour les différentes racines r_2 de l'équation en r. Nous considérons le système d'équations

$$(9)\quad \begin{cases} u_1 = x(\quad), \\ u_2 = \lambda u_1 + x(\quad), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ u_\alpha - u_\alpha^0 = \lambda u_{\alpha-1} + \ldots + \lambda u_1 + x(\quad), \\ \varepsilon u_{\alpha+1} = x(\quad), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Dans les parenthèses, les coefficients de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ont été remplacés par des fonctions *majorantes* (ou fonctions de comparaison) pour un certain cercle autour de l'origine.

Pour $x = 0$, les équations (9) donnent les u égaux à zéro, sauf u_α qui est égal à u_α^0. Les valeurs de u, définies par les équations (9), sont holomorphes autour de $x = 0$. Nous avons à comparer maintenant les développements tirés des équations (8) et (9). De ces dernières on tire des développements où les coefficients sont tous positifs,

et qui sont certainement convergents dans un certain domaine, autour de l'origine.

On voit immédiatement que les coefficients des développements tirés de (8) ont un module moindre que les coefficients correspondants tirés de (9), d'après la signification de ε et de λ, et le fait que dans les parenthèses les coefficients de u ont été remplacés par des fonctions majorantes. On aura donc certainement pour (8) des développements convergents.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

Le système (7) *admettra un système d'intégrales de la forme*

$$y_1 = x^{r_1} u_1, \qquad y_2 = x^{r_1} u_2, \qquad \ldots, \qquad y_m = x^{r_1} u_m,$$

les u étant holomorphes dans le voisinage de $x = 0$, en désignant par r_1 une racine de l'équation (6) *telle qu'aucune différence*

$$r_2 - r_1, \quad r_3 - r_1, \quad \ldots, \quad r_m - r_1$$

ne soit un entier positif différent de zéro.

On voit que cet énoncé n'exclut pas le cas où il y aurait, parmi les racines $r_2, \ldots, r_m$, une ou plusieurs racines égales à r_1.

L'équation (6) s'appelle l'*équation fondamentale déterminante* relative au point singulier $x = 0$. Dans le cas qu'on peut appeler *général*, les racines

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_m$$

sont distinctes, et aucune des différences

$$r_i - r_k \qquad (i \neq k)$$

n'est égale à un entier positif ou négatif. On a alors, pour (7), m systèmes d'intégrales

$$y_{1i} = x^{r_i}\varphi_{1i}(x), \qquad y_{2i} = x^{r_i}\varphi_{2i}(x), \qquad \ldots, \qquad y_{mi} = x^{r_i}\varphi_{mi}(x)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m),$$

les φ étant holomorphes autour de l'origine.

12. Revenons maintenant à l'équation différentielle (5) d'ordre m, c'est-à-dire à l'équation

$$\frac{d^m y}{dx^m} + \frac{f_1(x)}{(x-a)}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + \frac{f_m(x)}{(x-a)^m} y = 0.$$

En appliquant le théorème du paragraphe précédent, on voit que cette équation admettra au moins une intégrale de la forme

$$y = (x-a)^r \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant holomorphe dans le voisinage de a. Pour trouver l'équation donnant r, il n'est pas besoin de former le système d'équations linéaires équivalent à l'équation d'ordre m. Il suffit d'écrire que l'expression précédente [$\varphi(a)$ étant différent de zéro] satisfait à l'équation. On obtient ainsi, en égalant à zéro les termes de moindre degré,

$$(10)\quad \left\{ \begin{array}{l} r(r-1)\ldots(r-m+1) \\ \quad + f_1(a)\, r(r-1)\ldots(r-m+2) + \ldots + f_{m-1}(a)\, r + f_m(a) = 0. \end{array} \right.$$

Si $r_1, r_2, \ldots, r_m$ sont les m racines égales ou inégales de cette équation, *l'équation différentielle admettra une intégrale de la forme*

$$y_1 = (x-a)^{r_1} \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant holomorphe autour de a, et $\varphi(a)$ étant différent de zéro, *si aucune des différences*

$$r_2 - r_1, \quad r_3 - r_1, \quad \ldots, \quad r_m - r_1$$

n'est un entier positif différent de zéro.

L'équation (10) a été appelée par M. Fuchs l'équation fondamentale déterminante relative au point singulier a. Un rapprochement très important est à faire entre l'équation (10) et l'équation (3) en μ (§ 4). Il résulte de ce que nous avons dit à la fin du paragraphe précédent, que, si les différences des racines de l'équation (10) ne sont pas des entiers positifs ou négatifs, on aura les intégrales régulières

$$y_1 = (x-a)^{r_1} \varphi_1(x), \quad y_2 = (x-a)^{r_2} \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad y_m = (x-a)^{r_m} \varphi_m(x),$$

et, par suite, les m racines de l'équation (3) seront égales à

$$e^{2\pi i r_1}, \quad e^{2\pi i r_2}, \quad \ldots, \quad e^{2\pi i r_m}.$$

Telle est, pour le cas général, la dépendance entre les équations (3) et (10). Cette dépendance subsistera évidemment dans tous les cas, puisque le théorème, étant vrai pour des valeurs arbitraires des coeffi-

cients $f_1(a), \ldots, f_m(a)$ de (10), ne peut cesser d'être exact pour des valeurs particulières de ces coefficients.

13. Pour faire la recherche des intégrales, on partagera les racines

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_m$$

de l'équation (10) en groupes tels que, dans chacun d'eux, la différence de deux racines soit un entier positif ou négatif, et que, d'un groupe à l'autre, la différence de deux racines de ces groupes ne soit pas entière. Soient

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_\alpha$$

les racines d'un premier groupe, ces racines pouvant être égales ou inégales. Supposons-les rangées par ordre décroissant de grandeur et posons

$$y = y_1 \int z\,dx.$$

On a pour z une équation déjà considérée d'ordre $m-1$, dont toutes les intégrales sont régulières autour de a. Puisque

$$z = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right),$$

les racines de l'équation fondamentale déterminante pour l'équation en z seront

$$r_2 - r_1 - 1, \quad r_3 - r_1 - 1, \quad \ldots, \quad r_m - r_1 - 1,$$

et, parmi celles-ci, nous avons le groupe des $\alpha - 1$ racines entières et négatives

$$r_2 - r_1 - 1, \quad r_3 - r_1 - 1, \quad \ldots, \quad r_\alpha - r_1 - 1,$$

les autres n'étant pas des entiers.

L'équation en z aura une intégrale de la forme

$$z = (x-a)^{r_2 - r_1 - 1}\psi(x),$$

$\psi(x)$ étant holomorphe dans le voisinage de a, et $\psi(a)$ étant différent de zéro. En substituant dans l'expression de y, on a alors une seconde intégrale

$$y_2 = (x-a)^{r_2}[A(x) + B(x)\log(x-a)],$$

A et B étant holomorphes, le produit

$$(x-a)^{r_1} B(x)\cdot$$

se réduisant d'ailleurs, à un facteur constant près, à y_1.

En opérant sur l'équation en z comme on a opéré sur l'équation en y, et continuant ainsi de proche en proche, on aura finalement les intégrales

$$y_1,\quad y_2,\quad \ldots,\quad y_\alpha,$$

et y_α est de la forme

$$y_\alpha = (x-a)^{r_\alpha}\left\{A_1(x) + A_2(x)\log(x-a) + \ldots + A_{\alpha-1}(x)[\log(x-a)]^{\alpha-1}\right\},$$

les A étant holomorphes. Nous avons donc ainsi formé un ensemble de α intégrales correspondant au groupe des α racines de (10) différant d'un entier.

14. Appliquons ces généralités à une équation différentielle du second ordre, sur laquelle nous aurons d'ailleurs à revenir; c'est l'équation différentielle de la série hypergéométrique

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0,$$

α, β et γ désignant trois constantes. Les trois points singuliers des intégrales sont $x=0$, $x=1$ et $x=\infty$. Pour ce dernier point, il faudra faire, pour l'étudier, $x = \frac{1}{x'}$, dans l'équation différentielle, et considérer le point $x'=0$ dans la transformée.

Pour former l'équation fondamentale déterminante relative au point o, nous écrivons l'équation sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha\beta x}{x^2(1-x)}y = 0,$$

et l'équation (10) devient ici

$$r(r-1) + r\gamma = 0,$$

qui a les deux racines

$$r=0,\qquad r=1-\gamma.$$

Si donc γ n'est pas un entier, l'équation a, dans le voisinage de a, les deux intégrales

$$\varphi_1(x),\qquad x^{1-\gamma}\varphi_2(x),$$

φ_1 et φ_2 étant holomorphes dans le cercle de rayon *un*, $\varphi_1(0)$ et $\varphi_2(0)$ n'étant pas nuls. La forme des coefficients du développement de $\varphi_1(x)$ est remarquable. En posant

$$\varphi_1(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_p x^p + \ldots,$$

on trouve, en substituant dans l'équation différentielle,

$$[-p(p-1) - (\alpha+\beta+1)p - \alpha\beta]c_p + [p(p+1) + \gamma(p+1)]c_{p+1} = 0,$$

par suite

$$c_{p+1} = \frac{(p+\alpha)(p+\beta)}{(p+1)(p+\gamma)} c_p,$$

et l'on a, pour $\varphi_1(x)$, le développement célèbre

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma} x + \ldots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)}{1.2\ldots p} \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+p-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+p-1)} x^p + \ldots,$$

série convergente dans le cercle de rayon *un*, et que nous avons déjà rencontrée (t. II, p. 229).

Nous avons supposé plus haut que $1-\gamma$ n'était pas un entier. Si $1-\gamma$ est un entier *négatif*, nous aurons toujours une intégrale holomorphe $\varphi_1(x)$, puisque des deux racines

$$0, \quad 1-\gamma$$

zéro est la plus grande. La série hypergéométrique subsiste dans ce cas. Les conclusions sont autres si $1-\gamma$ est un entier *positif*. On a, dans ce cas, une intégrale de la forme

$$x^{1-\gamma}\psi(x),$$

$\psi(x)$ étant holomorphe et $\psi(0) \neq 0$; la seconde intégrale renferme un terme logarithmique.

Conformément aux généralités du paragraphe 13, elle est de la forme

$$A(x) + kx^{1-\gamma}\psi(x)\log x,$$

k étant une constante, et $A(x)$ étant holomorphe dans le cercle de rayon *un* $[A(0) \neq 0]$.

III. — Théorèmes généraux sur les équations à intégrales irrégulières [1].

15. Les équations dont toutes les intégrales sont régulières en un point singulier forment, comme on vient de le voir, une classe remarquable; on peut obtenir pour elles la forme analytique des intégrales au moyen de développements dont les coefficients se déterminent de proche en proche par voie de récurrence. L'étude des équations ayant des intégrales irrégulières est beaucoup plus difficile.

Dans cette étude, il y a d'abord une suite de nombres entiers qui joue un rôle très important. Reprenons l'équation

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m y = 0.$$

Soient respectivement $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ les degrés de multiplicité de a comme pôle de $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Considérons la suite des entiers

(11) $$\pi_1 + m - 1, \quad \pi_2 + m - 2, \quad \ldots, \quad \pi_{m-1} + 1, \quad \pi_m.$$

Elle va être de grande importance pour la suite. Si le plus grand de ces nombres ne dépasse pas m, nous sommes dans la classe des équations différentielles étudiées dans la Section précédente; nous allons donc supposer que le maximum g de ces nombres dépasse m.

16. Supposons que l'équation différentielle ait *une* intégrale régulière. Nous avons le lemme préliminaire suivant :

Soit $g > m$ le plus grand des nombres

$$\pi_1 + m - 1, \quad \pi_2 + m - 2, \quad \ldots, \quad \pi_{m-1} + 1;$$

le coefficient p_m admettra le point a comme pôle avec un degré de multiplicité ne dépassant pas g.

La démonstration est immédiate, car nous n'avons qu'à substituer

$$y = (x-a)^r \varphi(x) \qquad [\varphi(a) \neq 0]$$

---

[1] Pour les généralités sur les intégrales irrégulières, *voir* les Mémoires de M. Thomé (*Journal de Crelle*, t. 74, 75 et 76).

dans l'équation

$$\frac{1}{y}\left[\frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\ldots+p_{m-1}\frac{dy}{dx}\right]=-p_m$$

pour voir que π_m satisfait à l'inégalité indiquée.

17. Nous allons généraliser le lemme précédent, en supposant que l'équation différentielle possède au moins $m-h$ intégrales régulières linéairement indépendantes. Admettons alors que les h premiers nombres de la suite (11)

$$\pi_1+m-1,\quad \pi_2+m-2,\quad \ldots,\quad \pi_h+m-h$$

aient pour maximum $g>m$; nous allons montrer que *tous les nombres*

$$\pi_{h+1}+m-h-1,\quad \ldots,\quad \pi_{m-1}+1,\quad \pi_m$$

seront inférieurs ou égaux à g.

Dans le paragraphe précédent, nous avons démontré cette proposition pour $h=m-1$. Nous allons supposer maintenant qu'elle est vraie pour une équation différentielle d'ordre $m-1$ et montrer qu'elle est vraie pour une équation différentielle d'ordre m. En posant

$$y=y_1\int z\,dx,$$

où y_1 est l'intégrale régulière $(x-a)^r\varphi(x)\,[\varphi(a)\neq 0]$, nous aurons pour z une équation d'ordre $m-1$, qui aura au moins $m-h-1$ intégrales régulières linéairement indépendantes. Soient

$$\pi'_1,\quad \pi'_2,\quad \ldots,\quad \pi'_{m-1}$$

les nombres relatifs aux coefficients q dans l'équation en z. On a désigné par g le plus grand des nombres

$$\pi_1+m-1,\quad \pi_2+m-2,\quad \ldots,\quad \pi_h+m-h.$$

Il résulte de l'expression des coefficients q, à l'aide des p, donnée au paragraphe 9, à savoir :

$$q_i=\frac{1}{y_1}\left[\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2\ldots i}\frac{d^i y_1}{dx^i}+\ldots+(m-i+1)p_{i-1}\frac{dy_1}{dx}+p_i y_1\right],$$

que le terme maximum dans la suite

$$\pi'_1 + (m-1) - 1, \quad \pi'_2 + (m-1) - 2, \quad \ldots, \quad \pi'_h + (m-1) - h$$

sera au plus égal à

$$g - 1.$$

On déduit donc, du théorème admis pour les équations d'ordre $m - 1$, que les nombres

$$\pi'_{h+1} + (m-1) - h - 1, \quad \ldots, \quad \pi'_{m-1}$$

sont au plus égaux à $g - 1$, et, par suite, en se reportant à l'expression de p_i en fonction de q_i et des p d'indices inférieurs à i, les nombres

$$\pi_{h+1} + m - h - 1, \quad \ldots, \quad \pi_{m-1} + 1$$

sont au plus égaux à g, et il en est de même aussi (paragraphe précédent) pour π_m.

18. Du lemme précédent se déduit une proposition intéressante. *Supposons que, pour une équation différentielle, le plus grand des termes de la suite*

$$(\Sigma) \qquad \pi_1 + m - 1, \quad \pi_2 + m - 2, \quad \ldots, \quad \pi_m$$

soit un nombre $g > m$; désignons par

$$\pi_h + m - h$$

le premier terme de cette suite égal à g (pour le cas où il y en aurait plusieurs); *l'équation ne pourra avoir plus de $m - h$ intégrales régulières linéairement indépendantes.* Si, en effet, l'équation avait $m - h'$ intégrales régulières distinctes ($h' < h$), comme les termes de la suite

$$\pi_1 + m - 1, \quad \pi_2 + m - 2, \quad \ldots, \quad \pi_{h'} + m - h'$$

sont inférieurs à g, il résulterait du paragraphe précédent que tous les termes de la suite (Σ) sont inférieurs à g; ce qui n'a pas lieu, puisque $\pi_h + m - h = g$.

19. Le théorème qui vient d'être établi donne seulement une limite supérieure pour le nombre des intégrales régulières distinctes,

mais, malheureusement, *cette limite peut ne pas être atteinte*. Nous en verrons un exemple dans un moment. Cherchons à obtenir les intégrales régulières qui pourraient exister, en attribuant à h, dans les calculs qui vont suivre, la même signification que ci-dessus.

Écrivons l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{d^m y}{dx^m} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\pi_1}}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^{\pi_2}}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + \frac{f_m(x)}{(x-a)^{\pi_m}}y = 0,$$

les f étant holomorphes et différents de zéro pour $x = a$.

En faisant dans cette équation

$$y = (x-a)^r u,$$

u étant holomorphe, et $u(a)$ étant différent de zéro, on aura en divisant par $(x-a)^r$ le résultat de la substitution et le multipliant par $(x-a)^g$, puis faisant $x = a$,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &r(r-1)\ldots[r-(m-h)+1]f_h(a)\\ &\quad + r(r-1)\ldots[r-(m-h)-2][f_{h+1}(x)(x-a)^{\pi_h-\pi_{h+1}+1}]_{x=a} + \ldots\\ &\quad + [f_m(x)(x-a)^{\pi_h-\pi_m+m-h}]_{x=a} + 0. \end{aligned}\right.$$

On obtient donc ainsi une équation du degré $m - h$ à laquelle doit satisfaire r pour que l'on ait une solution de la forme indiquée. Cette équation d'ordre $m - h$ est l'analogue de l'équation fondamentale déterminante dans le cas où l'équation a toutes ses intégrales régulières; elle se confond avec elle, si $h = 0$.

20. On peut, avec cette équation en r, commencer une étude analogue à celle que nous avons faite avec l'équation fondamentale déterminante dans le cas des équations de M. Fuchs; mais, avant d'indiquer ces généralités, prenons un cas particulier qui nous mettra sur la voie d'une circonstance générale. J'envisage l'équation du second ordre

$$(13)\quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} + (a_0 + a_1 x + \ldots)\frac{dy}{dx} + (b_0 + b_1 x + \ldots)y = 0 \qquad (a_0 \neq 0).$$

Les intégrales ne peuvent être toutes régulières pour $x = 0$. O[redacted] a ici

$$\pi_1 = 2, \qquad \pi_2 = 2.$$

On a donc la suite

$$\pi_1 - m + 1 = 1, \qquad \pi_2 - m + 2 = 2.$$

Ainsi $g = 3$, $h = 1$, et il y a par conséquent au plus *une* intégrale régulière, et l'équation (12) en r se réduit à

$$r = 0.$$

L'intégrale régulière, si elle existe, sera donc de la forme

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m + \ldots \qquad (A_0 \neq 0).$$

Or la substitution montre qu'on peut calculer les coefficients de proche en proche. On obtient les équations

$$\begin{aligned} a_0 A_1 + b_0 A_0 &= 0, \\ a_1 A_1 + 2a_0 A_2 + b_0 A_1 + b_1 A_0 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&, \\ m(m-1)A_m + (m+1)a_0 A_{m+1} + b_0 A_m + b_1 A_{m-1} + \ldots &= 0, \end{aligned}$$

qui donnent successivement $A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}, \ldots$. Il est donc possible de déterminer le développement, mais il se présente maintenant une circonstance bien remarquable qui différencie complètement ce cas de celui où toutes les intégrales sont régulières : *le développement obtenu n'est pas convergent en général,* quelque petit que soit le domaine pris autour de a.

Pour le montrer, il suffira de prendre le cas particulier de l'équation

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_0 \frac{dy}{dx} + b_0 y = 0.$$

Les équations successives

$$\begin{aligned} a_0 A_1 + b_0 A_0 &= 0, \\ 2a_0 A_2 + b_0 A_1 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&, \\ (m+1)a_0 A_{m+1} + [b_0 + m(m-1)]A_m &= 0 \end{aligned}$$

donnent les coefficients en fonction de A_0, et il est visible que le rapport $\frac{A_{m+1}}{A_m}$ augmente indéfiniment avec m et que par suite la série

$$A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m + \ldots$$

ne converge pour aucune valeur de x (sauf $x = 0$).

Il résulte de ce qui précède que l'équation (13) n'a pas d'intégrale régulière à l'origine, et nous avons là un exemple où le maximum (ici égal à *un*) du nombre des intégrales régulières donné par le théorème du paragraphe 18 n'est pas atteint.

21. La circonstance relative à la divergence du développement obtenu, qui vient de se présenter dans l'exemple particulier du paragraphe précédent, est générale. Reprenons l'équation différentielle d'ordre m du paragraphe 19, et l'équation (12) de degré $m-h$ en r, que nous désignerons par

$$\varphi(r)=0.$$

Si l'on pose

$$y=(x-a)^{r_1}[c_0+c_1(x-a)+\ldots+c_k(x-a)^k+\ldots],$$

on pourra déterminer de proche en proche les coefficients c en fonction du premier, en prenant pour r_1 une racine de l'équation $\varphi(r)=0$. On reconnaît bien aisément que, les coefficients jusqu'à c_{k-1} ayant été déterminés, le coefficient de c_k dans l'équation du premier degré qui le détermine est

$$\varphi(r_1+k),$$

et, par conséquent, si l'équation $\varphi(r)=0$ n'a pas de racine de la forme r_1+k, en désignant par k un entier positif, *on pourra déterminer un développement de la forme indiquée.*

Le théorème précédent comprend évidemment, comme cas particulier, le théorème relatif à l'équation fondamentale déterminante pour le cas où toutes les intégrales sont régulières, en ce qui concerne du moins la formation des développements. Mais, pour ce qui regarde la convergence des développements, nous sommes dans des conditions bien différentes. Il est clair, d'après le cas particulier du paragraphe précédent, que *les développements ainsi obtenus sont en général divergents* et que nous n'obtenons ainsi que des séries satisfaisant *formellement* à l'équation différentielle sans représenter une intégrale. Si les racines de $\varphi(r)=0$ sont telles que la différence de deux quelconques d'entre elles n'est pas un entier, on obtiendra $m-h$ développements.

22. Les développements que nous venons d'obtenir ne sont pas les seuls que l'on puisse tirer d'une équation différentielle linéaire dans le voisinage d'un point singulier. Nous énoncerons plus loin un théorème général à ce sujet, mais considérons d'abord un point singulier d'une nature spéciale. Pour plus de simplicité, nous plaçons le point

singulier à l'infini, et, l'équation étant

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m y = 0, \tag{13}$$

nous supposons que tous les coefficients p soient continus pour $x = \infty$, c'est-à-dire que les p soient des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$. Nous aurons donc

$$\begin{aligned}
p_1 &= a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots, \\
p_2 &= b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
p_m &= l_0 + \frac{l_1}{x} + \frac{l_2}{x^2} + \ldots
\end{aligned}$$

Posons

$$y = e^{\lambda x} u.$$

L'équation en u sera de même forme, et le terme indépendant de x dans le coefficient de u sera

$$\lambda^m + a_0 \lambda^{m-1} + \ldots + l_0.$$

En égalant ce polynome à zéro, nous avons une équation d'ordre m, dont nous supposerons les racines différentes, soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. En posant donc $y = e^{\lambda_1 x} u$, nous avons une équation

$$\begin{aligned}
&\frac{d^m u}{dx^m} + \left(a'_0 + \frac{a'_1}{x} + \ldots\right) \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + \ldots \\
&\qquad + \left(k'_0 + \frac{k'_1}{x} + \ldots\right) \frac{du}{dx} + \left(\frac{l'_1}{x} + \frac{l'_2}{x^2} + \ldots\right) u = 0.
\end{aligned}$$

Cherchons maintenant à obtenir un développement de la forme

$$u = x^{\rho_1}\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots\right) \qquad (A_0 \neq 0).$$

Le terme de degré maximum sera le terme de degré $\rho_1 - 1$, et l'on aura comme coefficient de ce terme

$$A_0(k'_0 \rho_1 + l'_1) = 0.$$

On doit par suite prendre

$$\rho_1 = -\frac{l'_1}{k'_0}:$$

ρ étant ainsi choisi, les coefficients A_1, A_2, ... se déterminent de proche en proche, et l'on obtiendra finalement, pour l'équation (13), le développement

$$y = e^{\lambda_1 x} x^{\rho_1} \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots\right),$$

et $m - 1$ développements analogues correspondant aux racines λ_1, ..., λ_m. Mais *ces développements ne sont pas en général convergents;* ils satisfont formellement à l'équation différentielle, mais ne représentent pas une intégrale.

Une remarque importante est à faire relativement aux nombres ρ. D'après la théorie générale des points singuliers, il y a en général m intégrales se reproduisant multipliées par des facteurs constants

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_m,$$

quand x tourne autour d'un point singulier, c'est-à-dire ici, puisqu'il s'agit du point à l'infini, quand x décrit une circonférence de très grand rayon. Si les développements que nous venons de trouver étaient convergents, nous aurions facilement les nombres ω, car on aurait évidemment

$$\omega_h = e^{2\pi i \rho_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Mais, quand les développements sont divergents, *les nombres ρ n'ont aucune relation simple avec les nombres ω.* Nous reviendrons plus loin sur les points singuliers de la nature de ceux que nous venons de rencontrer dans ce paragraphe.

23. Dans tous les cas, on pourra toujours trouver des développements plus ou moins analogues à ceux qui ont été obtenus dans le cas particulier précédent. Énonçons seulement ici une proposition due à M. Thomé (Mémoires cités). Nous reprenons une équation ayant comme point singulier le point a, celui-ci étant un pôle pour les coefficients p. *On pourra, en général, trouver m expressions de la forme*

$$e^{Q\left(\frac{1}{x-a}\right)}(x-a)^{\rho}[A_0 + A_1(x-a) + \ldots],$$

Q étant un polynome d'un degré convenablement choisi en $\frac{1}{x-a}$ *— ρ désignant une constante.* Il est essentiel d'ajouter que la série

entière

$$A_0 + A_1(x - a) + \ldots$$

ne converge pas en général, et que nous avons là, par conséquent, comme plus haut, une expression satisfaisant *formellement* à l'équation différentielle, mais ne représentant pas une intégrale.

La démonstration du théorème précédent ne présente aucune difficulté; mais, comme il y a malheureusement peu de parti à tirer de ce résultat plutôt négatif, nous ne nous y arrêterons pas. J'ajoute seulement que, dans certains cas spéciaux, les formes précédentes peuvent se trouver en défaut; il est peut-être nécessaire d'ajouter des termes contenant des logarithmes et même, dans certains cas, de considérer des développements où $(x - a)$ est remplacé par $(x - a)^{\frac{1}{p}}$ (p étant un entier). Je renverrai, pour ces cas particuliers, à la thèse de M. Fabry ([1]).

IV. — Calcul des intégrales irrégulières et de la substitution relative à un contour fermé. — Groupe d'une équation linéaire.

24. Les développements que nous venons d'obtenir n'étant pas en général convergents, nous n'avons jusqu'ici aucun moyen, dans le cas des intégrales irrégulières, d'obtenir effectivement les coefficients des développements de ces intégrales dont nous connaissons seulement la forme analytique.

Supposons que l'origine soit, dans le plan de la variable complexe z, un point singulier de notre équation différentielle. A l'intérieur d'un cercle C, ayant l'origine pour centre, et un rayon moindre que la distance de l'origine au point singulier le plus voisin, toute intégrale est une fonction analytique $f(z)$, n'ayant d'autre point singulier que l'origine. Supposons le rayon r du cercle C moindre que l'unité; nous allons montrer qu'on peut trouver un développement en série de la fonction, valable pour tous les points du cercle, quel que soit le chemin suivi par la variable. Faisons, en effet, la transformation

$$x = \frac{1}{\log z}.$$

([1]) E. Fabry, *Sur les intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels* (Paris, Gauthier-Villars, 1885).

Au cercle C du plan des z correspond dans le plan des x un cercle C' passant par l'origine et ayant pour centre le point

$$x = \frac{1}{2 lr},$$

en désignant par lr le logarithme arithmétique de r; et si, comme nous le supposons, r est moindre que l'unité, aux points à l'intérieur du cercle C correspondent des points à l'intérieur du cercle C'. Par la transformation

$$x = e^{\frac{1}{x}},$$

la fonction $f(z)$ devient donc une fonction de x, qui est holomorphe à l'intérieur du cercle C'. On peut la développer suivant les puissances de

$$x - \frac{1}{2 lr},$$

et l'on a par conséquent, pour $f(z)$, le développement

$$(14) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \left(\frac{1}{\log z} - \frac{1}{2 lr} \right)^n,$$

où les A_n sont des constantes, et ce développement est valable à l'intérieur du cercle C. Aux déterminations multiples de $\log z$ correspondent les déterminations multiples de la fonction.

Ce développement peut être utilisé dans diverses circonstances ([1]). Pour les équations linéaires, qui nous intéressent ici, on peut tirer des développements précédents le calcul des coefficients de la substitution correspondant à une circulation de la variable autour de l'origine. Considérons, en effet, un système fondamental d'intégrales

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_m(z)$$

données par des développements analogues au développement (14) et en donnant à $\log z$ une de ses déterminations. Quand on tourne une fois autour de l'origine, on aura, en revenant au point de départ,

---

([1]) E. PICARD, *Sur une classe de fonctions non uniformes* (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII, 1879).

d'autres déterminations

$$F_1(z),\quad F_2(z),\quad \ldots,\quad F_m(z),$$

qui se déduiront des premières en remplaçant $\log z$ par $\log z + 2\pi i$. On devra avoir

$$\begin{aligned}
F_1(z) &= a_{11} f_1(z) + a_{12} f_2(z) + \ldots + a_{1m} f_m(z),\\
F_2(z) &= a_{21} f_1(z) + a_{22} f_2(z) + \ldots + a_{2m} f_m(z),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
F_m(z) &= a_{m1} f_1(z) + a_{m2} f_2(z) + \ldots + a_{mm} f_m(z),
\end{aligned}$$

et ce sont les coefficients de cette substitution que nous nous proposons de déterminer. En représentant $f_1(z)$ par la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n^1 \left(\frac{1}{\log z} - \frac{1}{2lr}\right)^n,$$

on aura

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n^1 \left(\frac{1}{\log z + 2\pi i} - \frac{1}{2lr}\right)^n.$$

Or la fonction

$$\frac{1}{\log z + 2\pi i}$$

est une fonction de la nature de celles que nous venons d'étudier, c'est-à-dire qu'elle a le seul point singulier O dans le cercle C. On peut donc développer l'expression précédente en série suivant les puissances de

$$\frac{1}{\log z} - \frac{1}{2lr}.$$

En substituant dans $F_1(z)$ ce développement, on aura le développement de $F_1(z)$ suivant les puissances de cette différence, et la comparaison des coefficients nous fera connaître par des équations du premier degré les quantités

$$a_{11},\quad a_{12},\quad \ldots,\quad a_{1m},$$

et l'on aura de même les autres quantités a. La substitution correspondante à la circulation autour de l'origine se trouvera donc ainsi déterminée; il est clair que les coefficients de cette substitution se présentent sous forme de séries indéfinies, mais on ne peut songer à les exprimer en général à l'aide de fonctions simples des coefficients de l'équation proposée.

25. Je proposerai encore une autre méthode pour calculer la substitution relative à une circulation de la variable autour d'un point singulier. Cette méthode va même nous permettre de considérer un contour fermé *comprenant non pas seulement un point singulier, mais un nombre quelconque de singularités.* On peut supposer que le contour fermé est défini par l'équation

$$z = P(\theta),$$

$P(\theta)$ étant une fonction analytique de la variable *réelle* θ, admettant la période 2π, de sorte que le point z revient au point de départ quand θ a augmenté de 2π. En substituant, dans l'équation différentielle, cette valeur de z, on a une équation différentielle linéaire à coefficients périodiques et continus pour toute valeur réelle de θ. D'après ce que nous avons dit (p. 88 de ce Tome et § 3 de ce Chapitre), toute intégrale peut être représentée par une série convergente pour toute valeur réelle de θ. Représentons donc m intégrales formant un système fondamental par

$$f_1(\theta), \quad f_2(\theta), \quad \ldots, \quad f_m(\theta),$$

ces intégrales étant représentées par les séries que donne la méthode des approximations successives, et que nous pouvons regarder comme connues. Si l'on tourne une fois le long du circuit, on obtiendra

$$f_1(\theta + 2\pi), \quad f_2(\theta + 2\pi), \quad \ldots, \quad f_m(\theta + 2\pi).$$

On doit avoir

$$\begin{aligned}
f_1(\theta + 2\pi) &= a_{11} f_1(\theta) + a_{12} f_2(\theta) + \ldots + a_{1m} f_m(\theta),\\
f_2(\theta + 2\pi) &= a_{21} f_1(\theta) + a_{22} f_2(\theta) + \ldots + a_{2m} f_m(\theta),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f_m(\theta + 2\pi) &= a_{m1} f_1(\theta) + a_{m2} f_2(\theta) + \ldots + a_{mm} f_m(\theta),
\end{aligned}$$

et nous voulons calculer les coefficients a. Pour obtenir

$$a_{11}, \quad a_{12}, \quad \ldots, \quad a_{1m},$$

nous considérerons les m équations

$$\begin{aligned}
f_1(\theta + 2\pi) &= a_{11} f_1(\theta) + a_{12} f_2(\theta) + \ldots + a_{1m} f_m(\theta),\\
f'_1(\theta + 2\pi) &= a_{11} f'_1(\theta) + a_{12} f'_2(\theta) + \ldots + a_{1m} f'_m(\theta),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f_1^{(m-1)}(\theta + 2\pi) &= a_{11} f_1^{(m-1)}(\theta) + a_{12} f_2^{(m-1)}(\theta) + \ldots + a_{1m} f_m^{(m-1)}(\theta).
\end{aligned}$$

Pour une valeur particulière, d'ailleurs arbitraire, donnée à θ, nous aurons un système d'équations du premier degré déterminant $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m}$. Le déterminant de ces inconnues ne sera d'ailleurs pas nul, puisque nous sommes parti de m solutions formant un système fondamental. On aura donc ainsi tous les coefficients de la substitution, en calculant de la même manière les autres lignes formées par les a.

26. La méthode précédente nous permet de faire une importante remarque sur la nature analytique des coefficients de la substitution que nous venons de calculer. Supposons que les coefficients de l'équation

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m y = 0$$

soient des fractions rationnelles de x, et, après avoir décomposé ces fractions en éléments simples $\sum \frac{A_{ik}}{(x-a_i)^k}$, considérons comme des paramètres les coefficients A_{ik} des différents termes. Il résulte immédiatement de ce que nous avons vu (p. 88 de ce Volume) que les intégrales

$$f_1(\theta), \quad f_2(\theta), \quad \ldots, \quad f_m(\theta)$$

du paragraphe précédent, *considérées comme fonctions des paramètres* A, *sont des fonctions entières de ces quantités*. Il en résulte que *les coefficients de la substitution correspondant à un chemin fermé quelconque sont des fonctions méromorphes des* A *pour toutes les valeurs de ces paramètres* (¹).

27. Définissons, pour terminer ce Chapitre, ce qu'on entend par

(¹) M. Poincaré démontre le même théorème dans son Mémoire *Sur les groupes des équations linéaires* (*Acta mathematica*, t. IV, p. 212) en s'appuyant sur les théorèmes généraux relatifs aux équations aux dérivées partielles. La méthode de calcul que nous avons suivie fait connaître immédiatement, comme on vient de voir, la nature analytique des coefficients de la substitution; on verrait d'ailleurs très facilement que la marche suivie au paragraphe 24 conduit au même résultat. On trouvera d'autres méthodes pour la recherche qui vient de nous occuper dans les Mémoires de M. Hamburger (*Journal de Crelle*, t. 83) et de M. Mittag-Leffler (*Acta mathematica*, t. XV). *Voir* aussi le *Traité d'Analyse* de M. Jordan (t. III, p. 187), mon article cité page 276 et deux Mémoires de M. von Koch (*Acta mathematica*, t. XV et XVI).

groupe d'une équation linéaire. Soit une équation linéaire à coefficients uniformes ayant dans tout le plan un nombre limité de points singuliers. Considérons un système fondamental d'intégrales

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_m$$

définies dans une certaine région du plan à contour simple, ne comprenant aucun point singulier. Quand le point z, partant d'un point de cette région, y revient après avoir décrit un contour quelconque, on a, au lieu de $y_1, y_2, \ldots, y_m$, m autres intégrales de la forme

$$(\mathrm{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1m}y_m, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2m}y_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mm}y_m, \end{array} \right.$$

les a étant des constantes. L'ensemble des substitutions (S) à effectuer sur $y_1, y_2, \ldots, y_m$ pour trouver toutes les valeurs prises par ces intégrales en un point z, quel que soit le chemin suivi, s'appelle le *groupe de l'équation différentielle*. Toutes ces substitutions forment bien un groupe; car, si l'on prend deux quelconques d'entre elles, la substitution obtenue en effectuant sur les y d'abord la première, puis la seconde, appartient encore au groupe, puisqu'elle correspond au chemin total formé par les deux chemins, répondant aux deux substitutions initiales, parcourus successivement dans l'ordre indiqué. On désigne sous le nom de *produit* de deux substitutions la substitution résultant de la composition des deux substitutions, effectuée comme il vient d'être dit.

Si nous désignons par S et S' les deux substitutions, nous désignerons leur produit par

$$\mathrm{SS'},$$

en entendant qu'on fait d'abord la substitution S et ensuite la substitution S'. L'ordre des facteurs du produit n'est pas indifférent, et le produit précédent ne sera pas, en général, égal au produit

$$\mathrm{S'S},$$

qui correspondrait à la substitution S', effectuée d'abord, suivie de la substitution S.

Puisque les points singuliers sont en nombre fini, tout chemin

partant d'un point et y revenant se ramènera à une succession de chemins tournant autour des divers points singuliers, et, par suite, toute substitution du groupe pourra s'obtenir à l'aide d'un certain nombre de substitutions

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_n.$$

Elle sera donc de la forme

$$S_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2} \ldots S_1^{\beta_1} S_2^{\beta_2} \ldots,$$

qui correspond à la substitution S_1 effectuée α_1 fois, suivie de la substitution S_2 effectuée α_2 fois, et ainsi de suite, pour revenir à la substitution S_1 effectuée β_1 fois, etc.

Remarquons que le groupe d'une équation différentielle n'est pas absolument déterminé. Nous venons de partir d'un certain système fondamental, ce qui nous a donné un groupe. En partant d'un autre système fondamental, on aurait obtenu un autre groupe; mais il est clair que ces deux groupes sont étroitement liés l'un à l'autre. Chaque substitution du second groupe se déduit, en effet, aisément d'une substitution du premier. Soit Σ la substitution permettant de passer du premier système fondamental au second; toute substitution du second groupe sera de la forme

$$\Sigma S \Sigma^{-1},$$

S désignant une substitution du premier groupe, et Σ^{-1} étant la subtitution inverse de Σ.

Nous avons déjà, d'ailleurs, donné au Tome II quelques indications au sujet des groupes des substitutions linéaires.

CHAPITRE XII.

DES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES.

I. — Le problème de Riemann et le groupe de la fonction correspondante [1].

1. En reprenant, après Euler et Gauss, l'étude des séries hypergéométriques, Riemann se pose un problème qui est étroitement lié à la théorie des équations différentielles linéaires, et qui sera pour nous une application des théories générales exposées dans le Chapitre précédent.

Nous allons nous proposer de trouver une fonction jouissant des propriétés suivantes : elle est uniforme et continue dans le voisinage de tout point du plan, y compris le point à l'infini, à l'exception de *trois* points singuliers a, b, c; de plus, entre trois déterminations de la fonction en un même point, existe une relation homogène et linéaire à coefficients constants; enfin, la nature de deux déterminations linéairement indépendantes est donnée comme il suit dans le voisinage de chaque point singulier. Dans le voisinage de a, on a deux déterminations linéairement indépendantes de la forme

$$(x-a)^{\alpha} f_1(x), \quad (x-a)^{\alpha'} f_2(x),$$

f_1 et f_2 étant holomorphes dans le voisinage de a, et ne s'annulant pas pour $x = a$. On a de même, pour le voisinage de b, deux déterminations analogues en remplaçant seulement les exposants α et α' par β et β', et enfin, pour le point singulier c, on aura les exposants γ et γ'.

[1] B. Riemann. *Beiträge zur Theorie der durch die Gaussische Reihe* F$(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *darstellbaren Functionen* [*Werke*, ou traduction française, p. 61 (Gauthier-Villars)]

Nous allons voir dans un moment que la somme

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma'$$

ne peut être arbitraire, et qu'elle doit se réduire nécessairement à un entier. Nous achèverons de fixer l'énoncé du problème en ajoutant que *cette somme se réduit à l'unité*.

Nous pouvons, sans nuire à la généralité, supposer $a = 0$, $b = 1$, $c = \infty$ $\left(\text{on doit remplacer seulement } x - c \text{ par } \frac{1}{x}\right)$.

2. Désignons alors par y_1 et y_2 deux déterminations linéairement indépendantes de la fonction cherchée y. Celle-ci satisfait évidemment à l'équation linéaire du second ordre

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2y}{dx^2} & \frac{dy}{dx} & y \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} & \frac{dy_1}{dx} & y_1 \\ \frac{d^2y_2}{dx^2} & \frac{dy_2}{dx} & y_2 \end{vmatrix} = 0,$$

que nous écrirons sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0.$$

Nous allons étudier la nature des coefficients p et q. Nous avons

$$p = -\frac{y_2\frac{d^2y_1}{dx^2} - y_1\frac{d^2y_2}{dx^2}}{y_2\frac{dy_1}{dx} - y_1\frac{dy_2}{dx}}, \qquad q = \frac{\frac{dy_2}{dx}\frac{d^2y_1}{dx_2} - \frac{dy_1}{dx}\frac{d^2y_2}{dx^2}}{y_2\frac{dy_1}{dx} - y_1\frac{dy_2}{dx}}.$$

Considérons le produit

$$(1) \qquad \left(y_2\frac{dy_1}{dx} - y_1\frac{dy_2}{dx}\right)x^{-\alpha-\alpha'+1}(1-x)^{-\beta-\beta'+1}$$

et étudions-le dans le voisinage des trois points singuliers. Puisque le premier facteur se reproduit à un facteur constant près, quand on met à la place de y_1 et y_2 une combinaison linéaire de ces mêmes fonctions, nous pouvons supposer que y_1 et y_2 représentent les deux déterminations dont la forme analytique est connue dans le voisinage de chaque point singulier. Or, soit d'abord le point singulier $x = 0$;

on prendra

$$y_1 = x^{\alpha} f_1(x), \qquad y_2 = x^{\alpha'} f_2(x) \qquad [f_1(0) f_2(0) \neq 0].$$

Il résulte de là que l'expression (1) sera holomorphe dans le voisinage de $x = 0$. Il en est de même pour $x = 1$. Passons au point à l'infini; on peut prendre pour x très grand

$$y_1 = \left(\frac{1}{x}\right)^{\gamma} F_1(x), \qquad y_2 = \left(\frac{1}{x}\right)^{\gamma'} F_2(x),$$

F_1 et F_2 étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$. En substituant dans l'expression (1), celle-ci se présente sous la forme

$$x^{1-\alpha-\alpha'-\beta-\beta'-\gamma-\gamma'} \psi(x),$$

$\psi(x)$ étant holomorphe dans le voisinage du point à l'infini. La fonction (1), étant holomorphe pour tout point à distance finie, sera uniforme autour du point à l'infini et, par suite, la somme

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma'$$

se réduit nécessairement à un entier positif ou négatif.

Il n'est pas possible d'admettre que la somme précédente soit un entier supérieure *un*, car l'expression (1), étant alors holomorphe dans tout le plan, même à l'infini, serait une constante, et, comme elle serait nulle pour $x = \infty$, elle serait identiquement nulle et nous aurions, par suite,

$$y_2 \frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dy_2}{dx} = 0,$$

ce qui entraîne $\frac{y_2}{y_1} = \text{const.}$, conclusion contradictoire avec nos hypothèses.

Nous adopterons, comme nous l'avons dit, l'hypothèse

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1.$$

L'expression (1), étant holomorphe dans tout le plan, même à l'infini, se réduit encore à une constante, et celle-ci n'est pas nulle pour la raison que nous venons de dire.

3. Nous pouvons étudier de la même manière l'expression

$$\left(y_2 \frac{d^2 y_1}{dx^2} - y_1 \frac{d^2 y_2}{dx^2}\right) x^{-\alpha-\alpha'+1} (1-x)^{-\beta-\beta'+1}.$$

Elle a pour pôles simples les points $x = 0$ et $x = 1$ et n'a pas d'autre singularité à distance finie.

Dans le voisinage de $x = \infty$, elle est de la forme

$$\frac{1}{x}\chi(x),$$

$\chi(x)$ étant une série entière en $\frac{1}{x}$. Elle se réduit donc à une fraction rationnelle ayant pour pôles simples $x = 0$ et $x = 1$ à distance finie et s'annulant pour $x = \infty$: elle est, par suite, de la forme

$$\frac{Ax + B}{x(x-1)},$$

A et B étant des constantes.

En étudiant de la même manière le produit

$$\left(\frac{dy_2}{dx}\frac{d^2y_1}{dx^2} - \frac{dy_1}{dx}\frac{d^2y_2}{dx^2}\right)x^{-\alpha-\alpha'+1}(1-x)^{-\beta-\beta'+1},$$

dans le voisinage des points 0, 1 et ∞, on reconnaît qu'il se réduit à une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{Cx^2 + Dx + E}{x^2(x-1)^2}.$$

De là, nous concluons que la fonction cherchée y satisfait à une équation de la forme

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Ax + B}{x(x-1)}\frac{dy}{dx} + \frac{Cx^2 + Dx + E}{x^2(x-1)^2}y = 0,$$

A, B, C, D, E étant des constantes qu'il reste à déterminer. Cette détermination sera facile en écrivant qu'il y a, dans le voisinage des points singuliers, des intégrales de la forme indiquée. Nous simplifierons le calcul en supposant

$$\alpha' = \beta' = 0,$$

ce qui ne diminue en rien la généralité du problème, puisque ceci revient à envisager, au lieu de la fonction y, la fonction

$$yx^{-\alpha'}(1-x)^{-\beta'}.$$

Nous supposons donc $\alpha' = \beta' = 0$, et il nous reste quatre constantes

α, β, γ et γ' liées par la relation

$$\alpha + \beta + \gamma + \gamma' = 1.$$

L'équation fondamentale déterminante relative au point $x = 0$ est, pour l'équation (2) qui a ses intégrales régulières en ce point,

$$r(r-1) - \mathrm{B}r + \mathrm{E} = 0.$$

Elles doivent être égales à *zéro* et à α. On a donc

$$\mathrm{E} = 0, \qquad \mathrm{B} = \alpha - 1.$$

Pareillement, l'équation fondamentale déterminante relative au point $x = 1$ est

$$r(r-1) + (\mathrm{A} + \mathrm{B})r + \mathrm{C} + \mathrm{D} = 0.$$

Elle a pour racines *zéro* et β. On a donc

$$\mathrm{C} + \mathrm{D} = 0, \qquad \mathrm{A} = 2 - \alpha - \beta.$$

Il ne nous reste plus que la constante C à déterminer; nous avons l'équation

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + (\mathrm{A}x + \mathrm{B})\frac{dy}{dx} + \mathrm{C}y = 0.$$

Posons $y = x^r\psi(x)$, $\psi(x)$ étant une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$, et substituons dans l'équation différentielle. En égalant à zéro le coefficient du terme de degré le plus élevé en x, nous avons de suite l'équation en r

$$r(r-1) + \mathrm{A}r + \mathrm{C} = 0.$$

Cette équation doit avoir pour racines $-\gamma$ et $-\gamma'$. On aura donc

$$\mathrm{C} = \gamma\gamma',$$

et il faut vérifier que l'on a

$$1 - \mathrm{A} = -\gamma - \gamma',$$

ce qui a bien lieu, car cette relation, en remplaçant A par sa valeur trouvée plus haut, revient à

$$\alpha + \beta + \gamma + \gamma' = 1.$$

Nous avons donc finalement l'équation

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}+[(2-\alpha-\beta)x+\alpha-1]\frac{dy}{dx}+\gamma\gamma'y=0.$$

C'est, avec un changement seulement dans les notations, *l'équation différentielle à laquelle satisfait la série hypergéométrique* (Chap. XI, § 14).

Si, au lieu de supposer $\alpha'=\beta'=0$, nous les avions laissés arbitraires, nous aurions obtenu par un calcul tout semblable l'équation du second ordre correspondant au cas général, qu'il est inutile d'écrire. Remarquons seulement que cette équation n'aura d'intégrales de la forme voulue que si aucune des différences

$$\alpha-\alpha',\quad \beta-\beta',\quad \gamma-\gamma'$$

n'est un nombre entier. C'est d'ailleurs une hypothèse que Riemann fait explicitement dans son Mémoire. Nous savons, d'après les généralités du Chapitre précédent, que des logarithmes s'introduiraient dans la forme des intégrales si quelqu'une de ces différences était entière.

4. Reprenant, pour plus de symétrie, les six exposants α, α', β, β', γ, γ' correspondant aux points singuliers a, b, c, désignons par

$$P_\alpha \quad \text{et} \quad P_{\alpha'}$$

les deux solutions de la forme indiquée dans le voisinage de $x=a$; chacune d'elles est déterminée seulement à un facteur près. Soient pareillement

$$P_\beta \quad \text{et} \quad P_{\beta'} \qquad \text{puis} \qquad P_\gamma \quad \text{et} \quad P_{\gamma'}$$

Fig. 15.

les solutions correspondant aux points b et c. Traçons dans le plan un contour fermé Γ (un cercle, par exemple), passant par les trois points a, b, c (*fig.* 15). Les six fonctions

$$P_\alpha,\quad P_{\alpha'},\quad P_\beta,\quad P_{\beta'},\quad P_\gamma,\quad P_{\gamma'}$$

sont holomorphes à l'intérieur de Γ et à l'extérieur de cette courbe, puisque dans tout le plan, y compris le point à l'infini, elles ont seulement pour points singuliers les trois points a, b, c.

Considérons les fonctions précédentes à l'intérieur de Γ. On doit avoir entre elles des relations de la forme

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} P_\alpha &= a_\beta P_\beta + a_{\beta'} P_{\beta'},\\ P_{\alpha'} &= a'_\beta P_\beta + a'_{\beta'} P_{\beta'},\\ P_\alpha &= a_\gamma P_\gamma + a_{\gamma'} P_{\gamma'},\\ P_{\alpha'} &= a'_\gamma P_\gamma + a'_{\gamma'} P_{\gamma'},\end{aligned}\right.$$

les coefficients a étant des constantes. Considérons les quotients de deux coefficients de même indice inférieur; de ces quatre quotients

$$(4)\qquad \frac{a_\beta}{a'_\beta},\quad \frac{a_{\beta'}}{a'_{\beta'}},\quad \frac{a_\gamma}{a'_\gamma},\quad \frac{a_{\gamma'}}{a'_{\gamma'}},$$

trois doivent être déterminés en fonction du quatrième, puisque les six fonctions P sont déterminées chacune à un facteur constant près. C'est cette détermination que nous allons effectuer avec Riemann.

Quelle que soit la détermination considérée, on a deux chemins équivalents en tournant une fois autour du point c dans le sens *positif*, et en tournant successivement autour de a et b dans le sens négatif. Prenons par exemple P_α; quand la variable tourne une fois dans le sens positif autour de c, P_α se change en

$$a_\gamma e^{2\pi i\gamma} P_\gamma + a_{\gamma'} e^{2\pi i\gamma'} P_{\gamma'},$$

comme le montre de suite l'expression de P_α en fonction de P_γ et $P_{\gamma'}$; quand la variable tourne successivement autour de a et b dans le sens négatif, P_α se change en

$$e^{-2\alpha\pi i}(a_\beta e^{-2\beta\pi i} P_\beta + a_{\beta'} e^{-2\beta'\pi i} P_{\beta'}).$$

On a, par suite, la relation

$$a_\gamma e^{2\gamma\pi i} P_\gamma + a_{\gamma'} e^{2\gamma'\pi i} P_{\gamma'} = e^{-2\alpha\pi i}(a_\beta e^{-2\beta\pi i} P_\beta + a_{\beta'} e^{-2\beta'\pi i} P_{\beta'}),$$

à laquelle nous adjoignons l'égalité

$$a_\gamma P_\gamma + a_{\gamma'} P_{\gamma'} = a_\beta P_\beta + a_{\beta'} P_{\beta'}.$$

On a deux relations analogues en remplaçant α par α' et les coefficients a par les coefficients a'. En éliminant P_γ et $P_{\gamma'}$ entre ces quatre

relations, on aura deux relations homogènes et linéaires entre P_β et $P_{\beta'}$, et, par suite, dans ces dernières, les coefficients de P_β et $P_{\beta'}$ seront nuls, ce qui va nous donner quatre équations entre les a.

Un calcul très facile donne ainsi les quatre équations

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{a_\gamma}{a'_\gamma} = \dfrac{a_\beta}{a'_\beta}\,\dfrac{e^{-\alpha\pi i}\sin(\alpha+\beta+\gamma')\pi}{e^{-\alpha'\pi i}\sin(\alpha'+\beta+\gamma')\pi} = \dfrac{a_{\beta'}}{a'_{\beta'}}\,\dfrac{e^{-\alpha\pi i}\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi}{e^{-\alpha'\pi i}\sin(\alpha'+\beta'+\gamma')\pi}, \\[2ex] \dfrac{a_{\gamma'}}{a'_{\gamma'}} = \dfrac{a_\beta}{a'_\beta}\,\dfrac{e^{-\alpha\pi i}\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi}{e^{-\alpha'\pi i}\sin(\alpha'+\beta+\gamma)\pi} = \dfrac{a_{\beta'}}{a'_{\beta'}}\,\dfrac{e^{-\alpha\pi i}\sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi}{e^{-\alpha'\pi i}\sin(\alpha'+\beta'+\gamma)\pi}. \end{cases}$$

Ces quatre relations se réduisent à trois, comme ce doit être, d'après ce que nous avons dit plus haut. On trouve, en effet, deux fois la valeur du quotient

$$\frac{a_\beta}{a'_\beta} : \frac{a_{\beta'}}{a'_{\beta'}}.$$

La comparaison de ces valeurs donne

$$\frac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi\,\sin(\alpha'+\beta+\gamma')\pi}{\sin(\alpha+\beta+\gamma')\pi\,\sin(\alpha'+\beta'+\gamma')\pi} = \frac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi\,\sin(\alpha'+\beta+\gamma)\pi}{\sin(\alpha'+\beta'+\gamma)\pi\,\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi},$$

équation qui est bien vérifiée, à cause de l'égalité

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma' = 1.$$

5. *La recherche précédente conduit à la détermination du groupe de l'équation.* Remarquons d'abord que, si l'on a un système de nombres a satisfaisant aux relations (5), il y aura certainement six déterminations

$$(6)\qquad P_\alpha,\quad P_{\alpha'},\quad P_\beta,\quad P_{\beta'},\quad P_\gamma,\quad P_{\gamma'}$$

de la fonction, ayant la forme indiquée autour des points singuliers et satisfaisant aux relations (3). En effet, en multipliant les six déterminations précédentes par six constantes arbitraires, on peut faire que les coefficients, remplaçant les a, aient telles valeurs que l'on veut, pourvu que les rapports des quotients (4), correspondant aux nouveaux coefficients, aient les mêmes valeurs que pour les anciens. Nous pouvons donc considérer que nous avons un système de déterminations (6) répondant aux relations (3), où les coefficients a sont arbitraires, sauf qu'ils satisfont aux relations (5). Si alors nous nous attachons aux deux solutions

$$P_\alpha,\quad P_{\alpha'},$$

qui forment un système fondamental, il est facile de trouver les substitutions correspondant à une rotation de la variable autour des points a et b. Pour le point a, nous avons immédiatement la substitution, puisque P_α et $P_{\alpha'}$ deviennent respectivement

$$e^{2\pi i\alpha} P_\alpha \quad \text{et} \quad e^{2\pi i\alpha'} P_{\alpha'}.$$

Quant à la seconde rotation, nous trouverons la substitution correspondante en prenant P_α et $P_{\alpha'}$ sous la forme donnée par les deux premières des formules (3). Alors, nous voyons que P_α et $P_{\alpha'}$ deviennent respectivement, pour une rotation positive autour du point b,

$$(6)' \qquad \begin{cases} a_\beta e^{2\pi i\beta} P_\beta + a_{\beta'} e^{2\pi i\beta'} P_{\beta'}, \\ a'_\beta e^{2\pi i\beta} P_\beta + a'_{\beta'} e^{2\pi i\beta'} P_{\beta'}. \end{cases}$$

Remplaçons alors P_β et $P_{\beta'}$ par leurs valeurs en P_α et $P_{\alpha'}$, nous aurons la substitution cherchée. Pour faire ce calcul le plus rapidement, écrivons

$$P_\alpha = a_\beta P_\beta + a_{\beta'} P_{\beta'},$$
$$P_{\alpha'} = \lambda a_\beta P_\beta + \lambda' a_{\beta'} P_{\beta'},$$

en posant

$$\lambda = \frac{a'_\beta}{a_\beta}, \qquad \lambda' = \frac{a'_{\beta'}}{a_{\beta'}};$$

on aura, pour les expressions (6),

$$P_\alpha \frac{\lambda' e^{2\pi i\beta} - \lambda e^{2\pi i\beta'}}{\lambda' - \lambda} + P_{\alpha'} \frac{e^{2\pi i\beta'} - e^{2\pi i\beta}}{\lambda' - \lambda},$$
$$P_\alpha \frac{\lambda\lambda'(e^{2\pi i\beta} - e^{2\pi i\beta'})}{\lambda' - \lambda} + P_{\alpha'} \frac{\lambda' e^{2\pi i\beta'} - \lambda e^{2\pi i\beta}}{\lambda' - \lambda}.$$

Le rapport $\frac{\lambda}{\lambda'}$ est donné par les formules (5) en fonction des α, β, γ. Il reste donc seulement, dans cette substitution, une constante arbitraire. Il devait bien en être ainsi, puisque P_α et $P_{\alpha'}$ sont déterminés seulement à un facteur constant près. Pour avoir des substitutions entièrement déterminées, posons

$$(\lambda' - \lambda) P_\alpha = u,$$
$$P_{\alpha'} = v.$$

La rotation autour du point a donnera la substitution

$$(\Sigma_1) \qquad \begin{cases} u' = e^{2\pi i\alpha} u, \\ v' = e^{2\pi i\alpha'} v. \end{cases}$$

La rotation autour du point b donnera la substitution

$$(\Sigma_2)\quad \begin{cases} u' = \dfrac{\lambda' e^{2\pi i\beta} - \lambda e^{2\pi i\beta'}}{\lambda' - \lambda}\, u + (e^{2\pi i\beta'} - e^{2\pi i\beta})\, v, \\[2ex] v' = \dfrac{\lambda\lambda'(e^{2\pi i\beta} - e^{2\pi i\beta'})}{(\lambda' - \lambda)^2}\, u + \dfrac{\lambda' e^{2\pi i\beta'} - \lambda e^{2\pi i\beta}}{\lambda' - \lambda}\, v. \end{cases}$$

Nous n'avons plus maintenant, dans les substitutions (Σ_1) et (Σ_2), aucune indéterminée, puisque $\frac{\lambda'}{\lambda}$ est connu et égal à

$$\frac{\sin(\alpha + \beta' + \gamma')\pi \sin(\alpha' + \beta + \gamma')\pi}{\sin(\alpha' + \beta' + \gamma')\pi \sin(\alpha + \beta + \gamma')\pi}.$$

Par suite, nous pouvons regarder les deux substitutions Σ_1 et Σ_2 comme les deux substitutions fondamentales du groupe de l'équation différentielle hypergéométrique prise sous sa forme la plus générale.

Nous voyons donc comment les considérations développées par Riemann permettent de trouver facilement le *groupe* de l'équation différentielle hypergéométrique. Après avoir étudié l'expression des fonctions P sous forme d'intégrales définies, nous aurons à revenir, dans la Section suivante, sur ce groupe, en le donnant sous une forme plus simple que celle que nous venons d'obtenir.

La méthode suivie par Riemann n'en reste pas moins la plus intéressante, puisque les principales propriétés de la fonction sont déduites uniquement de sa nature au voisinage des points singuliers, sans recourir à aucune représentation effective de cette fonction.

On retrouve, dans les quelques pages du petit Mémoire de l'illustre auteur, l'esprit original et profond, excellant à prendre les questions de haut, que nous avons déjà eu l'occasion d'admirer dans la théorie des intégrales abéliennes.

II. — Intégrales hypergéométriques.

6. Appelons *intégrale hypergéométrique* une intégrale de la forme

$$y = \int_g^h (u - a_1)^{b_1 - 1}(u - a_2)^{b_2 - 1}(u - x)^{\lambda - 1}\, du$$

dont les limites g et h sont deux des quantités a_1, a_2 et ∞. On suppose, bien entendu, que l'intégrale a un sens. Si donc, par exemple, on prend l'infini pour une des limites, c'est que l'on a

$$b_1 + b_2 + \lambda < 2.$$

L'intégrale considérée est une fonction de x et satisfait à une équation différentielle, que nous allons former. Posons

$$U = (u - a_1)^{b_1 - 1}(u - a_2)^{b_2 - 1}.$$

Nous aurons, en appliquant la règle de différentiation sous le signe d'intégration,

$$\frac{dy}{dx} = -(\lambda - 1)\int_g^h U(u - x)^{\lambda - 2}\,du,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)\int_g^h U(u - x)^{\lambda - 3}\,du.$$

Cela étant, considérons la fonction

$$G(u) = (u - a_1)^{b_1}(u - a_2)^{b_2}(u - x)^{\lambda - 2};$$

elle s'annule pour les limites g et h que l'on a choisies, du moment que, pour ces limites, l'intégrale a un sens. Calculons la différentielle de $G(u)$: si l'on pose, pour abréger,

$$f(u) = (u - a_1)(u - a_2),$$
$$\varphi(u) = b_1(u - a_2) + b_2(u - a_1),$$

il vient

$$dG(u) = U\,\varphi(u)(u - x)^{\lambda - 2}\,du + (\lambda - 2)\,U f(u)(u - x)^{\lambda - 3}\,du.$$

D'autre part,

$$f(u) = f(x) + (u - x)f'(x) + \frac{(u - x)^2}{2}f''(x),$$
$$\varphi(u) = \varphi(x) + (u - x)\varphi'(x).$$

On a alors

$$\begin{aligned}(\lambda - 1)\,dG(u) = {} & (\lambda - 1)(\lambda - 2)f(x)\,U(u - x)^{\lambda - 3}\,du \\ & + (\lambda - 1)U[\varphi(x) + (\lambda - 2)f'(x)](u - x)^{\lambda - 2}\,du \\ & + U\left[(\lambda - 1)\varphi'(x) + \frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)}{2}f''(x)\right](u - x)^{\lambda - 1}\,du.\end{aligned}$$

En intégrant les deux membres de cette identité entre g et h, et se

reportant aux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$, on trouve

$$\left[(\lambda-1)\varphi'(x)+\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2}f''(x)\right]y$$
$$-[\varphi(x)+(\lambda-2)f'(x)]\frac{dy}{dx}+f(x)\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

Telle est donc l'équation linéaire de second ordre à laquelle satisfont les fonctions y.

Dans le cas où l'on fait

$$a_1=0, \qquad a_2=1,$$

et de plus

$$\lambda=1-\alpha, \qquad b_1=1+\alpha-\gamma, \qquad b_2=\gamma-\beta,$$

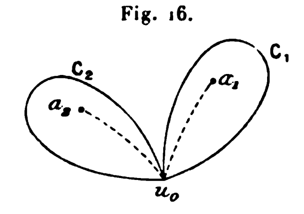
on a l'équation différentielle

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-x(\alpha+\beta+1)]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0,$$

qui est l'équation hypergéométrique, sous la forme considérée par Gauss.

7. Nous avons supposé dans ce qui précède les constantes b_1, b_2, λ telles qu'une intégrale de la forme indiquée ait une valeur déterminée. On aura dans tous les cas une intégrale de l'équation diffé-

Fig. 16.



rentielle en procédant de la manière suivante : Partons du point u_0 (distinct de a_1, a_2 et ∞), en donnant à l'expression

$$(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}$$

une de ses déterminations, et prenons l'intégrale

$$(7) \qquad \int (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

en décrivant dans un certain sens un contour C_1 autour de a_1, puis un contour C_2 autour de a_2, ensuite le contour C_1, mais en sens inverse, et enfin le contour C_2 également en sens inverse (*fig.* 16). La fonction $G(u)$, considérée ci-dessus, reprendra évidemment la même valeur quand u reviendra en u_0 après avoir décrit le contour complexe qui précède, et, par suite, nous aurons une solution de l'équation différentielle en prenant l'intégrale le long de ce contour. Si l'on suppose que l'intégrale (7) reste finie pour $u = a_1$ et $u = a_2$, on retrouvera bien ainsi l'intégrale du paragraphe 6. Soient, en effet,

$$U_{a_1} \quad \text{et} \quad U_{a_2}$$

les intégrales (7), prises de u_0 en a_1 et de u_0 en a_2, avec la valeur initiale choisie pour la fonction sous le signe d'intégration. L'intégrale correspondant au contour complexe sera

$$\begin{gathered} U_{a_1}(1 - e^{2\pi b_1 i}) + U_{a_2} e^{2\pi b_1 i}(1 - e^{2\pi b_2 i}) \\ + U_{a_1} e^{2\pi(b_1+b_2)i}(1 - e^{-2\pi b_1 i}) + U_{a_2} e^{2\pi b_2 i}(1 - e^{-2\pi b_2 i}), \end{gathered}$$

c'est-à-dire

$$(U_{a_1} - U_{a_2})(1 - e^{2\pi b_1 i})(1 - e^{2\pi b_2 i}),$$

et la différence $U_{a_1} - U_{a_2}$ représente précisément l'intégrale (7) prise de a_2 en a_1.

8. Nous avons, au paragraphe 6, donné aux limites g et h les valeurs a_1, a_2 et ∞; on peut aussi donner à ces limites la valeur x. Démontrons-le en supposant que les différentes intégrales obtenues en donnant à g et h deux des valeurs

$$a_1, \quad a_2, \quad x, \quad \infty$$

aient un sens; la proposition sera évidemment générale. Il faudra seulement recourir, dans le cas contraire, aux intégrales considérées dans le paragraphe précédent. Prenons encore un point arbitraire u_0 et traçons les lignes

$$u_0 a_1, \quad u_0 x, \quad u_0 a_2, \quad u_0 \infty,$$

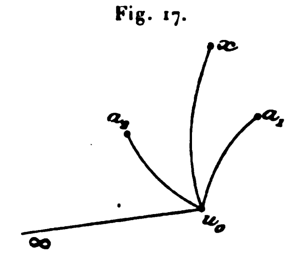
ces lignes se suivant autour de u_0 dans l'ordre qui vient d'être indiqué (*fig.* 17). En désignant par

$$U_{a_1}, \quad U_x, \quad U_{a_2}, \quad U_\infty$$

les valeurs de l'intégrale (7) prise de u_0 en a_1, x, a_2 et ∞ avec une même valeur initiale pour la fonction sous le signe d'intégration, nous aurons, comme à la page 226 (t. II),

$$(1 - e^{2b_1\pi i}) U_{a_1} + (e^{2b_1\pi i} - e^{2(b_1+\lambda)\pi i}) U_x + (e^{2(b_1+\lambda)\pi i} - e^{2(b_1+b_2+\lambda)\pi i}) U_{a_2} + (e^{2(b_1+b_2+\lambda)\pi i} - 1) U_\infty = 0.$$

Fig. 17.



Cette formule montre immédiatement que

$$U_x - U_{a_1}$$

s'exprime par une combinaison linéaire et homogène de

$$U_{a_1} - U_{a_2}, \quad U_{a_2} - U_\infty, \quad U_\infty - U_{a_1}$$

et est, par suite, une intégrale de l'équation différentielle. Il en est de même de $U_x - U_{a_2}$ et $U_x - U_\infty$.

9. Nous avons, dans la Section I, trouvé, d'après Riemann, le groupe correspondant à l'équation différentielle du second ordre dont l'étude fait l'objet de ce Chapitre. On peut nécessairement donner au groupe différentes formes. La considération des solutions de l'équation sous forme d'intégrales conduit à une forme très simple des deux substitutions fondamentales du groupe pour deux solutions particulières bien précisées. C'est ce que nous avons montré dans le Tome II (p. 224 et suiv.). Il nous suffira donc de nous reporter à ce passage, en remplaçant seulement a et b par b_1 et b_2, et les points o et 1 par a_1 et a_2. Nous avons considéré les deux intégrales

$$\omega_1 = U_x - U_{a_1},$$
$$\omega_2 = U_x - U_{a_2}.$$

Les deux substitutions fondamentales S_1 *et* S_2 *du groupe correspondant respectivement à une circulation dans le sens négatif*

autour de a_1 et à une circulation dans le sens positif autour de a_2 sont

$$(S_1)\qquad \begin{cases} \omega'_1 = e^{-2(b_1+\lambda)\pi i}\,\omega_1, \\ \omega'_2 = \omega_2 + (e^{-2(b_1+\lambda)\pi i} - e^{-2\lambda\pi i})\,\omega_1, \end{cases}$$

$$(S_2)\qquad \begin{cases} \omega''_1 = \omega_1 + (e^{2(b_2+\lambda)\pi i} - e^{2\lambda\pi i})\,\omega_2, \\ \omega''_2 = e^{2(b_2+\lambda)\pi i}\,\omega_2. \end{cases}$$

10. Si l'on pose

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = z,$$

on pourra faire correspondre au groupe précédent un groupe linéaire relatif à z dont les substitutions fondamentales sont

$$(\Sigma_1)\qquad \left[z,\ \frac{e^{-2(b_1+\lambda)\pi i}\,z}{1 + (e^{-2(b_1+\lambda)\pi i} - e^{-2\lambda\pi i})\,z}\right],$$

$$(\Sigma_2)\qquad \left[z,\ e^{-2(b_2+\lambda)\pi i}\,z + (1 - e^{-2b_2\pi i})\right].$$

Nous allons montrer, en supposant réels λ, b_1 et b_2, qu'*on peut trouver un cercle qui est transformé en lui-même par les substitutions* (Σ_1) *et* (Σ_2).

Remarquons d'abord que, z désignant $x + iy$, l'équation d'un cercle peut se mettre sous la forme

$$A z z_0 + B z + B_0 z_0 + C = 0,$$

A et C étant des constantes réelles, B et B_0 étant des constantes imaginaires conjuguées, et z_0 désignant $x - iy$.

En écrivant que le cercle est transformé en lui-même par la substitution (Σ_1), on obtient les deux équations

$$B(1 - e^{-2b_1\pi i}) + B_0(1 - e^{+2b_1\pi i}) + C(e^{2b_1\pi i} - 1)(e^{-2b_1\pi i} - 1) = 0,$$
$$B(e^{2(b_1+\lambda)\pi i} - 1) = C(1 - e^{2b_1\pi i}),$$

et l'on voit facilement que la première est une conséquence de la seconde.

Pareillement la substitution (Σ_2) conduit aux deux équations

$$B(1 - e^{-2b_2\pi i}) + B_0(1 - e^{+2b_2\pi i}) + A(1 - e^{-2b_2\pi i})(1 - e^{2b_2\pi i}) = 0,$$
$$B(e^{2(b_2+\lambda)\pi i} - 1) = A(1 - e^{2b_2\pi i}),$$

qui se réduisent aussi à la seconde.

On a donc seulement les *deux* équations

$$B(e^{2(b_2+\lambda)\pi i}-1) = A(1-e^{2b_2\pi i}),$$
$$B(e^{2(b_1+\lambda)\pi i}-1) = C(1-e^{2b_1\pi i}).$$

Il faut qu'on puisse satisfaire à ces équations en prenant A et C réels. On voit de suite qu'il en est ainsi, car on peut remplacer la seconde équation par la suivante :

$$\frac{A}{C} = \frac{(e^{2\pi b_1 i}-1)(e^{2\pi(b_2+\lambda)i}-1)}{(e^{2\pi b_2 i}-1)(e^{2\pi(b_1+\lambda)i}-1)},$$

et l'on s'assure que le second membre est réel, en remarquant qu'il ne change pas quand on change i en $-i$.

La circonférence que nous venons de trouver peut être réelle ou imaginaire. Elle sera réelle si l'on a

$$BB_0 - AC > 0,$$

comme il résulte de l'équation du cercle, mise sous la forme

$$(Az+B_0)(Az_0+B)+AC-BB_0 = 0.$$

En substituant les valeurs trouvées pour A, B, C, cette inégalité devient

$$(e^{2\pi\lambda i}-1)(e^{2\pi b_2 i}-e^{-2\pi(b_1+\lambda)i})(1-e^{2\pi b_1 i})(1-e^{-2\pi b_2 i}) > 0.$$

Suivant la valeur numérique de λ, b_1 et b_2, le premier membre peut être tantôt positif et tantôt négatif [1].

11. Faisons encore une remarque relative aux substitutions de la forme

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right),$$

a, b, c, d étant des constantes. Une telle substitution transforme une circonférence en une circonférence; c'est ce que l'on voit de suite en mettant l'équation de la circonférence sous la forme dont nous

(1) J'ai développé les calculs que je ne fais qu'indiquer ici dans mon Mémoire *Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1885). Dans le domaine de deux variables complexes indépendantes, le cercle précédent est remplacé par une hypersphère.

nous sommes servi plus haut

$$Azz_0 + Bz + B_0 z_0 + C = 0.$$

En mettant $\frac{az+b}{cz+d}$ à la place de z, on a une équation de même forme.

III. — Représentation conforme au moyen du rapport de deux solutions de l'équation hypergéométrique.

12. Reprenons l'équation différentielle du second ordre

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0,$$

et désignons par y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de cette équation. Posons

$$\frac{y_1}{y_2} = z, \tag{8}$$

et regardons cette équation comme établissant une relation entre x et z. Pour une valeur déterminée x_0 de x, distincte de 0, 1 et ∞, supposons que z prenne la valeur z_0 (celle-ci pouvant être infinie). L'équation (8) donnera pour x une fonction de z holomorphe dans le voisinage de z_0 et prenant pour $z = z_0$ la valeur x_0. Pour le démontrer, supposons d'abord z_0 fini : l'énoncé précédent ne serait inexact que si la dérivée de $\frac{y_1}{y_2}$ et par suite

$$y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx}$$

s'annulait pour $x = x_0$. Or ceci est impossible, car il est évident que, si y_1 et y_2 désignent deux solutions distinctes de l'équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} - qy = 0,$$

on a

$$y_2\frac{dy_1}{dx} - y_1\frac{dy_2}{dx} = Ce^{-\int p\,dx},$$

C étant une constante différente de zéro, et par suite le premier

membre de l'identité précédente est différent de zéro pour une valeur de x distincte des points singuliers.

Si z_0 était infini, c'est-à-dire si y_2 s'annulait pour $x = x_0$, cette racine x_0 serait simple, l'autre intégrale y_1 ne s'annulerait pas pour cette valeur de x, et l'on aurait alors dans le voisinage de x_0

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{A}{x - x_0} + \ldots \qquad (A \neq 0)$$

les termes non écrits étant holomorphes : il est clair que l'inversion se fera d'une manière uniforme dans le voisinage de $z = \infty$.

Il résulte de la remarque précédente que, si l'on a dans le plan de la variable x une aire limitée par un contour simple et ne contenant aucun des points singuliers 0, 1 et ∞, *l'équation*

$$\frac{y_1}{y_2} = z$$

fera correspondre à cette aire dans le plan de la variable z une aire également limitée par un seul contour, et à l'intérieur de laquelle ne se trouvera pas de point critique de la fonction x de z. Il n'en faudrait pas conclure que l'on aura nécessairement ainsi deux aires se correspondant point par point; il peut arriver qu'à un point z correspondent plusieurs valeurs de x, et que par suite l'aire dans le plan z se recouvre partiellement elle-même. Il est aisé de donner un exemple simple d'une telle circonstance; prenons la relation

$$x^2 = z,$$

et dans le plan x une aire simple ne comprenant pas l'origine et telle que la symétrique par rapport à l'origine de certaines parties de l'aire soit contenue dans celle-ci. On aura comme figure correspondante dans le plan z une aire limitée par un seul contour, ne comprenant pas l'origine à son intérieur, mais qui se recouvrira partiellement elle-même, de façon qu'à certaines valeurs de z correspondront deux valeurs de x.

13. Nous allons supposer maintenant que dans l'équation différentielle α, β et γ sont *réelles*, et nous voulons chercher quelle est dans le plan z la figure correspondant au demi-plan P de la variable x

situé au-dessus de l'axe des quantités réelles [1]. Dans le demi-plan P, z est une fonction uniforme de x, puisque y_1 et y_2 n'ont comme points singuliers que les points o, 1 et ∞.

Partageons, dans le plan x, l'axe des quantités réelles en trois segments

$$-\infty,\ 0;\quad 0,\ 1;\quad 1,\ +\infty.$$

Considérons l'un de ces segments; soit, pour fixer les idées, le segment o, 1. Je suppose d'abord qu'en un point réel x_0, compris entre o et 1, on se donne des conditions initiales réelles pour les deux intégrales y_1 et y_2; celles-ci seront réelles pour x réel et compris entre o et 1 et il en sera de même du rapport

$$z = \frac{y_1}{y_2},$$

et, par suite, le point z décrira un segment de l'axe des quantités réelles dans son plan quand x variera entre *zéro* et *un*. Comme on a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y_2 \frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dy_2}{dx}}{y_2^2} = \frac{C}{y_2^2} e^{-\int \frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)} dx},$$

il en résulte que, suivant le signe de C, z ira constamment en croissant ou en décroissant quand x croîtra. Il y aura donc une correspondance bien déterminée entre le segment (o, 1) du plan x et un segment (qui pourra contenir le point à l'infini) de l'axe réel du plan z.

Si, au lieu des intégrales que nous avons considérées et qui sont réelles pour x entre zéro et un, nous avions pris deux intégrales quelconques, cherchons quelle eût été la courbe correspondant au segment (o, 1). La recherche est facile; au lieu de y_1 et y_2, nous aurions les deux intégrales

$$Py_1 + Qy_2,\quad Ry_1 + Sy_2,$$

P, Q, R, S étant des constantes, et, par suite, au lieu du rapport z

---

[1] Cette étude a été faite pour la première fois par M. Schwarz dans son célèbre Mémoire : *Ueber dienigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt* (*Journal de Crelle*, t. 75).

considéré plus haut, le rapport

$$\frac{Pz+Q}{Rz+S}.$$

Or, quand le point z décrit un segment de l'axe réel, le point $\frac{Pz+Q}{Rz+S}$ décrit un arc de la circonférence correspondant à l'axe réel. Il en résulte qu'*au segment* (o, 1) *correspond uniformément un arc de cercle.*

Reprenons donc notre question. Ayant fait choix de deux intégrales distinctes, d'ailleurs quelconques, nous posons

$$\frac{y_1}{y_2} = z,$$

et nous considérons le demi-plan P. A chacun des segments de l'axe des quantités réelles correspondent dans le plan z trois arcs de cercle. Quand x parcourt l'axe réel de $-\infty$ à $+\infty$ (en évitant seulement par des petites courbes situées au-dessus de l'axe réel les points o et 1), le point z décrit, en marchant toujours dans le même sens, les côtés d'un triangle curviligne formé d'arcs de cercle. Les trois sommets de ce triangle correspondent respectivement aux points o, 1 et ∞.

Cherchons les angles de ce triangle. Nous désignerons par a, b, c les trois constantes réelles positives

$$a = |1-\gamma|,$$
$$b = |\alpha-\beta|,$$
$$c = |\gamma-\alpha-\beta|.$$

Dans le voisinage du point $x = 0$, l'équation différentielle a deux solutions de la forme

$$y_1 = f_1(x), \qquad y_2 = x^{1-\gamma} f_2(x),$$

f_1 et f_2 étant holomorphes et différents de zéro pour $x = 0$. Il en résulte que, pour ce choix particulier d'intégrales, et par suite pour toutes (pour que l'on passe d'une détermination z à une autre par une substitution n'altérant pas les angles), l'angle des deux côtés du triangle au sommet qui correspond à $x = 0$, *compté dans l'intérieur de l'aire,* sera égal à

puisque l'argument de $x^{1-\gamma}$ varie de $(1-\gamma)\pi$ quand x est à gauche et à droite du point o sur l'axe réel. Si l'angle $a\pi$ est supérieur à 2π, l'aire du plan des z se recouvrira elle-même.

On verra de la même manière que l'angle compté dans l'intérieur de l'aire est égal à

$$c\pi$$

pour le sommet qui correspond à $x=1$, ce qui résulte de l'existence de deux intégrales de la forme

$$y_1 = f_1(x), \qquad y_2 = (x-1)^{\gamma-\alpha-\beta} f_2(x).$$

Enfin, pour le sommet correspondant à $x=\infty$, on aura l'angle

$$b\pi,$$

car on a les deux solutions, pour x très grand,

$$y_1 = x^{-\alpha} f_1(x), \qquad y_2 = x^{-\beta} f_2(x),$$

f_1 et f_2 étant holomorphes et différents de zéro pour $x=\infty$, et l'on voit alors que, dans le quotient $\frac{y_2}{y_1}$, s'introduit le facteur $x^{\alpha-\beta}$.

Ainsi nous arrivons à cette conclusion qu'*au demi-plan correspond, dans le plan z, une aire à contour simple, limitée par trois arcs de cercle;* cette aire peut se recouvrir partiellement elle-même et aussi contenir le point à l'infini.

Nous avons supposé implicitement qu'aucune des constantes a, b, c n'était égale à un entier. Prenons par exemple a et supposons que $\gamma=1$. D'après la théorie générale des points singuliers réguliers, nous aurons dans le voisinage de $x=0$ les deux intégrales

$$y_1 = f_1(x), \qquad y_2 = f_2(x) + \log x\, f_1(x).$$

Le rapport $\frac{y_2}{y_1}$ est alors de la forme

$$\log x + \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant holomorphe dans le voisinage de $x=0$ et à coefficients réels. Quand x s'approche de zéro sur le segment $(1, 0)$, z s'approche de $-\infty$ sur l'axe réel, et ensuite quand x, décrivant un demi-cercle infiniment petit pour éviter le point o, suit le segment $(0, -\infty)$, le point z décrit une parallèle à l'axe réel, d'ordonnée π, et en venant également de $-\infty$. L'angle sera donc égal à zéro.

On vérifiera de même que, si $a = 1$, l'angle des deux côtés du triangle sera égal à π, de sorte que le résultat énoncé plus haut est général.

14. Abordons maintenant un cas particulièrement intéressant où l'on aura une correspondance uniforme entre le demi-plan P et l'aire correspondante du plan z. Ce cas est celui où l'on a à la fois

$$a < 2, \qquad b < 2, \qquad c < 2.$$

Nous allons voir que l'on a alors d'une manière uniforme une représentation conforme du demi-plan sur un triangle d'arcs de cercle. Nous le montrerons bien nettement en suivant par continuité à partir d'un cas pour lequel la question ne présente aucune difficulté.

Si l'on prend, pour les trois constantes de la série hypergéométrique,

$$\alpha_0 = 0, \qquad \beta_0, \quad \gamma_0,$$

on a, pour une des intégrales, une constante, et pour l'autre

$$\int_{x_0}^{x} u^{-\gamma_0}(u-1)^{\gamma_0-\beta_0-1}\,du,$$

et cette expression peut servir à effectuer la représentation conforme du demi-plan P sur un espace limité par trois droites.

Posons, comme plus haut,

$$a_0 = |1-\gamma_0|, \qquad b_0 = |\beta_0|, \qquad c_0 = |\gamma_0 - \beta_0|.$$

Nous supposons

$$a_0 < 2, \qquad b_0 < 2, \qquad c_0 < 2,$$

de façon que les sommets ne soient pas des points de ramification. Le contour ne pourra se couper lui-même, car alors les trois droites ne limiteraient plus une aire (*voir*, pour ces questions déjà étudiées au Tome II, le Chapitre de ce Tome relatif aux représentations conformes, p. 297 et suiv.).

Si l'on a en particulier

$$\gamma_0 < 1,$$
$$\gamma_0 - \beta_0 > 0,$$

on obtiendra, en égalant l'intégrale ci-dessus à z, un triangle rectiligne tout entier, à distance finie, avec les angles

$$a_0\pi,\quad b_0\pi,\quad c_0\pi,$$

en posant alors

$$a_0 = 1 - \gamma_0,\qquad b_0 = \beta_0,\qquad c_0 = \gamma_0 - \beta_0,$$

et la somme de ces angles est bien égale à π.

Imaginons maintenant que l'on parte de ces dernières valeurs de $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$; l'équation hypergéométrique correspondante nous donne la représentation du demi-plan sur un certain triangle rectiligne. Faisons alors varier les coefficients α, β, γ à partir de ces valeurs de $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$; la représentation se fera sur un triangle d'arcs de cercle, et l'on peut supposer que les sommets restent les mêmes, puisqu'on dispose de trois constantes dans le rapport des deux intégrales. On suppose d'ailleurs que α, β, γ varient de manière que l'on ait toujours

$$a < 2,\qquad b < 2,\qquad c < 2.$$

Le triangle d'arcs de cercle est d'abord peu différent du triangle rectiligne initial. Il ne peut pas arriver que, pendant la déformation, deux côtés du triangle se coupent entre eux, car cette circonstance ne peut se présenter que si, à un certain moment, les côtés ont fait entre eux un angle égal à zéro ou à 2π; or nous pouvons faire varier α, β, γ de manière que

$$a,\quad b,\quad c$$

varient depuis leur valeur initiale a_0, b_0, c_0 jusqu'à leur valeur finale sans passer par *zéro* ou par *deux* dans l'intervalle.

Il résulte de ce qui précède que, pendant la variation continue des paramètres, *nous ne cessons pas d'avoir dans le plan z une aire simplement connexe, ne se recouvrant pas partiellement elle-même, et donnant une représentation conforme du demi-plan* P; cette aire est un triangle curviligne dont les côtés sont des arcs de cercle. Les angles intérieurs de ce triangle sont respectivement égaux à $a\pi$, $b\pi$ et $c\pi$, chacun de ces angles étant par hypothèse inférieur à 2π.

15. La question de la représentation conforme des triangles d'arcs de cercle sur un demi-plan (ou sur un cercle, ce qui revient au

même) peut être posée *a priori*, et, en analysant ce problème, on retrouve l'équation différentielle de la série hypergéométrique. Nous ne nous placerons pas à ce point de vue, qui a fait l'objet d'un Mémoire de M. Schwarz ([1]); nous allons seulement former, en partant de l'équation linéaire du second ordre qui vient d'être étudiée, l'équation différentielle du troisième ordre, à laquelle satisfait le rapport $z = \frac{y_2}{y_1}$.

Soit, d'une manière générale, l'équation linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0,$$

dont y_1 et y_2 représentent deux intégrales distinctes. Le rapport

$$z = \frac{y_2}{y_1}$$

dépend manifestement de trois constantes arbitraires, puisqu'on peut remplacer y_1 et y_2 par des combinaisons linéaires. Il satisfait donc à une équation du troisième ordre que nous allons former. Le calcul est immédiat; si l'on forme

$$\frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^2z}{dx^2}, \quad \frac{d^3z}{dx^3},$$

si l'on différentie $\frac{y_2}{y_1}$, on aura, en se servant de l'équation différentielle, les expressions de ces trois dérivées au moyen de

$$y_1, \quad y_2, \quad \frac{dy_1}{dx}, \quad \frac{dy_2}{dx}.$$

En y joignant $z = \frac{y_2}{y_1}$, on a quatre relations homogènes en y_1, y_2, $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$. L'élimination de ces quatre quantités donne alors l'équation cherchée. On trouve ainsi

$$\frac{2\frac{dz}{dx}\frac{d^3z}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2}{2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = 2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx}.$$

([1]) H.-A. Schwarz, *Ueber einige Abbildungsaufgaben* (*Journal de Crelle*, t. 75). M. Darboux a consacré un très intéressant Chapitre à ces questions dans le Tome I de ses *Leçons sur la Théorie des surfaces*, p. 170.

Dans le cas de l'équation hypergéométrique, le second membre se réduit à

$$\frac{1-a^2}{2x^2}+\frac{1-c^2}{2(1-x)^2}-\frac{a^2-b^2+c^2-1}{2x(1-x)},$$

en posant, comme nous l'avons fait précédemment,

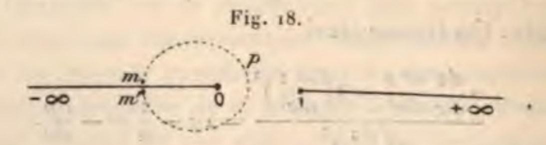
$$a^2=(1-\gamma)^2, \qquad b^2=(\alpha-\beta)^2, \qquad c^2=(\gamma-\alpha-\beta)^2.$$

Ceci nous explique pourquoi les quantités qu'on peut supposer positives a, b, c jouent seules un rôle dans les questions relatives au rapport $\frac{y_2}{y_1}$, comme nous l'avons constaté plus haut.

16. Nous avons obtenu (§ **14**) la représentation conforme du demi-plan sur un triangle formé par trois arcs de cercle, au moyen du quotient de deux intégrales de l'équation hypergéométrique. Nous allons passer de là facilement à une représentation du plan tout entier sur lequel sont tracées deux coupures.

Supposons d'abord que la représentation du demi-plan P ait été faite au moyen du rapport de deux intégrales réelles sur le segment $(0, 1)$. Traçons sur le plan la coupure $(-\infty, 0)$ et la coupure $(1, +\infty)$ que le point x ne va pas franchir. Dans ces conditions, le rapport z est une fonction uniforme de x dans tout le plan. A la partie supérieure du plan des x, c'est-à-dire au plan P, correspond dans le plan z, d'après les paragraphes précédents, un triangle T d'arcs de cercle; un des côtés de ce triangle est rectiligne ici : c'est celui qui correspond au segment $(0, 1)$. Puisque la fonction z est réelle sur le segment $(0, 1)$, elle prendra des valeurs imaginaires conjuguées pour deux valeurs de x imaginaires conjuguées, c'est-à-dire pour deux points symétriques par rapport à l'axe réel. Par suite, au demi-plan

Fig. 18.

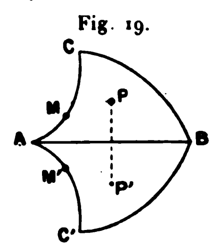


inférieur correspondra un triangle d'arcs de cercle symétrique du triangle T par rapport à son côté rectiligne. L'ensemble du triangle T et de son symétrique correspondra donc au plan x tout entier dans lequel on a tracé les deux coupures $(-\infty, 0)$ et $(1, +\infty)$. On aura,

par exemple, les figures suivantes où l'on représente le plan x et le plan z.

Soit d'abord le triangle ABC avec le côté rectiligne $\overline{AB}$, qui correspond au segment (o, 1); nous figurons le triangle ABC' symétrique

Fig. 19.



de ABC par rapport à AB. Le quadrilatère ABC' donne une représentation conforme du plan x où sont tracées les coupures $(-\infty, 0)$ et $(1, +\infty)$. Le côté AC correspond au bord supérieur de la coupure $(0, -\infty)$ et le côté AC' au bord inférieur de cette même coupure. Ainsi à deux points m et m', considérés comme appartenant respectivement aux bords supérieur et inférieur de la coupure $(-\infty, 0)$, correspondent deux points M et M' situés sur AC et sur AC'. En désignant par z et z' les affixes de ces deux points, on aura

$$z' = \frac{az+b}{cz+d},$$

et la substitution

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$$

correspond précisément à la rotation mpm' effectuée par x autour de O dans le sens négatif.

Il y aurait de même une seconde substitution

$$\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right),$$

transformant BC en BC'. Les côtés du quadrilatère $\overline{ACBC'}$ se correspondent donc deux à deux par une substitution linéaire.

Dans la figure que nous avons dessinée, nous avons supposé que le triangle ACB était tout entier au-dessus de AB; il pourrait en être autrement, et alors le quadrilatère total pourrait se recouvrir partiellement lui-même.

Si, au lieu de prendre le rapport z de deux intégrales réelles sur le segment (o, 1), nous avions pris le rapport de deux intégrales quel-

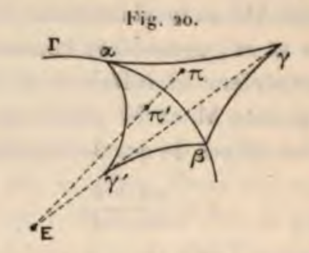
conques, le triangle ABC n'aurait plus eu de côté rectiligne. La figure obtenue aurait été la transformée du quadrilatère ACBC′ par une substitution quelconque de la forme

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right).$$

Or, une telle substitution transforme le segment de droite $\overline{AB}$ en une circonférence; il s'agit de savoir ce que deviennent deux points P et P′ symétriques par rapport à $\overline{AB}$. Désignons par $\alpha\beta$ le segment d'un cercle Γ correspondant à AB, et soient π et π' les transformées de P et P′. Tout cercle passant par P et P′ est orthogonal à AB; donc tout cercle passant par π et π' est orthogonal à Γ (la transformation transformant les cercles en cercles et conservant les angles).

En particulier, la droite $\pi\pi'$ sera normale au cercle Γ et, par suite, passe par son centre E. Or, on sait que les deux points π et π', situés

Fig. 20.



sur le diamètre d'un cercle et tels qu'un cercle distinct de ce diamètre et passant par ces points soit orthogonal au cercle, sont conjugués par rapport à celui-ci, c'est-à-dire que

$$E\pi\, E\pi' = R^2,$$

R désignant le rayon du cercle. Les deux points π et π' se correspondent donc dans la transformation par rayons vecteurs réciproques, qui laisse invariables les points de Γ. Les deux triangles $\alpha\gamma\beta$ et $\alpha\gamma'\beta$ correspondant respectivement à ACB et AC′B sont donc transformés l'un de l'autre par une inversion relative au cercle Γ; on peut dire encore qu'ils sont l'*image l'un de l'autre* par rapport à ce cercle [1], comme on le dit pour le cas où $\alpha\beta$ se réduit à un segment rectiligne.

[1] Cette notion de l'image d'une figure par rapport à un cercle avait été déjà posée par Riemann dans ses Travaux *Sur les surfaces minima*. Elle a été particulièrement développée par M. Schwarz dans les Mémoires que nous avons déjà cités.

IV. — Remarques générales sur les substitutions linéaires transformant un cercle en lui-même.

17. Nous aurons à considérer, dans le Chapitre suivant, des substitutions linéaires transformant un cercle en lui-même. Telles sont les substitutions du groupe de l'équation hypergéométrique, dans le cas où le cercle obtenu au paragraphe 10 est réel. On peut toujours supposer que le cercle se réduit à une droite, et que cette droite est l'axe des quantités réelles.

Une substitution linéaire transformant la droite en elle-même est alors de la forme

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right),$$

a, b, c, d étant réels, et l'on supposera, comme il est évidemment permis,

$$ad - bc = 1.$$

Ceci posé, cherchons les points que la substitution laisse invariables. Ils correspondent à l'équation

$$z = \frac{az+b}{cz+d},$$

c'est-à-dire à l'équation du second degré

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0. \tag{8}$$

La quantité sous le radical

$$(d-a)^2 + 4bc$$

se réduit (en tenant compte de la relation $ad - bc = 1$) à

$$(a+d)^2 - 4.$$

Nous avons donc différents cas à examiner suivant le signe de cette différence. Remarquons auparavant que, conformément à la théorie générale de la réduction des substitutions linéaires, on peut, par un changement linéaire de variables, ramener la substitution à la forme

$$(Z, \mu Z),$$

μ étant le rapport des racines, supposées distinctes, de l'équation en λ

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Si cette équation a ses racines égales, la substitution se ramènera à la forme

$$(Z, Z + h).$$

On doit remarquer que la quantité sous le radical est la même pour les deux équations du second degré (8) et (9).

18. Soit d'abord

$$(a+d)^2 > 4.$$

La réduction à la forme canonique se fera par une substitution réelle, et l'on aura

$$Z = \frac{z-\alpha}{z-\beta},$$

α et β étant deux racines réelles de l'équation (8), et la substitution pourra se mettre sous la forme

$$\frac{z'-\alpha}{z'-\beta} = \mu\frac{z-\alpha}{z-\beta},$$

le multiplicateur μ étant aussi réel et positif, puisque l'équation (9) a ses racines de même signe.

Les deux points que la substitution laisse invariables sont dits les *points doubles* de la substitution. Dans le cas actuel ces points sont situés sur l'axe réel. La substitution est dite alors *hyperbolique* (¹).

19. Supposons maintenant

$$(a+d)^2 < 4.$$

Nous pouvons encore donner à la substitution la même forme, mais alors α et β sont imaginaires conjuguées, et μ est une quantité imaginaire dont le module est égal à 1. Les deux *points doubles* sont

(¹) La classification des substitutions linéaires à une variable a été faite par M. Klein dans ses travaux *Sur la transformation des fonctions elliptiques*.

imaginaires et il n'y en a, par conséquent, qu'un dans le demi-plan supérieur.

Soit

$$\mu = e^{\theta i},$$

θ étant réel. La substitution

$$Z' = \mu Z$$

transforme une courbe passant par $Z = 0$ en une autre courbe passant par le même point, et les deux courbes font visiblement entre elles, en ce point, l'angle θ. Par suite, à une courbe, passant par le point $z = \alpha$, correspondra une courbe passant par le même point et faisant avec elle l'angle θ. On dit ici que la substitution est *elliptique*.

20. Passons au cas particulier où

$$(a + d)^2 = 4.$$

Soit α la racine double de l'équation (8); on peut prendre ici

$$Z = \frac{1}{z - \alpha}$$

et la substitution a alors la forme

$$\frac{1}{z' - \alpha} = \frac{1}{z - \alpha} + h,$$

h étant une constante différente de zéro.

La substitution est dite alors *parabolique;* il n'y a qu'un point que la substitution laisse invariable : c'est le point $z = \alpha$, situé sur l'axe réel. Une courbe passant par le point double a pour transformée une courbe passant par ce point et qui lui est tangente, ce qui se déduit de suite du cas précédent, en regardant la substitution parabolique comme la limite d'une substitution elliptique.

CHAPITRE XIII.

SUR UNE CLASSE DE TRANSCENDANTES UNIFORMES DÉDUITES DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE HYPERGÉOMÉTRIQUE.

I. — Les fonctions de M. Schwarz.

1. Nous allons maintenant étudier des cas étendus, signalés par M. Schwarz, où l'inversion du quotient de deux intégrales de l'équation différentielle hypergéométrique conduit à une fonction uniforme. Nous voulons donc que, y_1 et y_2 désignant deux intégrales distinctes de cette équation, la relation

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = z$$

donne pour x une fonction uniforme de z.

Revenons d'abord aux constantes λ, b_1, b_2, comme nous l'avons fait dans l'étude des intégrales hypergéométriques (Chap. XII, § 6). Nous savons que l'on peut trouver deux intégrales, dont le rapport dans le voisinage de l'origine $x = 0$ peut se mettre sous la forme

$$x^{\lambda+b_1-1}\,P(x),$$

$P(x)$ étant holomorphe et différent de zéro pour $x = 0$. Il suffit, pour s'en assurer, de prendre les deux intégrales correspondant aux deux racines de l'équation déterminante.

De même, pour $x = 1$, on aura deux intégrales, dont le quotient se mettra sous la forme

$$(x-1)^{\lambda+b_2-1}\,Q(x),$$

$Q(x)$ étant holomorphe et différent de zéro pour $x = 1$. Enfin, dans

le voisinage de $x = \infty$, nous avons un rapport susceptible de la forme

$$x'^{b_1+b_2-1}\,R(x') \qquad \left(x' = \frac{1}{x}\right),$$

$R(x')$ étant holomorphe et différent de zéro pour $x' = 0$.

Pour que l'inversion se fasse d'une manière uniforme, il faudra que *les trois nombres*

$$\lambda + b_1 - 1, \quad \lambda + b_2 - 1, \quad b_1 + b_2 - 1$$

soient les inverses de nombres entiers. Soient donc

$$\lambda + b_1 - 1 = \frac{1}{m},$$

$$\lambda + b_2 - 1 = \frac{1}{n},$$

$$b_1 + b_2 - 1 = \frac{1}{p},$$

m, n, p étant trois entiers que nous pouvons supposer *positifs,* car nous verrons dans un moment que

$$a^2 = \frac{1}{m^2}, \qquad b^2 = \frac{1}{p^2}, \qquad c^2 = \frac{1}{n^2},$$

a, b, c ayant la signification que nous leur avons donnée au Chapitre précédent.

Nous aurons donc

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right),$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right),$$

$$b_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{p} + \frac{1}{n}\right).$$

Nous nous imposons de plus la condition que l'intégrale hypergéométrique (*loc. cit.*) ait un sens quand g et h sont deux quelconques des quantités 0, 1, x et ∞, c'est-à-dire que

$$b_1 > 0, \qquad b_2 > 0, \qquad \lambda > 0, \qquad b_1 + b_2 + \lambda < 2.$$

Les trois premières conditions sont remplies, quels que soient les

entiers positifs m, n, p; et la dernière revient à l'inégalité

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}<1.$$

Nous la supposerons vérifiée.

2. Les quantités désignées par a, b, c dans le Chapitre précédent (§ 13) sont ici, puisque

$$\lambda=1-\alpha,\qquad b_1=1+\alpha-\gamma,\qquad b_2=\gamma-\beta,$$
$$a=\frac{1}{m},\qquad b=\frac{1}{p},\qquad c=\frac{1}{n}.$$

Le quotient de deux solutions nous donne donc la représentation conforme du demi-plan sur un triangle d'arcs de cercle (*voir* le Chapitre précédent). Les angles aux sommets de ce triangle sont

$$\frac{\pi}{m},\quad\frac{\pi}{n},\quad\frac{\pi}{p}.$$

On peut supposer que ces trois sommets sont à distance finie, et, puisque a, b, c sont plus petits que deux, nous sommes dans le cas où il y a une correspondance uniforme entre le demi-plan et le triangle ABC.

Or, étant donnés trois cercles, il existe un cercle réel ou imaginaire les coupant orthogonalement. Soit Γ le cercle relatif aux trois cercles formant le triangle ABC, et soit AC′B l'image de ACB par rapport à AB; Γ coupera aussi orthogonalement AC′ et BC′. On le verra de suite en supposant que AB se réduit à une ligne droite (ce qui ne diminue pas la généralité, comme il résulte du paragraphe 16 du Chapitre précédent), car alors AC′B est symétrique de ACB et le cercle a lui-même AB pour axe de symétrie.

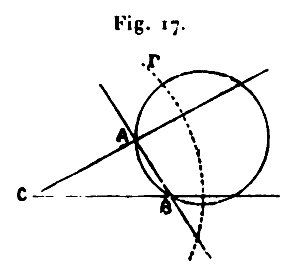
Je dis maintenant que *le cercle* Γ *est réel;* c'est là un point très important qui résulte de ce que les angles de notre triangle d'arcs de cercle sont égaux à $\frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{n}$ et $\frac{\pi}{p}$ et à ce que, de plus,

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}<1.$$

Pour le voir, nous pouvons supposer que deux des côtés du

triangle sont rectilignes, car on peut transformer deux circonférences en droite par une substitution linéaire. Nous aurions donc la disposition suivante de la figure 17.

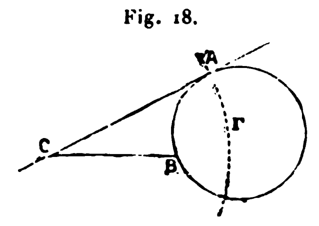
Fig. 17.



L'angle rectiligne ACB est égal à $\frac{\pi}{p}$; quant à l'arc de cercle AB, il doit tourner sa convexité vers le point C, car autrement la somme des angles du triangle formé par les deux droites CA, CB et l'arc de cercle AB dépasserait la somme des angles du triangle rectiligne ABC, c'est-à-dire π. Du point C comme centre, on peut donc décrire un cercle *réel* Γ orthogonal au cercle AB, et l'on doit remarquer que le cercle Γ ne rencontrera pas le triangle CAB.

Nous avons supposé implicitement, dans cette figure, qu'aucun des angles n'était nul, c'est-à-dire qu'aucun des entiers m, n, p n'était infini. Supposons, par exemple, $m = \infty$; on aura alors la figure 18. Ici le cercle Γ ne traverse pas le triangle ACB, mais passe par le sommet A où l'angle est nul. Ceci est général; s'il y a, dans le

Fig. 18.

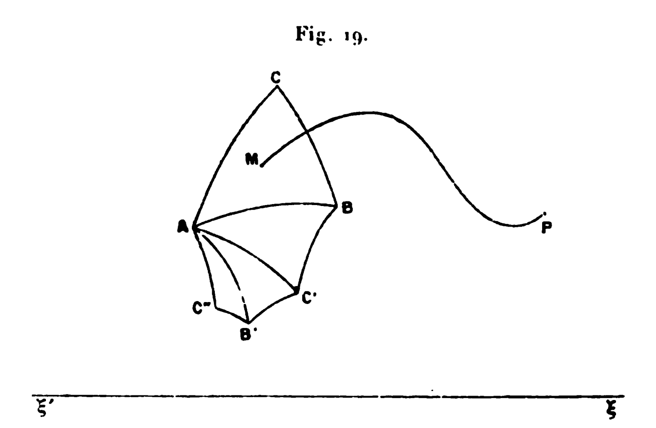


triangle, deux sommets, ou même les trois, pour lesquels l'angle soit nul, le cercle orthogonal passera par ces sommets.

3. Réduisons maintenant le cercle Γ à être l'axe des quantités réelles; le triangle ABC sera dans un des demi-plans, soit, par exemple, le demi-plan supérieur.

Nous avons donc, dans le demi-plan, un triangle d'arcs de cercle ACB, dont les côtés sont orthogonaux à l'axe réel, et il en sera de

Fig. 19.



même alors des côtés du triangle AC′B, image du triangle ACB par rapport à AB (*fig.* 19).

Si les sommets A et B correspondent aux points o et 1, la substitution linéaire transformant AC en AC′ est la substitution Σ_1 relative à une rotation dans le sens négatif autour de o. (*Voir* la figure 14 du Chapitre précédent.)

Le quadrilatère ACBC′ correspond au plan de la variable x, dans lequel on a tracé les coupures $(-\infty, 0)$ et $(1, +\infty)$. Si x, venant du demi-plan inférieur, traverse la coupure $(-\infty, 0)$, nous aurons, comme correspondant au demi-plan supérieur, un triangle d'arcs de cercle, qui sera l'image du triangle BC′B par rapport à AC′; soit AB′C′ ce triangle. Il est clair que le triangle AC′B′ se déduira du triangle ACB au moyen de la substitution Σ_1, et le triangle AC″B′, image de AC′B′ par rapport à AB′, se déduira du triangle AC′B par la même substitution. On peut donc dire que le quadrilatère AC″B′C′ est la transformée du quadrilatère ACBC′ par la substitution Σ_1. Cette substitution est évidemment à coefficients réels, puisqu'elle a le point A comme point double et qu'elle transforme le cercle AC dans le cercle AC′, le cercle AB dans le cercle AB′, ces divers cercles étant orthogonaux à l'axe réel $\xi\xi'$.

La substitution Σ_2, relative à une rotation dans le sens positif autour de 1 et qui transforme BC en BC′, est pareillement à coeffi-

cients réels ([1]), et l'on peut appliquer de la même manière cette substitution au quadrilatère ACBC'. Nous sommes donc ainsi conduit à transformer le quadrilatère précédent au moyen des substitutions en nombre infini, résultant de la composition des deux substitutions Σ_1 et Σ_2. Ceci revient, d'après les explications ci-dessus, à partir du triangle ACB et *à former la suite indéfinie des triangles, qui s'en déduisent par symétrie en prenant les images de ce triangle par rapport à ses côtés,* et faisant de même pour les nouveaux triangles obtenus et ainsi de suite. Nous dirons que deux quadrilatères ayant un côté commun AC', tels que ACBC' et AC'B'C'', sont limitrophes.

Tous les triangles seront dans le même demi-plan, puisque les substitutions Σ_1 et Σ_2 sont à coefficients réels. Il est, de plus, évident, d'après leur génération géométrique, qu'ils ne se recouvriront pas les uns les autres, puisque leurs angles sont respectivement égaux à

$$\frac{\pi}{m}, \quad \frac{\pi}{n}, \quad \frac{\pi}{p};$$

ce qui fait que les triangles ayant pour sommet le point A sont au nombre de $2m$, la rotation autour de A ramenant le triangle initial, et que, par suite, les quadrilatères sont en nombre m autour de A. En prenant toujours de nouveaux triangles, on étend indéfiniment, sans sortir du demi-plan, le domaine occupé par les triangles, et il est bien vraisemblable que *cet ensemble de triangles couvrira le demi-plan tout entier* ([2]); pour le démontrer en toute rigueur, quelques explications préliminaires sont nécessaires.

4. Reprenons la substitution

$$Z = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc = 1),$$

a, b, c et d étant réels. Soient $z = x + iy$ et $Z = X + iY$; on

---

([1]) Le cercle que laissent invariable les substitutions Σ_1 et Σ_2, comme nous l'avons vu d'une manière générale (Chap. XII, § 10), est ici l'axe réel. On peut vérifier directement qu'avec les valeurs actuelles de λ, b_1 et b_2 ce cercle doit bien être réel, en se servant de l'inégalité donnée (*loc. cit.*).

([2]) M. Schwarz, dans son Mémoire déjà cité (*Journal de Crelle*, t. 75, p. 318), admet ce point sans démonstration. Nous suivons, pour la démonstration rigoureuse, la méthode employée par M. Poincaré pour établir le théorème général d'existence des groupes fuchsiens (*Acta mathematica*, t. I).

aura

$$dz = dx + i\,dy$$

et, en désignant par z_0 la quantité conjuguée de z,

$$dz_0 = dx - i\,dy,$$

d'où l'on conclut

$$dx^2 + dy^2 = dz\,dz_0.$$

Or

$$dZ\,dZ_0 = \frac{dz_0\,dz}{(cz+d)^2(cz_0+d)^2},$$

et, comme

$$Y = \frac{y}{(cz+d)(cz_0+d)},$$

on en déduit

$$\frac{dX^2 + dY^2}{Y^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Par suite, pour un élément de courbe ds et pour l'arc transformé dS, on a

$$\frac{dS}{Y} = \frac{ds}{y}$$

et l'on peut dire que l'élément $\frac{ds}{y}$ est un invariant pour la substitution linéaire.

5. Revenons au quadrilatère ACBC′ et à tous ceux qui s'en déduisent par les substitutions du groupe dont Σ_1 et Σ_2 sont les deux substitutions fondamentales. Joignons un point quelconque M à l'intérieur du quadrilatère ACBC′ par un arc de courbe situé dans le demi-plan, à un point quelconque P de ce demi-plan, non situé sur l'axe réel. Suivons l'arc MP en considérant les différents quadrilatères correspondant au quadrilatère initial par une substitution du groupe, et cherchons à montrer qu'on arrivera au point P après avoir traversé un nombre *fini* de quadrilatères.

L'arc de courbe MP sort du premier quadrilatère (que nous désignerons par R_0) par un certain côté. Il entre alors dans un second quadrilatère limitrophe de R_0, le long de ce côté. Si l'arc MP sort de ce quadrilatère, il entrera dans un troisième quadrilatère R_2, limitrophe de R_1, le long du côté par lequel est sorti MP, et ainsi de suite. On aura, de cette manière, une suite de quadrilatères

$$R_0,\quad R_1,\quad \ldots,\quad R_n,\quad \ldots.$$

Il faut démontrer que ces quadrilatères sont en nombre fini. Or, quand un arc de courbe traverse un polygone R, deux circonstances peuvent se présenter : ou bien cet arc va d'un côté à un côté opposé, ou bien il entre par un côté et sort par un côté adjacent.

Prenons d'abord la première circonstance et considérons la substitution linéaire transformant R_n en R_0. Elle transformera aussi l'arc r_n de MP, qui traversait R_n, en un arc traversant R_0. Or, pour un arc de courbe compris entre deux côtés opposés de R_0, l'intégrale

$$L = \int \frac{ds}{y}$$

est une quantité positive ne descendant pas au-dessous d'une certaine limite, que nous désignerons par K. Or, L étant un invariant au sens du paragraphe précédent, nous concluons de là que l'intégrale L étendue à r_n sera supérieure à K. Comme l'intégrale L, étendue à l'arc MP tout entier, est nécessairement finie, il en résulte que le nombre des polygones R, pour lesquels se présente la première circonstance, est nécessairement fini.

Si donc les R sont supposés en nombre infini, il arrivera un moment où la seconde circonstance se présentera toujours. Celle-ci se partage elle-même en deux cas différents. Considérons un polygone R_i et le polygone suivant R_{i+1} ; par hypothèse, l'arc traverse les deux polygones en entrant et sortant par des côtés adjacents ; mais il peut arriver que les côtés adjacents correspondent au même sommet ou à deux sommets différents dans les deux quadrilatères. Dans le second cas, en effectuant la transformation qui ramènera respectivement les deux quadrilatères à R_0 et à R_1, il est clair que l'intégrale L, étendue à l'arc compris dans R_i et R_{i+1}, sera supérieure à K, et nous sommes dans le même cas que ci-dessus. Le second cas de la seconde circonstance ne peut donc se présenter qu'un nombre fini de fois. Il ne nous reste plus que le premier cas de la seconde circonstance, qui se présenterait constamment à partir d'un certain moment ; mais ici il n'y a plus aucune difficulté, puisque autour d'un sommet il y a seulement soit m, soit n, soit p quadrilatères. Nous trouvons donc toujours un nombre fini dans tous les cas possibles, et nous arrivons à la conclusion que *le réseau de quadrilatères couvre le demi-plan tout entier,* puisqu'un point quelconque du demi-plan se trouve dans un certain quadrilatère.

6. Je reprends maintenant le rapport

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = z,$$

qui nous a d'abord donné la représentation conforme du demi-plan supérieur sur le triangle ACB. A chaque valeur de x correspondent une infinité de valeurs de z, qui se déduisent de l'une d'entre elles z, et sont de la forme

$$\frac{az+b}{cz+d},$$

a, b, c et d étant réels ($ad - bc = 1$). Cherchons inversement combien de valeurs de x correspondent à une valeur de z. Le point z se trouve dans un certain quadrilatère R du réseau que nous venons d'étudier. Or, à chaque quadrilatère correspond uniformément le plan de la variable x où l'on a tracé les deux coupures $(-\infty, 0)$ et $(1+\infty)$; *à chaque valeur de z ne correspondra donc qu'une valeur de x.*

L'inversion de l'équation

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = z$$

donne donc pour x *une fonction uniforme de z*. Cette fonction $f(z)$ n'est définie que dans le demi-plan supérieur de la variable z, et *l'on ne peut la prolonger analytiquement au-dessous de l'axe réel.* En désignant par

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$$

une substitution quelconque du groupe dont Σ_1 et Σ_2 sont les deux substitutions fondamentales, on a

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = f(z),$$

égalité qui exprime simplement qu'aux points correspondants de deux polygones R la fonction a la même valeur. Nous avons donc là une transcendante extrêmement intéressante, qui généralise d'une manière bien remarquable les fonctions doublement périodiques, en ce sens que le parallélogramme des périodes s'y trouve remplacé par un quadrilatère d'arcs de cercle, et que le réseau des parallélogrammes

de périodes est remplacé par le réseau des quadrilatères curvilignes couvrant le demi-plan ([1]).

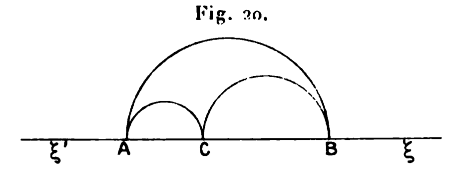
7. Nous avons supposé dans les dessins faits plus haut que les angles

$$a\pi, \quad b\pi, \quad c\pi$$

du triangle curviligne étaient différents de zéro.

Les raisonnements faits ne supposent en rien que parmi ces angles il ne s'en trouve pas d'égal à zéro. Si l'on a $a = 0$, le sommet a sera sur l'axe réel, car on a alors un logarithme dans l'expression d'un système fondamental d'intégrales et la substitution fondamentale correspondante sera alors parabolique. Il peut même arriver que les trois angles du triangle d'arcs de cercle soient nuls, ce qui corres-

Fig. 20.



pond à $l = m = n = \infty$, et ce cas particulier présente un grand intérêt. On aura alors un triangle comme celui de la figure 20, où les trois angles A, C, B sont nuls.

8. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que l'on avait entre les entiers positifs m, n, p l'inégalité

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1.$$

([1]) Les fonctions de M. Schwarz ont donné, après la fonction modulaire qui s'était présentée dans la théorie des fonctions elliptiques et qu'elles comprennent comme cas particulier, des exemples de fonctions uniformes n'étant pas susceptibles d'être prolongées analytiquement au delà d'une droite ou d'un cercle, et se reproduisant quand on effectue sur la variable un groupe de substitutions linéaires. Ce sont les types les plus simples de ces fonctions que M. Poincaré appelle *fonctions fuchsiennes*, et qui sont désignées en Allemagne sous le nom de *fonctions automorphes*. Un point capital dans cette théorie est la loi générale de formation des groupes fuchsiens, c'est-à-dire des réseaux de polygones limités par des arcs de cercle normaux à l'axe réel, se déduisant les uns des autres par une substitution linéaire et couvrant une seule fois le demi-plan [*voir*, sur ce sujet, Poincaré, *Théorie des groupes fuchsiens* (*Acta mathematica*, t. I)]. L'étude du cas particulier très simple, correspondant aux fonctions de Schwarz que nous venons de traiter, facilitera l'étude du cas général.

Arrêtons-nous un moment sur le cas de l'égalité

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=1.$$

D'après les valeurs de γ, b_1 et b_2 (§ 1 de ce Chapitre), nous trouvons alors

$$\lambda-b_1+b_2=2,$$

et par suite, en revenant aux constantes α, β, γ de Gauss, on aura $\beta=0$.

L'équation hypergéométrique se réduit à

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-x(\alpha+1)]\frac{dy}{dx}=0.$$

Une des solutions est donc $y=$ const., et une autre intégrale est fournie par la quadrature

$$(1)\qquad y=\int_{x_0}^{x}x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}dx.$$

La question se réduit donc à l'inversion d'une intégrale. Mais ici, d'après ce que nous avons déjà dit au Chapitre précédent, le triangle curviligne se réduit à un triangle rectiligne ; ses angles sont égaux à

$$\frac{\pi}{m},\quad\frac{\pi}{n},\quad\frac{\pi}{p},$$

et leur somme est bien égale à π, d'après la relation

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=1.$$

Les cas où un des angles serait nul, c'est-à-dire où une des m, n, p serait infinie, ne présentent aucun intérêt, et l'on ne trouve que des transcendantes élémentaires. La seule circonstance à examiner est celle où nous avons un véritable triangle rectiligne. Ce que nous avons dit plus haut du triangle curviligne peut nécessairement se répéter pour le triangle rectiligne. On déduira du triangle rectiligne par symétrie une infinité de triangles qui recouvriront le plan. Mais le triangle initial n'est pas quelconque. La relation

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=1$$

nous donne, soit

$$m = 3, \quad n = 3, \quad p = 3,$$

soit

$$m = 2, \quad n = 4, \quad p = 4,$$

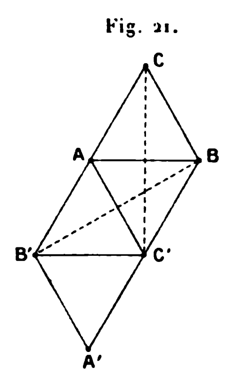
ou enfin

$$m = 2, \quad n = 3, \quad p = 6.$$

On a, dans le premier cas, un triangle équilatéral, dans le second un triangle rectangle isoscèle et dans le troisième un triangle rectangle dont les angles aigus sont égaux respectivement à 30° et 60°. Dans les trois cas, *on obtient par l'inversion de l'intégrale* (1) *une fonction doublement périodique*. On le vérifierait par l'étude de l'intégrale elle-même en donnant à α et γ les valeurs particulières correspondant à chacun de ces cas, et il n'y aurait qu'à vérifier que l'intégrale abélienne dont on veut faire l'inversion est une intégrale de première espèce correspondant à une courbe de genre *un*. On peut aussi le voir par une voie qui se rapproche plus des considérations développées dans les paragraphes précédents, car la double périodicité doit apparaître sur le réseau des triangles. Prenons, par exemple, le triangle équilatéral.

Soient le triangle équilatéral ACB et son symétrique AC'B (*fig.* 21).

Fig. 21.



Les substitutions fondamentales du groupe sont la substitution linéaire (ici de la forme $Pz + Q$) transformant AC en AC', et la substitution linéaire transformant BC en BC'. Figurons maintenant le quadrilatère limitrophe AC'B'A', et considérons la substitution linéaire transformant C'A en C'A'. En faisant à la suite les deux

substitutions correspondant respectivement au changement de AC en AC′ et de C′A en C′A′, on transforme CA en C′A′; cette substitution sera nécessairement de la forme

$$(z,\ z+\omega),$$

ω représentant la grandeur géométrique CC′. Voici donc une première période; une seconde période correspondra à la grandeur géométrique BB′; une troisième période correspondrait à la troisième hauteur, mais il est clair qu'elle est la somme géométrique des deux premières. Un parallélogramme de périodes comprend l'équivalent de *trois* parallélogrammes fondamentaux tels que ACBC′; je veux dire par là que sa surface peut se partager en plusieurs aires dont chacune est congruente à un parallélogramme fondamental, ou à une partie d'un tel parallélogramme, de manière à correspondre dans son ensemble à *trois* de ces parallélogrammes.

Je laisse au lecteur le soin d'examiner de la même manière les deux autres réseaux de triangles dont les angles sont indiqués ci-dessus (1).

II. — Problème inverse.

9. Nous sommes parti, dans la Section précédente, de l'équation différentielle hypergéométrique, et, en donnant aux constantes certaines valeurs particulières, nous avons été conduit à diviser le demi-plan de la variable z en un réseau de quadrilatères formés par des arcs de cercle. On peut se poser la question d'une manière inverse, en considérant *a priori* dans le demi-plan de la variable z un triangle formé par trois arcs de cercle normaux à l'axe réel, et

(1) Je n'examine pas ici les cas en nombre limité, où l'on a

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}>1,$$

et je renvoie pour ces cas au Mémoire de M. Schwarz et au beau Livre de M. Klein (*Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Leipzig, 1884). Ils conduisent du reste encore à des fonctions uniformes, mais ce sont des fonctions rationnelles. Elles sont très intéressantes, car elles se rattachent directement aux divers polyèdres réguliers.

ayant pour angle [1]

$$\frac{\pi}{m}, \quad \frac{\pi}{n}, \quad \frac{\pi}{p}.$$

On prend l'image de ce triangle ABC par rapport à AB, et, en désignant ce triangle par ABC', on a le quadrilatère ACBC'. Il existe une substitution elliptique à coefficients réels ayant pour points doubles A et son symétrique, par rapport à l'axe réel, transformant le cercle AC en le cercle AC', ces deux cercles étant pris dans leur entier ; ce sera la substitution

$$\frac{z'-\alpha}{z'-\alpha_0} = e^{-\frac{2\pi i}{m}} \frac{z-\alpha}{z-\alpha_0},$$

α étant l'affixe de A et α_0 la conjuguée de α ; l'angle $\frac{2\pi}{m}$ est l'angle des deux cercles, et nous mettons le signe *moins* dans l'exponentielle (si le cas de figure est celui de la page 335). Il faut montrer

---

(1) On aura certainement

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1,$$

comme le montre le théorème célèbre de Gauss sur la courbure totale d'une portion de surface, limitée par des lignes géodésiques. On sait en effet qu'on peut mettre le carré de l'élément de l'arc sur une surface S, dont la courbure totale est constante et égale à -1 sous la forme

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

et, si l'on établit alors une correspondance entre les points de S et le demi-plan (x, y), les lignes géodésiques de la surface correspondront dans le demi-plan aux cercles orthogonaux à l'axe des x. Cette représentation donnant une carte géographique de S sur le demi-plan, il y a conservation des angles ; or, d'après le théorème de Gauss, si l'on prend sur une surface un triangle formé par trois lignes géodésiques, en désignant par A, B, C les angles de ce triangle, on a

$$A + B + C - \pi = \iint \frac{d\sigma}{RR'},$$

$d\sigma$ étant l'élément de surface, et RR' la courbure totale de la surface en chaque point. Or ici $RR' = -1$; il en résulte que

$$A + B + C < \pi,$$

et il en est, par suite, de même du triangle formé dans le demi-plan par trois cercles orthogonaux à l'axe des x. On pourra consulter sur ce sujet le Chapitre XI du Tome III des *Leçons* de M. Darboux (p. 394).

que cette substitution transforme le point C en le point C′. Il suffit pour cela de faire voir que l'intégrale

$$\int \frac{ds}{y},$$

que nous savons être un invariant pour une substitution linéaire, est la même que pour l'arc AC et pour l'arc AC′. Or il en est bien ainsi, car deux arcs sont transformés l'un de l'autre par rayons vecteurs réciproques et l'on aura alors, en désignant par O le point où CC rencontre l'axe réel et en appelant MP et M′P′ deux arcs élémentaires correspondants,

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathrm{M'P'}}{\mathrm{OM'}},$$

ce qui revient à

$$\frac{ds}{y} = \frac{ds'}{y'};$$

les deux intégrales sont donc égales.

Ainsi nous avons une substitution Σ_1 transformant AC en AC′, et pareillement une substitution Σ_2 transformant BC en BC′. Ces deux substitutions sont les substitutions fondamentales d'un groupe, et nous obtenons ainsi, en transformant le quadrilatère primitif par toutes les substitutions de ce groupe, un nombre infini de quadrilatères couvrant une fois le demi-plan. (On répéterait ici les raisonnements de la Section précédente.)

Passons maintenant à la démonstration a priori *de l'existence d'une fonction que laissent invariable les substitutions de ce groupe.* On y parviendra en s'appuyant sur le théorème général de Riemann, relatif à la représentation d'une aire simplement connexe sur un demi-plan, théorème sur lequel nous nous sommes longuement arrêté dans le Tome II de cet Ouvrage. Prenons le triangle ABC; nous pouvons le représenter d'une manière conforme sur le demi-plan supérieur du plan x, et cette représentation est entièrement déterminée si nous faisons correspondre le point A au point $x = 1$ et le point C à $x = \infty$. Soit

$$x = f(z)$$

la fonction $f(z)$ pour le moment définie seulement dans le triangle ABC, qui permet de faire cette représentation conforme. L'arc AB

étant analytique, on peut, d'après la théorie de la représentation conforme (t. II, p. 298), prolonger analytiquement la fonction $f(z)$ au delà de l'arc AB. A deux valeurs de z, ayant pour affixes deux points conjugués par rapport au cercle AB, correspondent alors deux valeurs de x imaginaires conjuguées. On l'établit de suite en supposant pour un moment, comme il est permis, qu'une transformation linéaire ait transformé l'arc AB en un segment de l'axe réel dans son plan, et alors la remarque devient évidente. Par suite, la fonction $f(z)$ sera certainement définie d'une manière uniforme dans le triangle AC'B image de ACB, et les valeurs de la fonction correspondront, dans ce triangle, au demi-plan inférieur. On passera de même du triangle AC'B à un triangle limitrophe, et l'on étendra ainsi, de proche en proche, la fonction d'une manière uniforme dans tout le demi-plan. En deux points homologues de deux quadrilatères, la valeur de x sera évidemment la même, et, par suite, *on a bien une fonction uniforme $f(z)$ invariable par les substitutions du groupe correspondant au réseau de quadrilatères.*

10. Considérons la fonction inverse z de x définie par l'équation

$$x = f(z).$$

D'après la définition de $f(z)$, la fonction inverse z de x sera une fonction de x définie dans tout le plan de la variable x et holomorphe dans le voisinage de tout point de ce plan, sauf les points o, 1 et ∞. Quand x tourne autour d'un de ces points singuliers, z se change en

$$\frac{az+b}{cz+d},$$

cette substitution appartenant au groupe dont Σ_1 et Σ_2 sont les deux substitutions fondamentales.

Il nous faut chercher la forme analytique d'une des déterminations de la fonction dans le voisinage d'un point singulier. Supposons d'abord que le sommet A ne soit pas sur l'axe réel, c'est-à-dire que l'entier m, correspondant à $x = 0$, ne soit pas infini.

Pour une détermination convenable de la fonction z, l'expression

$$\frac{z-\alpha}{z-\alpha_0}$$

se reproduit, multipliée par $e^{-\frac{2\pi i}{m}}$, quand x tourne autour de l'origine dans le sens négatif, et l'on a par suite

$$\frac{z-\alpha}{z-\alpha_0} = x^{\frac{1}{m}}\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant uniforme dans le voisinage de $x = 0$. Comme pour $x = 0$ on a $z = \alpha$, la fonction $\varphi(x)$ est holomorphe dans le voisinage de $x = 0$, et enfin $\varphi(0) \neq 0$, puisque x est fonction uniforme de z.

Si le sommet A est sur l'axe réel, la substitution Σ_1 est parabolique, et nous savons (Chap. XII) qu'on peut l'écrire

$$\frac{1}{z'-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + h,$$

h étant une constante réelle.

Donc la fonction de x

$$\frac{1}{z-\alpha} + \frac{h}{2\pi i}\log x$$

est uniforme dans le voisinage de $x = 0$. Désignons cette expression par $\varphi(x)$; je dis que $\varphi(x)$ est holomorphe dans le voisinage de $x = 0$. On a en effet

$$e^{-\frac{2\pi i}{h}\frac{1}{z-\alpha}} = x e^{-\frac{2\pi i}{h}\varphi(x)}.$$

Si $\varphi(x)$ admet $x = 0$ comme pôle ou comme point singulier essentiel, le second membre, d'après une proposition élémentaire sur les points singuliers essentiels (t. II, p. 125), s'approche autant qu'on veut dans le voisinage de l'origine de toute grandeur donnée; mais le premier membre, en posant

$$z = \xi + i\eta,$$

a pour module

$$e^{-\frac{2\pi}{h}\frac{\eta}{(\xi-\alpha)^2+\eta^2}},$$

et, comme $\eta > 0$, ce module sera supérieur ou inférieur à *un*, suivant le signe de h, et, par conséquent, le premier membre ne peut s'approcher autant qu'on veut de toute grandeur donnée. Nous au-

rons donc pour une des déterminations z de la fonction z

$$\frac{1}{z-\alpha} = -\frac{h}{2\pi i}\log x + \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant holomorphe dans le voisinage de $x = 0$.

11. Nous pouvons maintenant former une équation du troisième ordre, à laquelle satisfait la fonction α de x. Prenons, à cet effet, le quotient

$$\frac{2\frac{dz}{dx}\frac{d^3z}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2}{2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

déjà rencontré (Chap. XII, § 15); il reste invariable, comme nous l'avons dit, quand on remplace z par $\frac{az+b}{cz+d}$. Il sera donc une fonction uniforme dans tout le plan, et les seuls points singuliers seront les points 0, 1 et ∞. Pour toute autre valeur de x, ce quotient est holomorphe, puisque $\frac{dz}{dx}$ est différent de zéro pour x distinct des trois valeurs singulières. Nous n'avons plus qu'à déterminer la nature de ces singularités. Cette détermination sera facile, puisque nous connaissons la forme analytique de z dans le voisinage de $x = 0$, $x = 1$ et $x = \infty$. On reconnaît ainsi que le quotient ci-dessus est complètement déterminé, en posant, comme précédemment,

$$a = \frac{1}{m}, \qquad b = \frac{1}{n}, \qquad c = \frac{1}{p};$$

des calculs faciles, mais un peu longs, que j'omets ici, font retomber sur l'expression déjà obtenue

$$\frac{1-a^2}{2x^2} + \frac{1-c^2}{2(1-x)^2} - \frac{a^2-b^2+c^2-1}{2x(1-x)},$$

et ce résultat s'applique encore au cas où a, b, c ne seraient pas différents de zéro.

Il résulte de là que la fonction $f(z)$, qui nous occupe, peut être obtenue par l'inversion du quotient de deux intégrales d'une équation hypergéométrique, puisque l'expression précédente est celle qui se présente dans l'équation différentielle du troisième ordre relative à une telle équation.

III. — Quelques cas particuliers remarquables : groupe modulaire et groupe arithmétique.

12. Nous allons étudier quelques cas particuliers. Un cas intéressant est celui où

$$a = b = c = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$m = n = p = \infty.$$

On a alors $\lambda = b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$, et l'on a, par suite, l'intégrale hypergéométrique

$$\int_g^h \frac{du}{\sqrt{u(u-1)(u-x)}},$$

g et h désignant deux quelconques des quantités 0, 1, x et ∞. On peut, moyennant une substitution linéaire convenable, choisir pour triangle fondamental un triangle quelconque d'arcs de cercle normaux à l'axe réel, comme celui que nous avons représenté (p. 344).

Le cas où l'on prend, comme intégrales de l'équation linéaire, deux demi-périodes distinctes de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{du}{\sqrt{u(u-1)(u-x)}}$$

conduit à *la fonction modulaire,* c'est-à-dire au module considéré comme fonction du rapport des périodes, qui a fait, à un autre point de vue, l'objet des travaux mémorables d'Hermite. Nous avons donné (t. II, p. 250) les substitutions fondamentales du groupe correspondant. Au lieu de prendre les substitutions fondamentales (S_1) et (S_2) données (*loc. cit.*), prenons les deux substitutions *inverses,* c'est-à-dire les substitutions donnant les ω en fonction des ω' ; on aura ainsi, pour le rapport z, les deux substitutions

$$(\Sigma_1) \qquad \left(z, \frac{z}{-2z+1}\right),$$

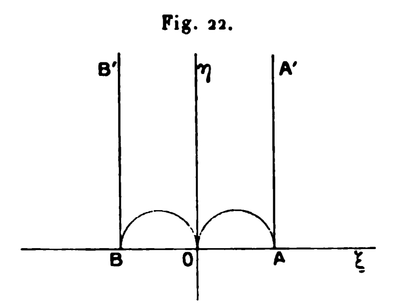
$$(\Sigma_2) \qquad (z, z-2).$$

Dessinons le quadrilatère fondamental correspondant rapporté aux deux axes $(O\xi, O\eta)$ (*fig.* 22) en posant

$$z = \xi + i\eta.$$

Le quadrilatère est symétrique par rapport à $O\eta$. Les deux demi-cercles OA et OB, de diamètre égal à l'unité, se correspondent par

Fig. 22.



la substitution Σ_1, et les deux côtés BB' et AA' parallèles à $O\eta$ se correspondent par la substitution Σ_2. Le quatrième sommet du quadrilatère est à l'infini dans la direction de l'axe $O\eta$.

Le groupe que nous venons d'étudier est souvent désigné sous le nom de *groupe modulaire*. C'est un groupe de *congruence;* il représente l'ensemble des substitutions

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right),$$

où a, b, c, d sont quatre entiers satisfaisant à la relation

$$ad - bc = 1$$

et aux congruences

$$\left.\begin{matrix} a \equiv 1 \\ d \equiv 1 \\ b \equiv 0 \\ c \equiv 0 \end{matrix}\right\} \pmod{2}.$$

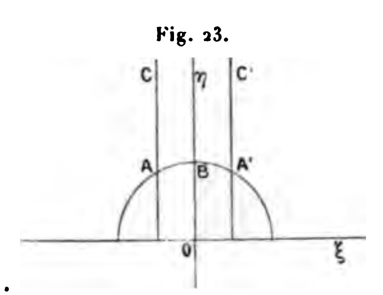
13. Prenons un autre cas non moins remarquable et se rapportant également à la théorie des fonctions elliptiques. Nous donnerons à m, n, p les valeurs

$$m = 3, \qquad n = 2, \qquad p = \infty.$$

On peut prendre, pour triangle fondamental correspondant à ces angles, le triangle suivant : Décrivons de l'origine, comme centre, un cercle de rayon *un* et traçons la droite $\xi = -\frac{1}{2}$ représentée sur la figure 23 par AC. Le triangle fondamental est le triangle formé par

l'arc AB et les deux droites AC, $B\eta$; le troisième sommet est à l'infini. On vérifie de suite que, dans ce triangle, l'angle A est égal à $\frac{\pi}{3}$, l'angle B à $\frac{\pi}{2}$ et l'angle C est nul.

Fig. 23.



Le triangle B A'C', symétrique de BAC par rapport à l'axe $O\eta$, donnera avec BAC le quadrilatère fondamental.

On a immédiatement les substitutions fondamentales du groupe correspondant ; ce sont

$$(1)\qquad \begin{cases} (S) & (z,\ z+1), \\ (T) & \left(z,\ -\dfrac{1}{z}\right); \end{cases}$$

la première transforme AC en A'C' et la seconde l'arc BA en l'arc BA'.

Nous avons déjà étudié ce groupe (t. I, p. 473), et nous avons vu que toutes les substitutions de la forme

$$\left(z,\ \frac{az+b}{cz+d}\right),$$

a, b, c, d étant des entiers réels ($ad - bc = 1$), résultent de la composition des deux substitutions précédentes ([1]). Reprenons ce théorème en ne nous appuyant que sur les considérations relatives aux polygones limités par des arcs de cercle. Prenons un point z, que je suppose à *l'intérieur* du quadrilatère CABA'C', et soit le point

$$Z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

([1]) Outre le Mémoire déjà cité de M. Dedekind (*Borchardt's Journal*, Bd. 83), je mentionnerai encore sur le groupe précédent et les fonctions qui s'y rapportent un travail de M. Hurwitz [*Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen* (*Mathematische Annalen*, Bd. XVIII, 1881)], et un autre Mémoire du même auteur [*Ueber die Theorie der elliptischen Modulfunctionen* (*Math. Annalen*, Bd. LVIII, 1904)].

Le point Z est à l'intérieur d'un certain quadrilatère déduit du quadrilatère fondamental par une substitution Σ du groupe (1) ou sur son périmètre. En effectuant sur Z la substitution Σ^{-1}, on obtient ainsi un point z' dans le quadrilatère fondamental ou sur son périmètre. Si $z = z'$, le théorème est établi. Puisqu'on peut passer de z et de z' à Z par une substitution à coefficients entiers, on pourra certainement passer de z à z' par la substitution

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

α, β, γ, δ étant des entiers. Nous allons montrer que deux points z et z', à l'intérieur du quadrilatère fondamental, ne peuvent se correspondre par une substitution de cette forme, autre que la substitution identique $z' = z$. Il est clair d'abord que γ n'est pas nul, car alors z et z' ne pourraient être dans le quadrilatère, à moins que β ne soit nul. Excluons le cas de $\gamma = 0$, $\beta = 0$, qui donnerait $z = z'$.

Soit $z = \xi + i\eta$; nous avons par hypothèse

$$\xi^2 + \eta^2 > 1, \qquad -\frac{1}{2} < \xi < \frac{1}{2},$$

en excluant les égalités; de même $z' = \xi' + i\eta'$, avec les inégalités analogues, mais les égalités n'étant pas exclues. On a

$$\eta' = \frac{\eta}{(\gamma\xi + \delta)^2 + \gamma^2\eta^2};$$

or

$$(\gamma\xi + \delta)^2 + \gamma^2\eta^2 > \gamma^2 \pm \gamma\delta + \delta^2 \geqq 1,$$

en prenant le signe + si $\gamma\delta$ est négatif, et le signe — si $\gamma\delta$ est positif.

Il s'ensuit que

$$\eta' < \eta,$$

l'égalité étant exclue; en prenant z en fonction de z', on arrive de même à l'inégalité analogue

$$\eta \leqq \eta'.$$

Ces deux inégalités sont contradictoires; nous sommes donc nécessairement dans le cas exclu, c'est-à-dire que

$$\gamma = 0, \qquad \beta = 0$$

et, par suite,

$$\alpha = \delta = \pm 1;$$

ce qui donne la substitution identique. Par suite, *on obtient toutes les substitutions à coefficients entiers au moyen des deux substitutions* (1) *combinées de toutes les manières possibles*. Le groupe précédent est souvent désigné sous le nom de *groupe arithmétique*.

Nous avons vu que S et T étaient les substitutions fondamentales du groupe arithmétique. Ajoutons que ces substitutions sont, comme on le vérifie aisément, liées par la relation

$$\text{STSTST} = 1.$$

Cette remarque n'est peut-être pas inutile, car on est tout naturellement porté à croire que les substitutions fondamentales d'un groupe ne sont liées par aucune relation ; on voit qu'il n'en est rien.

Le groupe *modulaire* est nécessairement compris dans le groupe arithmétique ; je laisserai au lecteur le soin de vérifier que, à un point arbitraire du demi-plan correspondent *six* points, au moyen des substitutions du groupe arithmétique, dans le domaine fondamental du groupe modulaire.

14. La fonction $f(z)$, correspondant au groupe arithmétique, joue un rôle très important dans la théorie des fonctions elliptiques. C'est un sujet qui nous entraînerait trop loin ; je veux cependant montrer comment la considération de cette fonction conduit à une classe intéressante d'équations algébriques. *Envisageant les deux fonctions*

$$x = f(z),$$
$$y = f(mz),$$

où m désigne un entier, nous allons établir qu'il existe entre x et y une relation algébrique.

On voit immédiatement que y, considérée comme fonction de x, ne pourra avoir comme points singuliers que les points 0, 1 et ∞, et ces points sont des points critiques algébriques. Ainsi, pour $x = 0$, l'équation

$$x = f(z)$$

a une infinité de racines en z, qui sont des racines triples, puisque, autour de chaque sommet correspondant à $x = 0$, il y a *trois* quadri-

latères. Soit $z = \alpha$ l'une d'elles, qui n'est pas située sur Ox. Nous pouvons écrire (§ 10)

$$\frac{z-\alpha}{z-\alpha_0} = x^{\frac{1}{3}}\varphi(x) \qquad [\varphi(0) \neq 0] :$$

$f(mz)$ se développe donc en série suivant les puissances de $x^{\frac{1}{3}}$.

Pour $x = \infty$, considérons la racine $z = \infty$ correspondant au sommet à l'infini du quadrilatère fondamental.

On a, dans le voisinage de $x = \infty$, pour la racine z devenant infinie,

$$z + \frac{\log x}{2\pi i} = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant holomorphe dans le voisinage de $x = \infty$, c'est-à-dire que $\frac{1}{x}$ peut se mettre sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de $e^{+2\pi z i}$. Il est évident alors que $\frac{1}{y}$ se mettra, pour x très grand, sous la forme d'une série entière en $\frac{1}{x}$.

Il faut montrer maintenant que y, pour une valeur de x, n'a qu'un nombre limité de valeurs. Or, pour une valeur de x, les valeurs correspondantes de z s'expriment à l'aide de l'une d'elles par la formule

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1).$$

Nous avons donc à chercher si les valeurs de la fonction

$$f\left(m\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

sont en nombre fini, α, β, γ, δ désignant quatre entiers quelconques avec $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Prenons à cet effet les deux valeurs

$$(2) \qquad m\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \text{et} \quad m\frac{\alpha' z + \beta'}{\gamma' z + \delta'} \qquad (\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1)$$

et cherchons à quelle condition elles sont équivalentes au moyen d'une substitution

$$\left(z, \frac{az + b}{cz + d}\right) \qquad (ad - bc = 1).$$

On devra avoir

$$m\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}=\frac{am(\alpha' z+\beta')+b(\gamma' z+\delta')}{cm(\alpha' z+\beta')+d(\gamma' z+\delta')};$$

il en sera ainsi, si l'on a

$$\begin{aligned} m\alpha &= am\alpha'+b\gamma', \\ m\beta &= am\beta'+b\delta', \\ \gamma &= cm\alpha'+d\gamma', \\ \delta &= cm\beta'+d\delta'. \end{aligned}$$

De ces équations, on déduit

$$\begin{aligned} a &= \alpha\delta'-\beta\gamma', \\ b &= m(\beta\alpha'-\alpha\beta'), \\ c &= \frac{\gamma\delta'-\delta\gamma'}{m}, \\ d &= \alpha'\delta-\gamma\beta'. \end{aligned}$$

On a bien $ad-bc=1$, et la seule condition est que c soit entier. La condition est donc

$$\gamma\delta'-\delta\gamma'\equiv 0 \quad (\text{mod. } m).$$

En particulier, désignons par δ' et γ' les restes compris entre o et m des divisions de δ et γ par m, ou ces restes divisés par leur plus grand commun diviseur s'ils ne sont pas premiers entre eux; les deux expressions (2) seront équivalentes, pourvu seulement qu'on prenne α' et β' tels que

$$\alpha'\delta'-\beta'\gamma'=1.$$

On en conclut immédiatement que la fonction

$$f\left(m\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right),$$

quand on donne à α, β, γ, δ toutes les valeurs entières possibles ($\alpha\delta-\beta\gamma=1$), *n'a qu'un nombre limité de valeurs distinctes;* ce qui démontre le résultat énoncé plus haut (¹).

(¹) On trouvera une étude approfondie des *fonctions modulaires* dans les deux Volumes de M. Klein : *Sur les fonctions elliptiques modulaires.*

IV. — Théorème général sur les valeurs d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé.

15. Nous nous sommes déjà servi (t. II, p. 251) de la fonction modulaire, correspondant au cas du paragraphe **12**, pour démontrer un théorème sur les fonctions entières et sur les fonctions ayant un seul point singulier essentiel à l'infini [1]. La fonction modulaire du paragraphe **13** va nous servir à démontrer un théorème déjà énoncé (t. II, p. 127), mais que nous n'avions pu alors établir.

Désignons par $F(z)$ une fonction uniforme dans le voisinage d'un point a, qui est pour elle un point singulier *essentiel* isolé. La fonction $F(z)$ pourra d'ailleurs avoir ou non une infinité de pôles dans le voisinage de ce point essentiel. Nous considérons l'équation

$$F(z) = A,$$

A étant une constante. Nous voulons démontrer le théorème suivant :

L'équation précédente a, en général, une infinité de racines dans le voisinage de a. Il peut arriver cependant qu'il n'en soit pas ainsi pour certaines valeurs exceptionnelles de la constante A, *mais il ne peut exister plus de* deux *valeurs exceptionnelles* [2].

Nous allons procéder en montrant qu'il est impossible que l'équation précédente n'ait pas de racine dans un certain domaine autour

---

(1) Faisons seulement remarquer à ce propos que l'analyse de la page 253 (t. II, 2e édition) est inutile; le théorème qui y est démontré se déduit immédiatement du théorème de la page 251 (même Tome). On peut dire d'une manière générale qu'une fonction $f(z)$, uniforme dans tout le plan et avec un seul point singulier essentiel à l'infini, et qui ne pourrait prendre les valeurs

$$A, \quad B, \quad C,$$

ces trois constantes étant distinctes (une constante infinie n'étant pas exclue), se réduirait nécessairement à une constante. On peut en effet substituer à $f(z)$ la fonction

$$\frac{\alpha f(z) + \beta}{\gamma f(z) + \delta}$$

en choisissant α, β, γ, δ de manière que A, B, C deviennent 0, 1, ∞, et nous sommes alors dans le cas d'une fonction entière.

(2) E. Picard, *Sur les fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel* (*Comptes rendus*, t. LXXXIX, 1879), et *Memoire sur les fonctions entières* (*Annales de l'École Normale*, 1880).

de a, pour *trois* valeurs de A. On peut évidemment supposer, en effectuant sur $F(z)$ une substitution linéaire, que ces trois valeurs sont telles valeurs qu'on voudra. Nous prendrons

$$A = 0, \qquad = 1, \qquad A = \infty.$$

Nous avons donc par hypothèse une fonction $F(z)$ uniforme dans le voisinage de a, qui est pour elle un point singulier essentiel. La fonction n'a point de pôles dans le voisinage de ce point et, de plus, les équations

$$F(z) = 0, \qquad F(z) = 1$$

n'ont pas de racine autour de a.

16. Désignons par

$$x = f(u)$$

la fonction uniforme correspondant au cas du paragraphe **13** et définie dans le demi-plan de la variable u (cette variable a été jusqu'ici désignée par z); soit

$$u = \varphi(x)$$

la fonction inverse ayant dans le plan x les trois points singuliers o, 1 et ∞. Dans cette fonction, je remplace x par $F(x)$, et je vais étudier la fonction z

$$u(z) = \varphi[F(z)]$$

dans le voisinage de a, c'est-à-dire à l'intérieur d'un cercle Γ de centre a et assez petit pour qu'à l'intérieur de ce cercle la fonction $F(z)$ ne soit (en dehors de a pour lequel elle est indéterminée) jamais égale à o, 1 et ∞.

A l'intérieur de Γ, la fonction $u(z)$ a, comme seul point singulier, le point a. Lorsque z tourne une fois autour de a dans le sens positif, le point x décrit dans son plan un contour fermé, et par suite u se change en

$$\frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta},$$

α, β, γ, δ étant quatre entiers ($\alpha\delta - \beta\gamma = 1$).

Plusieurs cas peuvent se présenter relativement à la substitution

$$(3) \qquad \left(u, \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}\right).$$

Elle peut être hyperbolique, elliptique, parabolique ou se réduire à la substitution unité. Nous allons examiner successivement ces différents cas.

17. *Supposons d'abord la substitution hyperbolique,* c'est-à-dire que

$$(\alpha + \delta)^2 > 4.$$

En désignant par p et q les points doubles (qui sont réels et distincts) de la substitution, nous avons vu à la fin du Chapitre précédent que l'expression

$$\frac{u-p}{u-q}$$

se reproduit à un facteur *positif* près μ, différent de *un,* quand on effectue sur elle la substitution (3).

Il en résulte qu'on peut mettre ce quotient sous la forme

$$\frac{u-p}{u-q} = (z-a)^{\frac{k}{2\pi i}}\varphi(z) \qquad (k \neq 0),$$

k désignant le logarithme arithmétique de μ, et la fonction $\varphi(z)$ étant uniforme dans le cercle Γ. Cette fonction n'aura dans ce cercle d'autre point singulier que a, car, pour qu'elle ait un pôle, il faudrait que u devînt égal à la quantité réelle q. Or, ceci est impossible, car, dans $u(x)$, le coefficient de i est positif et différent de zéro pour x distinct de o, 1 et ∞. De plus $\varphi(z)$, pour la même raison, ne s'annulera pas. Par suite, le quotient $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ peut se développer par la formule de Laurent, et nous avons

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \ldots + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \frac{A_1}{z-a} + A + B(z-a) + \ldots.$$

Puisque $\varphi(z)$ est uniforme autour de a, il faut que le coefficient A_1 soit un entier m positif ou négatif, et nous aurons alors

$$\varphi(z) = (z-a)^m e^{P(z)},$$

$P(z)$ étant uniforme dans Γ, et continu sauf en a. Finalement nous obtenons

$$\frac{u-p}{u-q} = (z-a)^{\frac{k}{2\pi i}+m} e^{P(z)}.$$

Or, dans le premier membre, le coefficient de i a un signe invariable. Nous allons voir qu'il ne peut en être de même dans le second cas. On peut, en effet, écrire ce second membre

$$e^{\left(\frac{k}{2\pi i}+m\right)\log(z-a)+P(z)}.$$

Si, dans le premier membre, le coefficient de i a un signe invariable, le coefficient de i dans

$$\left(\frac{k}{2\pi i}+m\right)\log(z-a)+P(z)$$

devra rester compris entre deux multiples consécutifs de π, c'est-à-dire entre deux limites fixes. Posons

$$\left(\frac{k}{2\pi i}+m\right)\log(z-a)+P(z)=U+iV.$$

Il est tout d'abord évident que, si m n'est pas nul, V ne peut rester compris entre deux limites fixes, car une rotation de z autour de a augmente V de $2m\pi$. Supposons donc $m=0$; la relation précédente pourra s'écrire

$$\log(z-a)+\frac{2\pi i}{k}P(z)=-\frac{2\pi V}{k}+\frac{2\pi i U}{k}$$

ou encore

$$(z-a)e^{\frac{2\pi i}{k}P(z)}=e^{-\frac{2\pi V}{k}}e^{\frac{2\pi i U}{k}}.$$

Mais le second membre a un module restant compris entre deux limites déterminées différentes de zéro, et il n'en est pas de même du premier qui s'approche autant qu'on veut de *zéro*, que $P(z)$ soit régulier en a ou qu'il ait en ce point un pôle ou un point singulier essentiel.

Nous arrivons donc à la conclusion que la substitution (3) ne peut être hyperbolique.

18. *Supposons maintenant cette substitution elliptique*. On a alors

$$(\alpha+\delta)^2<4.$$

Deux cas peuvent se présenter; le point double de la substitution (3) situé [illegible] eur peut, au moyen d'une

substitution du groupe arithmétique, être ramené à coïncider avec le point B ou le point A (*fig.* 23, § 13).

1° Plaçons-nous d'abord dans le premier cas. En ayant donc effectué sur u une substitution convenable du groupe arithmétique, la substitution correspondant à (3) devient la substitution laissant B invariable, et par suite, en désignant encore par la même lettre u la valeur primitive transformée, l'expression

$$\frac{u-i}{u+i}$$

se reproduit (§ 9) multipliée par $e^{-\frac{2\pi i}{2}}$, c'est-à-dire -1, quand on effectue cette substitution.

On aura donc

$$\frac{u-i}{u+i} = \sqrt{z-a}\,\varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant uniforme dans le voisinage de a. D'ailleurs, $\varphi(z)$ n'aura pas de pôle autour de a, car, le coefficient de i dans u étant positif, on ne peut avoir $u+i=0$. Pour la même raison $\varphi(z)$ ne peut avoir le point a lui-même comme pôle ou point singulier essentiel, car alors la fonction

$$(z-a)\varphi^2(z)$$

pourrait devenir aussi grande qu'on voudra dans le voisinage de a, et alors u s'approcherait autant qu'on voudrait de $-i$.

Il en résulte que $\varphi(z)$ est holomorphe dans le voisinage de a. Par suite, quand z tend vers a *d'une manière quelconque*, la fonction $u(z)$ tend vers i; mais on a

$$x=f(u),$$

d'où se déduit

$$F(z)=f(u);$$

quand u tend vers i, la fonction $f(u)$ tend vers *un*. On en conclurait que $F(z)$ tend vers *un* quand z se rapproche de a d'une manière quelconque; *le point a ne serait pas alors un point singulier essentiel.*

2° Le même raisonnement s'applique au second cas. Nous avons seulement alors

$$\frac{u-\rho}{u-\rho_0}$$

(en désignant par ρ la quantité complexe représentant A et ρ_0 sa conjuguée), qui se reproduira multiplié par $e^{-\frac{2\pi i}{3}}$. Nous aurons donc

$$\frac{u-\rho}{u-\rho_0} = (z-a)^{-\frac{1}{3}}\varphi(z),$$

et les mêmes raisonnements montrent que $\varphi(z)$ doit être holomorphe dans le voisinage de a et s'annuler pour $z=a$. Mais alors, quand z tend vers a d'une manière quelconque, u tend vers ρ, et l'on en conclut que la fonction

$$\mathrm{F}(z)$$

tend vers *zéro*, de quelque manière que z se rapproche de a, ce qui est contradictoire avec le fait que a est un point essentiel.

19. Il ne nous reste plus à examiner que le cas où la substitution (3) serait la substitution unité et celui où elle serait parabolique.

Examinons d'abord le cas de la *substitution unité*. La fonction $u(z)$ serait uniforme dans le voisinage de a. Le point a ne pourrait être pour elle un point singulier essentiel, car la fonction $u(z)$ s'approcherait alors autant qu'on veut de toute grandeur donnée, ce qui est impossible, puisque le coefficient de i dans u est positif.

Le point a ne peut non plus être un pôle, car le signe du coefficient de i, dans une fonction ayant un pôle en a, ne peut être invariable pour toute position de z autour de ce point. Il faut donc que $u(z)$ soit holomorphe dans le voisinage de a; or $u(a)$ ne peut être réelle, car alors $u(z)$ aurait dans le voisinage de a, pour certaines valeurs de z, sa partie imaginaire négative. La valeur de $u(a)$ est donc une valeur complexe dans laquelle le coefficient de i est positif et différent de zéro. La relation

$$\mathrm{F}(z) = f(u)$$

montre que $\mathrm{F}(z)$ tend vers une valeur déterminée, à savoir $f[u(a)]$, quand z tend vers a d'une manière quelconque. Nous arrivons toujours à la même contradiction.

Considérons enfin le cas de la *substitution parabolique*. Les points doubles des substitutions paraboliques du groupe arithmétique se déduisent tous, par une substitution de ce groupe, du point

à l'infini dans la direction de l'axe imaginaire. En effectuant donc préalablement sur u une substitution convenable, on peut supposer que la substitution (3) est de la forme

$$(u, \ u+1).$$

Donc nous avons la fonction $u(z)$ se transformant en $u(z)+1$, quand z tourne une fois autour de a dans le sens positif, et, par suite,

$$u(z)=\frac{1}{2\pi i}\log(z-a)+\varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant uniforme. On en tire

$$e^{2\pi i\, u(z)}=(z-a)e^{2\pi i\, \varphi(z)}.$$

Or, le module du premier membre ne dépasse pas l'unité ; il en résulte que $\varphi(z)$ aura en a un point ordinaire, car, dans le cas contraire, le second membre aurait en a un point essentiel, et, par suite, son module pourrait certainement dépasser *un*.

La forme de $u(z)$ montre que le coefficient de i est positif et devient infiniment grand, quand z se rapproche indéfiniment d'une manière quelconque de a. Or, pour toute valeur de

$$u=\xi+i\eta,$$

pour laquelle

$$\eta>\text{M},$$

M étant une quantité positive très grande, la fonction $f(u)$ est elle-même très grande. On le voit de suite, en ramenant le point dans le quadrilatère fondamental du groupe arithmétique par une substitution

$$(u, \ u+m),$$

m étant un entier positif ou négatif, et nous savons que $f(u)$ devient infinie pour le point à l'infini dans ce quadrilatère. Revenant donc à l'égalité

$$\text{F}(z)=f(u),$$

nous en concluons que, quelle que soit la manière dont z se rapproche de a, la fonction $\text{F}(z)$ augmente indéfiniment. Le point a serait donc un pôle pour $\text{F}(z)$ et la même impossibilité est encore mise en évidence.

20. Les contradictions qui viennent d'être successivement signalées montrent que l'hypothèse faite sur les racines des trois équations considérées est inadmissible, si a est un point singulier essentiel; nous avons donc démontré le théorème énoncé au paragraphe 15, auquel on peut encore donner la forme suivante :

Si $F(z)$ *désigne une fonction uniforme de* z *dans le voisinage de* a, *qui est pour elle un point singulier essentiel isolé, il ne peut pas arriver que les trois équations*

$$F(z) = A_1, \quad F(z) = A_2, \quad F(z) = A_3$$

n'aient pas simultanément une infinité de racines autour de a, *en désignant par* A_1, A_2, A_3 *trois constantes distinctes* (*la constante infinie n'étant pas exclue*).

Nous pouvons encore dire que :

Si les trois équations précédentes n'ont pas une infinité de racines autour de a, $F(z)$ *étant une fonction uniforme qui, dans un cercle* Γ, *décrit autour de* a, *pourrait avoir ce seul point comme point essentiel, on peut affirmer que* a *sera un pôle ou un point ordinaire de* $F(z)$.

21. De ce théorème général se déduisent immédiatement les deux propositions suivantes. *Soit* $G(z)$ *une fonction entière : si les deux équations*

$$G(z) = a, \quad G(z) = b,$$

a et b étant deux constantes finies distinctes, ont seulement un nombre limité de racines, la fonction entière $G(z)$ *sera un polynome*.

Le point à l'infini ne pourra être, en effet, pour la fonction, un point essentiel, car nous avons les trois équations

$$G(z) = a, \quad G(z) = b, \quad G(z) = \infty,$$

qui n'ont pas de racine dans le voisinage de ce point.

On a encore l'énoncé suivant, qui n'est qu'en apparence plus général : *Soit* $f(z)$ *une fonction uniforme pouvant avoir des pôles en nombre quelconque et un seul point singulier essentiel à l'in-*

fini. Si les trois équations

$$f(z) = \mathrm{A}, \quad f(z) = \mathrm{B}, \quad f(z) = \mathrm{C},$$

A, B, C *étant trois constantes distinctes (l'infini non exclu), n'ont qu'un nombre fini de racines, la fonction* $f(z)$ *sera une fonction rationnelle.*

22. Les théorèmes précédents s'étendent immédiatement aux fonctions uniformes sur une surface de Riemann. Représentons par $\mathrm{A}(z)$ une telle fonction, qu'on supposera n'avoir sur la surface que des points singuliers essentiels isolés. *Si les équations*

$$\mathrm{A}(z) = \alpha, \quad \mathrm{A}(z) = \beta, \quad \mathrm{A}(z) = \gamma$$

n'ont qu'un nombre limité de racines, la fonction $\mathrm{A}(z)$ *n'aura pas de singularités essentielles et elle sera, par suite, une fonction algébrique de* z, *ramifiée comme la fonction algébrique définissant la surface de Riemann* (¹).

V. — Sur quelques généralisations des théorèmes précédents; théorème de M. Landau.

23. Les théorèmes étudiés dans la Section précédente ont fait, dans ces dix dernières années, l'objet de nombreuses recherches. On s'est tout d'abord efforcé d'en donner des démonstrations indépendantes de la théorie des fonctions modulaires.

M. Borel, le premier, est parvenu, en ce qui concerne les fonctions entières, à donner une démonstration indépendante des fonctions modulaires, et il a même fait connaître des généralisations étendues. Dans son travail (²) sur les zéros des fonctions entières, il a eu surtout pour objet la démonstration de l'impossibilité de certaines identités; nous indiquerons son énoncé fondamental. Soit $\mu(r)$ une fonction positive croissant indéfiniment avec r; désignons par

$$\mathrm{G}_i(z)$$

(¹) E. Picard, *Sur une propriété de certaines fonctions analogues aux fonctions algébriques* (*Comptes rendus*, t. LXXXIX, 1879).

(²) E. Borel, *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XX).

une fonction entière dont le module maximum sur le cercle de rayon r est inférieur à

$$e^{\mu(r)}$$

et par $H_i(z)$ une fonction entière dont le module maximum est supérieur à

$$[\mu(r)]^{1+\alpha} \qquad (\alpha > 0).$$

M. Borel établit alors que l'*identité*

$$G_0(z) + G_1(z)e^{H_1(z)} + \ldots + G_n(z)e^{H_n(z)} = 0$$

ne peut avoir lieu que si tous les G *sont identiquement nuls.*

En particulier, pour $n = 2$, une pareille identité ne peut exister, G_0 étant une constante, G_1 et G_2 des polynomes : c'est le théorème énoncé plus haut sur les fonctions entières (§ 21).

Plus tard, M. Schottky ([1]) a donné une démonstration de mon théorème général sur les valeurs d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé, étudié dans la Section précédente, sans faire intervenir les fonctions modulaires; et il est revenu sur le même sujet dans un Mémoire récent ([2]). Je ne puis songer à indiquer la bibliographie des nombreux travaux se rapportant à ces questions. On la trouvera dans les Livres de la collection de M. Borel traitant de la théorie des fonctions et dans un Mémoire de M. Landau ([3]).

24. J'indiquerai seulement ici une généralisation extrêmement remarquable d'un des théorèmes précédents faite par M. Landau dans un ordre d'idées différent, et tout à fait inattendue ; elle a été publiée pour la première fois, dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin, en 1904. Voici l'énoncé de ce théorème :

Soit une fonction transcendante entière

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

([1]) SCHOTTKY, *Ueber den Picard'schen Satz und die Borel'schen Ungleichungen* (*Sitzungsberichte der K. Preussischen Akademie der Wissenschafften*, octobre 1904).

([2]) SCHOTTKY, *Ueber zwei Beweise der Allgemeinen Picard'schen Satzes* (même Recueil, novembre 1907).

([3]) E. LANDAU, *Ueber den Picard'schen Satz* (*Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich*), Bd. LI, 1906.

dans laquelle a_1 n'est pas nul; on peut trouver un nombre

$$R(a_0, a_1)$$

dépendant seulement de a_0 et de a_1, tel que, dans le cercle

$$|x| < R,$$

une au moins des deux équations

$$F(x) = 0, \qquad F(x) = 1$$

possède une racine.

Après l'avoir trouvé par une autre voie, M. Landau a donné une démonstration très simple de son théorème, utilisant les fonctions modulaires. Nous allons reproduire cette démonstration.

25. Reportons-nous, à cet effet, à la fonction modulaire

$$\nu(y)$$

envisagée au Tome II (p. 250), qui est le rapport de deux périodes convenables de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{du}{\sqrt{u(u-1)(u-y)}}.$$

Cette fonction multiforme $\nu(y)$ a les seuls points singuliers

$$0, \quad 1 \quad \text{et} \quad \infty,$$

et le coefficient de i dans $\nu(y)$ est toujours positif; de plus, la fonction inverse $\nu(y)$, c'est-à-dire la fonction y de v définie par

$$\nu(y) = v,$$

est holomorphe dans le demi-plan au-dessus de l'axe réel, au delà duquel elle ne peut être prolongée.

Ceci dit, reprenons la fonction

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

où a_1, par hypothèse, n'est pas nulle. Admettons que, dans un certain cercle de rayon r ayant l'origine pour centre et sur la circonférence qui le limite, les deux équations

$$F(x) = 0, \qquad F(x) = 1$$

n'aient, ni l'une ni l'autre, de racine. Il est clair qu'on aura

$$a_0 \neq 0 \quad \text{et} \quad a_0 \neq 1.$$

Soit, dans le voisinage de a_0, le développement d'une branche de la fonction $\nu(y)$

$$\nu(y) = c_0 + c_1(y - a_0) + c_2(y - a_0)^2 + \ldots$$

et formons

$$G(x) = \nu[F(x)].$$

D'après l'hypothèse faite sur F, la fonction $G(x)$ est une fonction holomorphe dans le cercle de rayon r; si on la développe suivant les puissances de x, on a

$$G(x) = c_0 + c_1 a_1 x + (c_1 a_2 + c_2 a_1^2) x^2 + \ldots.$$

Posons maintenant

$$H(x) = e^{i G(x)};$$

$H(x)$ sera ainsi holomorphe dans le cercle de rayon r, et l'on aura dans ce cercle et sur la circonférence

$$|H(x)| < 1 \quad \text{(égalité exclue).}$$

D'ailleurs, on a

$$H(x) = e^{c_0 i} + e^{c_0 i} c_1 a_1 i x + \ldots.$$

Or, si l'on a une fonction $\varphi(x)$ holomorphe autour de l'origine dans un cercle de rayon ρ, on a, d'après la formule de Cauchy

$$\varphi'(x) = + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(z)}{(z - x)^2} dz,$$

l'inégalité

$$|\varphi'(0)| \leq \frac{\text{maximum de } |\varphi(z)| \text{ pour } z = \rho}{\rho}.$$

Appliquons ce résultat à la fonction $H(x)$, et prenons $\rho = r$: nous obtenons

$$|e^{c_0 i} c_1 a_1 i| < \frac{1}{r} \quad \text{(égalité exclue).}$$

Or, c_1 n'est pas nul, d'après la propriété de la fonction inverse

rappelée plus haut. Nous avons donc

$$r < \frac{1}{|e^{c_0 i} c_1 a_1|}$$

et le second membre représente une certaine fonction dépendant de a_0 et a_1. *C'est la fonction que nous pouvons prendre comme fonction*

$$R(a_0, a_1)$$

de l'énoncé; nous sommes assuré que dans le cercle de rayon

$$r = R(a_0, a_1),$$

en y comprenant sa circonférence, la fonction entière deviendra égale à *zéro* ou à *un*.

26. Il est clair que le théorème de M. Landau généralise mon premier théorème sur les fonctions entières, tel qu'il a été énoncé Tome II (p. 251). On peut, en effet, supposer que pour une fonction entière $F(x)$, les coefficients a_0 et a_1 ne sont pas nuls; il suffit pour cela de changer d'origine, *à moins que* F, *bien entendu, ne soit une constante.* On détermine alors le cercle de rayon $R(a_0, a_1)$ à l'intérieur duquel (et sur le pourtour) il y a certainement au moins un point pour lequel $F(x)$ est égal à *un* ou *zéro*. Le théorème est donc établi.

27. L'expression

$$R(a_0, a_1)$$

trouvée plus haut est une fonction qui dépend d'une manière transcendante de a_0 et a_1. M. Hurwitz (1) a donné d'autres expressions. Ainsi, si l'on pose

$$\rho = 16 \frac{1}{|a_1|} \sqrt[4]{|a_0|^2} \sqrt{|a_0 - 1|},$$

il y aura certainement des points cherchés dans un cercle de rayon

$$\rho + \varepsilon,$$

ε étant une quantité positive prise aussi petite qu'on voudra.

---

(1) HURWITZ, *Ueber die Anwendung der elliptischen Modulfunktionen auf einen Satz der Allgemeinen Funktionentheorie* (*Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, Bd. XLIX, 1904).

Ne pouvant développer davantage ici cette intéressante théorie, j'énonce seulement une dernière remarque : c'est que, si le théorème de M. Landau que nous venons d'étudier était démontré pour un polynome de degré quelconque, il serait par là même établi pour une fonction entière quelconque. Malheureusement, comme le dit M. Landau, il semble que le théorème soit aussi caché pour un polynome que pour une fonction transcendante.

VI. — Sur les transcendantes uniformes satisfaisant à une équation du premier ordre et du premier degré.

28. Les théorèmes démontrés dans la quatrième Section de ce Chapitre permettent de faire quelques remarques intéressantes sur transcendantes uniformes satisfaisant à une équation du premier ordre et du premier degré

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

P et Q désignant deux polynomes en x et y premiers entre eux. Je les emprunterai à la thèse de M. Petrovitch (¹).

On peut tout d'abord, par une transformation homographique préalable, supposer que le degré de P par rapport à y surpasse de deux unités le degré de Q par rapport à cette même lettre.

Nous nous placerons donc dans cette hypothèse. De cette manière, la valeur $y = \infty$ est une valeur ordinaire, c'est-à-dire que l'intégrale qui, pour une valeur *arbitraire* x_0 de x, prend la valeur infinie, a un pôle au point x_0.

D'après les généralités étudiées au Tome II, nous pouvons marquer à l'avance sur le plan les points qui ne seraient pas pour une intégrale des points ordinaires, des pôles ou des points critiques algébriques. Une intégrale uniforme ne pourra donc avoir dans le plan qu'un nombre limité de points essentiels.

Nous allons maintenant distinguer quatre cas :

(¹) MICHEL PETROVITCH, *Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations différentielles algébriques* (*Comptes rendus*, 1894, et *Thèse de doctorat*, Paris, Gauthier-Villars).

1° Je suppose d'abord que l'équation

$$Q(x, \lambda) = 0,$$

considérée comme équation en λ, admette, pour x arbitraire, plus de *deux* racines distinctes. Désignons par

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \varphi_3(x)$$

trois de ces racines; ce seront des fonctions algébriques de x, qui seront ou non des branches d'une même fonction algébrique.

Pour une intégrale *uniforme* y de l'équation différentielle, on ne peut avoir

$$Q(x, y) = 0$$

que pour un nombre limité de points x, car, lorsque cette relation est remplie pour un certain système (y_0, x_0), il faut que l'on ait en même temps

$$P(x_0, y_0) = 0.$$

Sans cela, l'intégrale qui pour $x = x_0$ prend la valeur y_0 ne serait pas uniforme dans le voisinage de x_0 (t. II, p. 367). Par suite, pour l'intégrale uniforme y que nous étudions, les équations

(4) $$y = \varphi_1(x), \qquad y = \varphi_2(x), \qquad y = \varphi_3(x)$$

ne pourront avoir qu'un nombre limité de racines.

Ceci posé, envisageons le quotient

$$A(x) = \frac{(\varphi_2 - \varphi_3)(y - \varphi_1)}{(\varphi_2 - \varphi_1)(y - \varphi_3)}.$$

C'est une fonction de x n'ayant qu'un nombre limité de valeurs, et ne pouvant avoir qu'un nombre fini de singularités essentielles. Or les trois équations

$$A(x) = 0, \qquad A(x) = 1, \qquad A(x) = \infty$$

n'ont qu'un nombre limité de racines, comme il résulte immédiatement de ce que nous venons de dire sur les équations (4). Il résulte de là (§ 22) que $A(x)$ est une fonction algébrique et, par suite, y (qui est uniforme) est rationnelle. Ainsi, si l'équation $Q(x, \lambda) = 0$ a au moins trois racines distinctes, ***toute intégrale uniforme est rationnelle.***

2° Supposons en second lieu que l'équation $Q(x, \lambda) = 0$ ait seulement deux racines distinctes

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x),$$

et, en désignant par y une intégrale uniforme de l'équation, considérons le quotient

$$\frac{y - \varphi_1}{y - \varphi_2}.$$

Soit Y une seconde intégrale uniforme, et formons aussi le quotient

$$\frac{Y - \varphi_1}{Y - \varphi_2}.$$

En divisant ces deux quotients, nous obtenons l'expression

$$(5) \qquad \frac{(y - \varphi_1)(Y - \varphi_2)}{(y - \varphi_2)(Y - \varphi_1)}.$$

Elle n'a qu'un nombre limité de valeurs et ne prend les valeurs o, 1 et ∞ que pour un nombre limité de valeurs de x. Ceci résulte des propriétés, étudiées plus haut, des équations $y - \varphi = 0$, et de ce que, en dehors d'un nombre limité de points spéciaux, on ne peut avoir $y = Y$, ce qui entraînerait l'identité des intégrales. L'expression (5) est donc une fonction algébrique de x, et, par suite, *il ne peut y avoir deux intégrales uniformes qui soient des transcendantes distinctes,* en entendant par là que toute intégrale uniforme s'exprime algébriquement à l'aide d'une première intégrale de même nature.

3° Examinons ensuite l'hypothèse où l'équation $Q(x, \lambda) = 0$ n'a qu'une racine distincte; soit $\varphi_1(x)$ qui est alors nécessairement rationnelle. En posant

$$z = \frac{1}{y - \varphi_1},$$

l'équation différentielle proposée devient

$$\frac{dz}{dx} = S(x, z),$$

S étant un polynome en z et dépendant rationnellement de x. Si nous désignons par z_1, z_2, z_3 trois intégrales uniformes, le quo-

tient

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$

ne pourra devenir égal à 0, 1 et ∞ que pour un nombre limité de valeurs de x, et par suite l'expression précédente sera une fonction rationnelle de x. *Il ne peut donc y avoir plus de deux intégrales uniformes qui soient des transcendantes distinctes.*

4° Il ne reste plus à examiner que le cas où le dénominateur $Q(x, y)$ ne dépendrait pas de y. On a alors une équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = P(x, y),$$

P étant un polynome du second degré en y, et *il ne peut alors exister plus de trois intégrales uniformes transcendantes distinctes,* toute intégrale de l'équation s'exprimant à l'aide de trois d'entre elles.

Ainsi nous arrivons à la conclusion générale que, *pour une équation différentielle du premier ordre et du premier degré, il ne peut y avoir plus de trois intégrales uniformes qui soient des transcendantes distinctes.* Nous renverrons, pour une étude plus approfondie, au Mémoire cité plus haut de M. Petrovitch.

CHAPITRE XIV.

SUR CERTAINES CLASSES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES IRRÉGULIÈRES A L'INFINI.

I. — Généralités sur les valeurs des intégrales à l'infini dans une direction déterminée.

1. Désignons par $f(t)$ une fonction réelle de la variable réelle t, définie depuis une certaine valeur t_0 de t jusqu'à $t = +\infty$. Nous dirons, d'une manière générale, qu'une telle fonction est *limitée* si, à partir de t_0, elle reste en valeur absolue moindre qu'un certain nombre fixe qu'on puisse assigner; elle sera *illimitée* dans le cas contraire. Ceci posé, soient λ_1 et λ_2 deux nombres réels $(\lambda_1 > \lambda_2)$, et admettons que le produit

$$e^{\lambda_1 t} f(t)$$

soit illimité quand t varie de t_0 à $+\infty$, tandis qu'au contraire le produit

$$e^{\lambda_2 t} f(t)$$

tende vers zéro pour $t = +\infty$. Je dis qu'il existe un nombre λ_0 compris entre λ_1 et λ_2 tel que le produit

$$e^{(\lambda_0+\varepsilon)t}$$

est illimité, tandis que le produit

$$e^{(\lambda_0-\varepsilon)t}$$

a, pour $t = \infty$, la limite zéro, en désignant par ε une quantite positive aussi petite qu'on voudra. On le démontrera en partageant l'intervalle (λ_1, λ_2) en un certain nombre d'intervalles; il y aura

parmi ceux-ci un intervalle tel que, pour la limite supérieure, le produit correspondant sera illimité ou ne tendra pas vers zéro pour $t = \infty$, tandis que le produit correspondant à la limite inférieure aura zéro pour limite. On partagera de nouveau cet intervalle en un certain nombre d'autres, et l'on a ainsi une suite d'intervalles compris les uns dans les autres et tendant vers zéro. Ces intervalles auront donc une limite λ_0 et pour un intervalle

$$(\lambda_0 - \eta, \lambda_0 + \varepsilon),$$

ε et η étant des quantités positives aussi petites que l'on voudra, le produit

$$e^{(\lambda_0 - \eta)t} \times f(t)$$

aura zéro pour limite, tandis que le produit

$$e^{(\lambda_0 + \varepsilon)t} \times f(t)$$

sera illimité. Ce produit ne peut pas être limité, car alors le produit

$$e^{(\lambda_0 + \varepsilon')t} f(t) \qquad (0 < \varepsilon' < \varepsilon)$$

aurait pour limite zéro pour $t = +\infty$, et nous aurions donc mal choisi les intervalles.

Le nombre parfaitement déterminé λ_0, nous l'appellerons le nombre *caractéristique* correspondant à la fonction.

La notion de caractéristique se généralise pour un système de fonctions

$$f_1(t), \; f_2(t), \; \ldots, \; f_n(t),$$

définies de t_0 à $+\infty$. Si les produits

$$e^{\lambda t} f_1(t), \; e^{\lambda t} f_2(t), \; \ldots, \; e^{\lambda t} f_n(t)$$

ne tendent pas tous vers zéro pour $t = +\infty$, mais qu'il en soit ainsi pour les produits

$$e^{\mu t} f_1(t), \; e^{\mu t} f_2(t), \; \ldots, \; e^{\mu t} f_n(t),$$

il existera entre λ et μ un nombre λ_0 (qui peut être égal à λ), tel que les produits

$$e^{(\lambda_0 - \varepsilon)t} f_1(t), \; \ldots, \; e^{(\lambda_0 - \varepsilon)t} f_n(t)$$

tendent vers zéro, tandis que, parmi les produits

$$e^{(\lambda_0+\varepsilon)t}f_1(t), \quad \ldots, \quad e^{(\lambda_0+\varepsilon)t}f_n(t),$$

il y en a au moins un qui est illimité.

2. J'envisage maintenant un système d'équations linéaires du premier ordre

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

les a étant des fonctions réelles de la variable réelle t. *Je suppose que tous les a soient limités,* c'est-à-dire moindres qu'un nombre fixe M pour t compris entre t_0 et ∞. Posons

$$x_i = y_i e^{\lambda t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

λ étant une constante pour le moment arbitraire.

Le système devient

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= (a_{11}-\lambda)y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \frac{dy_2}{dt} &= a_{21}y_1 + (a_{22}-\lambda)y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dt} &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)y_n. \end{aligned}$$

En multipliant ces équations respectivement par $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et ajoutant, nous aurons

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)}{dt} = (a_{11}-\lambda)y_1^2 + (a_{22}-\lambda)y_2^2 + \ldots \\ \qquad\qquad + (a_{nn}-\lambda)y_n^2 + \ldots, \end{cases}$$

le second membre étant une forme quadratique en $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Si nous prenons pour λ une constante α suffisamment grande, le second membre sera une forme quadratique définie et négative, et

nous aurons par suite

$$\frac{d(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)}{dt}<0.$$

Par suite, quand t augmentera de t_0 à $+\infty$, la fonction

$$y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2$$

ira en diminuant. Il en résulte que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ restent en valeur absolue moindre qu'un nombre fixe, et, par suite, les produits

$$x_1 e^{-\alpha t}, \quad x_2 e^{-\alpha t}, \quad \ldots, \quad x_n e^{-\alpha t}$$

seront limités.

Nous pouvons prendre pareillement pour λ une constante β suffisamment petite en valeur relative pour que la forme définie dans le second membre de (2) soit positive, et alors nous aurons, de t_0 à $+\infty$,

$$\frac{d(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)}{dt}>0.$$

et, par suite, la fonction

$$y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2$$

ira constamment en croissant. Il en résulte que les produits

$$x_1 e^{-\beta t}, \quad x_2 e^{-\beta t}, \quad \ldots, \quad x_n e^{-\beta t}$$

ne peuvent tendre tous vers zéro.

En se reportant au paragraphe précédent, on peut alors énoncer le théorème suivant :

Tout système d'intégrales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *du système* (1) (*en excluant seulement* $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$) *admet un nombre caractéristique* λ_0 (¹).

Une des conséquences pratiques les plus intéressantes de ce théorème est que, étant donné un système tel que (1), à coefficients

(¹) Cet intéressant théorème est dû à M. Liapounoff, qui l'a fait connaître dans un Mémoire important publié en langue russe (Kharkoff, 1892) dans le *Bulletin de la Société mathématique de Kharkoff*. Ce Mémoire très étendu vient d'être traduit en français dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2ᵉ série, t. IX, 1908.

limités, *on peut trouver un nombre réel k, tel que les produits*

$$e^{kt}x_1,\quad e^{kt}x_2,\quad \ldots,\quad e^{kt}x_n$$

tendent vers zéro pour $t = +\infty$.

Il en sera évidemment de même, d'après les équations différentielles, de

$$\frac{dx_1}{dt}e^{kt},\quad \frac{dx_2}{dt}e^{kt},\quad \ldots,\quad \frac{dx_n}{dt}e^{kt}.$$

On conclut de là aussi que, *si dans l'équation différentielle*

$$\frac{d^m y}{dt^m} + p_1\frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \ldots + p_m y = 0,$$

les coefficients p sont des fonctions limitées quand la variable réelle t varie de t_0 à $+\infty$, on peut trouver un nombre k tel que

$$y e^{kt},\quad \frac{dy}{dt}e^{kt},\quad \ldots,\quad \frac{d^m y}{dt^m}e^{kt}$$

tendent vers zéro pour $t = +\infty$.

3. Nous avons supposé que, dans les équations différentielles, les coefficients étaient réels. Si ces coefficients étaient des fonctions complexes de la variable réelle t, on pourrait employer les mêmes considérations. En posant, en effet,

$$x_1 = x'_1 + i x''_1,\quad \ldots,\quad x_n = x'_n + i x''_n,$$

et de même pour les coefficients, nous aurions un système de $2n$ équations auxquelles s'appliquent les résultats précédents. Il y a dans tous les cas un nombre caractéristique, la variable t restant toujours réelle t_0 et $+\infty$.

On peut aussi considérer le cas où la variable t prend des valeurs complexes, mais en la faisant grandir indéfiniment avec un argument déterminé, et en supposant que dans ces conditions les coefficients a aient des modules limités. On posera en effet

$$t = re^{i\omega},$$

et l'on aura une équation où la variable sera la quantité réelle r que l'on fera augmenter indéfiniment, pendant que ω reste constant. *Il y a alors un nombre caractéristique pour un argument déterminé.*

D'après le paragraphe 2, on pourra trouver un nombre k tel que

les produits

$$e^{kr}x_1, \quad \ldots, \quad e^{kr}x_n$$

tendent vers zéro pour $r = +\infty$. Donc les produits

$$e^{kt(\cos\omega' - i\sin\omega)}x_m \qquad (m = 1, \ldots, n)$$

tendront vers zéro et, par conséquent, on pourra trouver une constante k' telle que les produits

$$e^{k't}x_m$$

tendent vers zéro quand t s'éloignera à l'infini avec l'argument ω. Ce résultat nous sera plus tard très utile.

4. Dans le cas où les coefficients a ont une valeur déterminée pour $t = \infty$, on pourra trouver une limite inférieure du nombre k dont nous avons parlé à la fin du paragraphe **2**, en prenant

$$k = -\lambda,$$

λ étant telle que la forme quadratique, qui figure dans le second membre de (2) en y faisant $t = \infty$, soit définie et négative.

Ainsi, prenons par exemple l'équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dy}{dx} + qy,$$

où p et q sont continues de t_0 à $+\infty$, et prennent les valeurs p_0 et q_0 pour $t = +\infty$. Nous considérerons le système

$$\frac{dy}{dx} = y',$$

$$\frac{dy'}{dx} = py' + qy,$$

et, en posant

$$y = z\,e^{\lambda x}, \qquad y' = z'\,e^{\lambda x},$$

nous avons le système

$$\frac{dz}{dx} = z' - \lambda z,$$

$$\frac{dz'}{dx} = (p - \lambda)z' + qz.$$

Nous devons prendre λ de telle sorte que la forme quadratique

$$-\lambda z^2 + (p - \lambda) z'^2 + (q + 1) z z'$$

soit définie et négative; ce qui nous conduit à considérer l'équation

$$(q_0 + 1)^2 + 4\lambda(p_0 - \lambda) = 0;$$

les racines de cette équation sont réelles, l'une est positive et l'autre négative. Soit a une quantité supérieure à la racine positive de cette équation; nous sommes assuré que

$$y\, e^{-ax}$$

tend vers zéro, quand x augmente indéfiniment.

5. Voici encore, dans un ordre d'idées analogue, quelques remarques sur la façon dont se comporte l'intégrale pour x très grand, mais c'est le rapport

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y}$$

que nous allons considérer. Reprenons l'équation ci-dessus

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + q y = 0.$$

En posant

$$z = \frac{y'}{y},$$

nous avons l'équation de Riccati

$$(3) \qquad \frac{dz}{dx} = -(z^2 + pz + q).$$

Considérons d'abord le cas où l'équation

$$z^2 + p_0 z + q_0 = 0 \qquad [p_0 = p(+\infty),\ q_0 = q(+\infty)]$$

a ses racines réelles, que nous désignerons par α et β ($\alpha > \beta$). Nous appellerons a et b les deux *racines* de l'équation

$$z^2 + pz + q = 0,$$

qui sont des fonctions de x tendant vers α et β pour $x = \infty$. Diverses

circonstances peuvent se présenter relativement à a et b, suivant que chacun d'eux se rapproche de sa limite, en croissant ou décroissant; supposons que nous ayons

$$a > \alpha$$

et considérons une intégrale de (3), supérieure à a pour la valeur initiale x_0, intégrale que nous désignerons par z. Nous faisons croître x de x_0 à $+\infty$, et nous voulons voir ce que devient l'intégrale z. Celle-ci va d'abord décroître, et elle décroîtra tant qu'elle sera supérieure à a. Or, elle ne peut atteindre a, car, aussitôt qu'elle serait descendue au-dessous de a, elle devrait croître, $\frac{dz}{dx}$ se trouvant alors positif. Il en résulte que z ira constamment en décroissant en restant toujours supérieure à α; il y aura donc une limite pour l'intégrale z, quand x augmentera indéfiniment. Cette limite ne pourra être que α, car, si z tendait vers un nombre α' supérieur à α, l'équation

$$(4) \qquad x - x_0 = -\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z^2 + pz + q}$$

conduirait à une contradiction, le second membre restant fini quand z tend vers α'. *Notre intégrale z a donc α pour limite.*

Supposons maintenant

$$a < \alpha$$

et prenons toujours une intégrale dont la valeur initiale pour $x = x_0$ soit supérieure à a. L'intégrale z ira encore en diminuant, tant qu'elle ne deviendra pas égale à a. Si cette circonstance se réalise, z ira ensuite en croissant, mais sans pouvoir atteindre de nouveau a, car elle ne pourrait alors dépasser a, devant à la fois, à ce moment, croître et décroître. Dans tous les cas z aura, par conséquent, une limite, et l'on voit comme plus haut que cette limite est α.

Nous venons de voir que toutes les intégrales, qui deviennent à un certain moment supérieures à a, ont α pour limite. La même conclusion s'applique aux intégrales qui deviennent, à un certain moment, égales à une valeur comprise entre a et b, car elles vont alors en croissant et se rapprochent indéfiniment de α.

Le seul cas qui reste à examiner est celui où l'on aurait constam-

ment

$$z < b.$$

Quand b est supérieur à β, il peut arriver, si la valeur initiale de z est entre β et b, que z ait pour $x = \infty$ la limite β. Si la limite de z n'est pas β (ce qui arrivera, en général), z continuera indéfiniment à décroître jusqu'à $-\infty$, et la relation (4) montre que z deviendra égale à $-\infty$ pour une valeur finie de x. Il y aura ensuite pour z passage de $-\infty$ à $+\infty$, et nous nous trouverons dans le cas précédemment examiné, c'est-à-dire que la limite pour $x = \infty$ de notre intégrale est encore α.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

La limite de $\frac{y'}{y}$ pour $x = \infty$ existe toujours; elle est, en général, égale à α et peut exceptionnellement être égale à β.

6. Tout ceci suppose que l'équation

$$z^2 + p_0 z + q_0 = 0$$

ait ses racines réelles. Les conclusions sont tout autres, si l'équation a ses racines imaginaires. Dans ce cas, $\frac{dz}{dx}$ sera toujours négatif et, par suite, z ira toujours en diminuant, à partir d'une valeur suffisamment grande de x.

Je dis que, pour une valeur finie de x, l'intégrale z deviendra égale à $-\infty$. Car d'abord il n'est pas possible que, pour $x = +\infty$, z ait une limite finie déterminée; c'est ce qu'on verra en refaisant le raisonnement du paragraphe précédent. Ensuite, il n'est pas possible que z atteigne seulement la valeur $-\infty$, pour $x = +\infty$, comme le montre encore la relation (4), dont le premier membre augmenterait indéfiniment, tandis que le second resterait fini.

Toute intégrale oscillera alors une infinité de fois entre $+\infty$ et $-\infty$, avec passage brusque de $-\infty$ à $+\infty$. Telle est l'équation

$$\frac{dz}{dx} = -z^2 - 1,$$

dont l'intégrale est

$$z = \operatorname{tang}(x_0 - x).$$

7. En revenant au cas des racines réelles α et β, il est facile d'établir un lien entre le résultat du paragraphe 5 et les théorèmes démontrés plus haut. Puisque

$$\lim \frac{y'}{y} = \alpha,$$

on peut écrire

$$\frac{y'}{y} = \alpha + \varphi(x),$$

la fonction $\varphi(x)$ ayant zéro pour limite pour $x = \infty$. Il en résulte que

$$y = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} [\alpha + \varphi(x)] dx}.$$

Si donc on prend le produit

$$y \times e^{-ax} \qquad (a > \alpha),$$

il en résultera que ce produit tend vers zéro, quand x augmente indéfiniment. Nous retrouvons donc bien le résultat obtenu plus haut.

8. Nous allons considérer maintenant le cas où les coefficients de l'équation linéaire

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + q y = 0$$

sont des fonctions complexes de la variable réelle x, ces coefficients tendant vers p_0 et q_0 quand x tend vers $+\infty$. En posant

$$\frac{y'}{y} = u,$$

nous avons l'équation

$$\frac{du}{dx} + u^2 + pu + q = 0.$$

Supposons que l'équation

$$u^2 + p_0 u + q_0 = 0$$

ait pour racines α et β, la partie réelle de α étant plus grande que celle de β.

Soit

$$V = \log \frac{u-\alpha}{u-\beta};$$

on aura

$$(5) \qquad \frac{dV}{dx} = (\beta - \alpha)\frac{u^2 + pu + q}{u^2 + p_0 u + q_0}.$$

Soient $|u-\alpha| = r$ et $|u-\beta| = \rho$. Nous désignerons par ε une quantité positive fixe, mais aussi petite qu'on voudra. Dans le plan de la variable complexe u, les deux équations

$$\log \frac{r}{\rho} = -\frac{1}{\varepsilon}, \qquad \log \frac{r}{\rho} = +\frac{1}{\varepsilon}$$

représentent deux petits cercles C et C′, comprenant respectivement à leur intérieur les points α et β. Si u est tel que

$$\left|\log \frac{r}{\rho}\right| < \frac{1}{\varepsilon},$$

la partie réelle du second membre de l'équation (5) sera négative, si x est suffisamment grand; en effet, le dénominateur restera fini, et pour $x = \infty$ le numérateur devient égal au dénominateur et, par suite, comme la partie réelle de $\beta - \alpha$ est négative, l'assertion est évidente. Nous aurons ainsi, en posant

$$V = v + iv',$$

$\frac{dv}{dx}$ négatif dans les conditions indiquées. On en conclut donc que, pour x très grand, la fonction réelle v va en diminuant du moment qu'elle est comprise entre $-\frac{1}{\varepsilon}$ et $+\frac{1}{\varepsilon}$.

Supposons que pour la valeur initiale x_0, prise assez grande, v soit compris dans cet intervalle; il ira en diminuant, et, s'il descend au-dessous de $-\frac{1}{\varepsilon}$, il lui restera toujours inférieur. Dans ce dernier cas, v aura nécessairement $-\infty$ pour limite, puisque ε est aussi petit que l'on veut, et *u aura alors α pour limite*.

On pourrait craindre que v n'atteignît jamais $-\frac{1}{\varepsilon}$, et eût, par suite, allant toujours en décroissant, une certaine limite finie l; u resterait toujours dans ces conditions à l'extérieur des courbes C

et C'. L'équation (5) nous donne

$$\frac{dv}{dx} = \mathfrak{R}\left[(\beta - \alpha)\frac{u^2 + pu - q}{u^2 - p_0 u - q_0}\right],$$

en désignant par la lettre $\mathfrak{R}(a)$ la partie réelle de la quantité a : d'où nous concluons

$$x - x_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\mathfrak{R}\left[(\beta - \alpha)\frac{u^2 + pu + q}{u^2 + p_0 u + q_0}\right]};$$

le dénominateur ne s'annulerait pas à partir d'une valeur suffisamment grande de x, et il serait très voisin de $\mathfrak{R}(\beta - \alpha)$. Donc, v tendant vers l, le second membre resterait fini, tandis que le premier devrait augmenter indéfiniment.

Le seul cas où u pourrait ne pas avoir α pour limite serait celui où, ε étant donné, il arriverait qu'à partir de la valeur de x, pour laquelle $\frac{dv}{dx}$ est négatif quand v est compris entre $-\frac{1}{\varepsilon}$ et $+\frac{1}{\varepsilon}$, cette fonction v fût toujours supérieure à $\frac{1}{\varepsilon}$. Mais alors la limite de v serait nécessairement $+\infty$ et, *par conséquent, u aurait β pour limite.*

Nous arrivons donc à la même conclusion qu'au paragraphe 5, mais dans un cas plus général : *la limite de u est en général α, et elle peut cependant exceptionnellement être égale à β* [1].

On tirerait de ce résultat la même conclusion relative à l'existence d'un nombre a tel que

$$y\, e^{-ax}$$

ait zéro pour limite, quand x augmente indéfiniment; mais on doit remarquer qu'avec ce mode de raisonnement le cas où les parties réelles de α et β sont égales se trouve ici exclu : nous savons alors, d'après le paragraphe 6, que $\frac{y'}{y}$ peut ne pas avoir de limite.

M. Poincaré a étendu le théorème que nous venons d'établir pour une équation du second ordre à une équation d'ordre quelconque.

---

[1] Ce théorème est dû à M. Poincaré, qui l'a établi dans son Mémoire de l'*American Journal of Mathematics* (Vol. VII, n° 3), *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies*. Comparer sa démonstration avec celle que nous donnons dans le texte.

et il a démontré le théorème suivant, que nous nous bornerons à énoncer.

Considérons l'équation linéaire d'ordre n

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0,$$

et soient $p_1^0, \ldots, p_n^0$ les valeurs de $p_1, \ldots, p_n$ pour $x = \infty$. En supposant que les racines de l'équation

$$z^n + p_1^0 z^{n-1} + \ldots + p_n^0 = 0$$

aient leurs parties réelles distinctes, *le quotient* $\frac{y'}{y}$ *a toujours une limite qui est, en général, la racine dont la partie réelle est la plus grande, mais qui peut exceptionnellement, pour certaines intégrales, être égale à une des autres racines.*

II. — Sur une classe particulière d'équations linéaires auxquelles s'applique une transformation de Laplace. Équations à coefficients du premier degré et équations à coefficients constants.

9. Les équations dont nous voulons parler sont les équations de la forme

$$P_0 \frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + P_m y = 0,$$

où les coefficients P sont des polynomes de degré p. Nous traiterons dans cette Section le cas le plus simple de $p = 1$, qui est d'ailleurs celui où la méthode réussit d'une manière complète.

Cherchons, avec Laplace, à exprimer y à l'aide d'une intégrale

$$y = \int_\alpha^\beta v(z)\, e^{zx}\, dz,$$

dans laquelle les limites α et β sont des quantités indépendantes de x, que l'on déterminera ultérieurement, et $v(z)$ représente une fonction inconnue de z. On aura

$$\frac{dy}{dx} = \int_\alpha^\beta v(z) z\, e^{zx}\, dz,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \int_\alpha^\beta v(z) z^m\, e^{zx}\, dz.$$

Calculons les produits

$$xy,\quad x\frac{dy}{dx},\quad \ldots,\quad x\frac{d^m y}{dx^m}.$$

En intégrant par parties, il vient

$$xy = \int_\alpha^\beta v x e^{zx}\,dz = (v e^{zx})_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \frac{dv}{dz} e^{zx}\,dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x\frac{d^m y}{dx^m} = \int_\alpha^\beta v(z) z^m x e^{zx}\,dz = (v z^m e^{zx})_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \frac{d(vz^m)}{dz} e^{zx}\,dz.$$

Supposons la fonction v et les constantes α et β telles que

$$(v e^{zx})_\alpha^\beta = 0,\qquad \ldots,\qquad (v z^m e^{zx})_\alpha^\beta = 0.$$

En posant

$$P_0 = a_0 x + b_0,\qquad P_1 = a_1 x + b_1,\qquad \ldots,\qquad P_m = a_m x + b_m,$$

l'équation différentielle devient

$$\int_\alpha^\beta \left[-a_0 \frac{d(vz^m)}{dz} + b_0 v z^m - \ldots \right] e^{zx}\,dz = 0.$$

L'expression entre crochets ne dépend pas de x. Nous égalerons donc tout naturellement à zéro cette expression pour déterminer v, qui se trouvera alors satisfaire à une équation de la forme

$$\frac{dv}{dz} P(z) - v Q(z) = 0,$$

$P(z)$ et $Q(z)$ étant des polynomes de degré m en z.

En nous plaçant donc dans le cas général où les a et b sont des constantes quelconques, on aura

$$\frac{\frac{dv}{dz}}{v} = \frac{Q(z)}{P(z)} = \mu + \frac{\lambda_1}{z - a_1} + \ldots + \frac{\lambda_m}{z - \alpha_m}$$

et l'on prendra

$$v = e^{\mu z}(z - \alpha_1)^{\lambda_1}(z - \alpha_2)^{\lambda_2}\ldots(z - \alpha_m)^{\lambda_m}.$$

Il s'agit maintenant de déterminer α et β; c'est ce qui peut se faire de manières variées.

10. Quand $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ont leurs parties réelles positives, on pourra prendre

$$\alpha = \alpha_1, \qquad \beta = \alpha_i \qquad (i = 2, \ldots, m)$$

et intégrer en prenant un chemin quelconque de α_1 à α_i. Les conditions

$$(v z^k e^{zx})_{\alpha}^{\beta} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

sont bien vérifiées, puisque v s'annule alors pour $z = \alpha$ et pour $z = \beta$. On obtiendra ainsi $m - 1$ intégrales visiblement holomorphes dans tout le plan; il résultera de ce que nous allons dire plus bas qu'elles sont linéairement indépendantes.

On peut obtenir ces $m - 1$ intégrales d'une manière un peu différente qui conviendra, quels que soient les signes des parties réelles des λ. Nous procéderons comme nous l'avons fait plus haut dans le cas des intégrales hypergéométriques (p. 321). Soit a un point quelconque. Nous considérons un chemin fermé C_1 partant de a et y revenant, après avoir tourné autour de α_1, et pareillement un chemin fermé C_2 partant de a et y revenant après avoir tourné autour de α_2. Nous allons prendre

$$\alpha = \beta = a,$$

le chemin total d'intégration étant formé des parties suivantes : C_1 parcouru dans le sens positif, puis C_2 parcouru dans le sens positif, ensuite C_1 parcouru dans le sens négatif, et enfin C_2 parcouru aussi dans le sens négatif. Dans ces conditions, la fonction v retrouve à la fin sa valeur initiale, et les conditions voulues sont bien vérifiées. Chaque combinaison (α_1, α_i) nous donne ainsi une intégrale holomorphe.

11. On peut adopter bien d'autres chemins d'intégration; les chemins suivants vont nous conduire à m intégrales, dont il sera intéressant d'étudier les valeurs pour x réel positif et très grand. Nous nous plaçons dans le cas tout à fait général *où aucune relation spéciale d'égalité n'existe entre les coefficients de l'équation différentielle.*

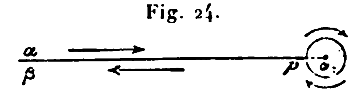
Prenons un des points α, soit α_1. Par ce point je mène, du côté des ξ négatifs, une parallèle P à l'axe ξ des quantités réelles, en ayant

posé

$$z = \xi + i\eta.$$

Nous allons prendre, comme chemin d'intégration, une sorte de lacet ayant son origine à l'infini négatif sur cette droite P. Le point α

Fig. 24.



représente dans la figure le point à l'infini sur P; le lacet se compose de la portion αp, d'un cercle C de rayon r, et de la portion $p\beta$, le point β coïncidant à l'infini avec α sur la droite P.

En supposant que la partie réelle de x soit supérieure à celle de $-\mu$, l'intégrale correspondante

$$\int_\alpha^\beta e^{\mu z}(z-\alpha_1)^{\lambda_1}\ldots(z-\alpha_m)^{\lambda_m}e^{zx}\,dz$$

aura un sens, et les conditions complémentaires seront vérifiées. Nous obtenons donc ainsi m intégrales de l'équation différentielle. Nous allons chercher comment se comportent ces intégrales pour x positif et très grand.

Nous ne diminuerons pas la généralité en supposant $\alpha_1 = 0$ et remplaçant x par $x-\mu$, ce qui revient à supposer $\mu = 0$. Nous avons alors l'intégrale

$$\int z^{\lambda_1}(z-\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots(z-\alpha_m)^{\lambda_m}e^{zx}\,dz.$$

Prenons d'abord l'intégrale

$$\int_{-r}^{-\infty} z^{\lambda_1}(z-\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots(z-\alpha_m)^{\lambda_m}e^{zx}\,dz.$$

Je dis qu'elle tend vers zéro, quand x augmente indéfiniment en étant positif. On a, en effet, pour z négatif et inférieur à $-r$,

$$|z^{\lambda_1}(z-\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots(z-\alpha_m)^{\lambda_m}| < e^{-\varepsilon z},$$

ε étant une quantité positive convenable. L'intégrale sera donc en valeur absolue moindre que la valeur absolue de l'intégrale

$$\int_{-r}^{-\infty} e^{z(x-\varepsilon)}\,dz, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{e^{-r(x-\varepsilon)}}{x-\varepsilon},$$

et tendra, par conséquent, vers zéro pour $x = \infty$. Pareillement, le produit de l'intégrale par x^k, k étant une constante quelconque, tend vers zéro pour x infini.

Il faut maintenant étudier l'intégrale le long du cercle C, en partant de p et y revenant. Nous commencerons par envisager l'intégrale

$$\int_C z^\lambda e^{zx}\, dz$$

le long de ce cercle, et par chercher la limite du produit

$$x^{\lambda+1} \int_C z^\lambda e^{zx}\, dz$$

pour $x = +\infty$. Posons $xz = -y$; nous aurons, à un facteur numérique près, l'intégrale

$$\int y^\lambda e^{-y}\, dy,$$

prise le long d'un cercle Γ de rayon rx, et en partant du point rx dans le plan de la variable complexe y. Cette intégrale est une fonction bien déterminée de λ; quand λ a sa partie réelle supérieure à -1, on voit de suite que l'intégrale a pour valeur

$$(1 - e^{2\lambda\pi i}) \int_{+rx}^{0} y^\lambda e^{-y}\, dy$$

et par suite, pour $x = \infty$, nous avons la limite

$$(e^{2\lambda\pi i} - 1)\, \Gamma(\lambda + 1),$$

$\Gamma(\lambda + 1)$ désignant la fonction eulérienne de deuxième espèce.

Ce résultat sera général, quelle que soit la valeur de la partie réelle de λ. On remarquera que ce produit est différent de zéro, sauf quand λ est un entier positif ou nul. Quand λ est un entier négatif, la fonction Γ devenant infinie, le produit n'est pas nul.

Si nous revenons maintenant à l'intégrale proposée, nous développerons, z ayant un module suffisamment petit,

$$z^{\lambda_1}(z - a_2)^{\lambda_2} \ldots (z - a_m)^{\lambda_m}$$

en série de la forme

$$A_0 z^{\lambda_1} + A_1 z^{\lambda_1+1} + A_2 z^{\lambda_1+2} + \ldots,$$

et, en appliquant alors le résultat que nous venons de trouver, il apparaît que le premier terme de ce développement donne seul une limite différente de zéro, quand, multipliant l'intégrale par x^{λ_1+1}, on fait $x = +\infty$ (on exclut, bien entendu, le cas où λ_1 serait un entier positif). Quelques explications sont cependant nécessaires pour être complètement rigoureux.

Reprenons, en supposant, comme il est permis, le rayon r du cercle C suffisamment petit, le produit

$$x^{\lambda_1+1}\int_C (A_0 z^{\lambda_1} + A_1 z^{\lambda_1+1} + \ldots) e^{zx}\, dz.$$

Désignons par R_n le reste de la série

$$A_0 + A_1 z + \ldots$$

quand on s'arrête après le terme $A_n z^n$. On sait que, étant donnée une série entière, on peut trouver deux nombres μ et ρ, tels que

$$|A_n| < \mu\rho^n,$$

et l'on aura alors

$$|R_n| < \frac{\mu\rho^{n+1}}{1 - r\rho}|z|^{n+1}.$$

Nous avons à étudier la somme

$$(\mathrm{S})\quad \left\{\begin{aligned} &x^{\lambda_1+1}\int_C A_0 z^{\lambda_1} e^{zx}\, dz + \ldots + x^{\lambda_1+1}\int_C A_n z^{\lambda_1+n} e^{zx}\, dz \\ &\qquad\qquad + x^{\lambda_1+1}\int_C R_n z^{\lambda_1} e^{zx}\, dz. \end{aligned}\right.$$

On voit de suite, en posant $zx = -y$, que la dernière intégrale est égale à

$$\int_A R_n y^{\lambda_1} e^{-y}\, dy,$$

en désignant par A un lacet dans le plan de la variable y partant du point rx et y revenant, après avoir tourné autour de l'origine. Son module est donc, à un facteur numérique près ne dépendant que de λ_1, moindre que le module de

$$\frac{\mu(r\rho)^{n+1}}{1 - r\rho}.$$

Donc, *quel que soit* x, on peut prendre n assez grand pour que le reste de la somme S soit inférieur à tel nombre qu'on voudra, car on peut supposer $r\rho < 1$. On fera maintenant croître x indéfiniment, et pour les autres termes de (S), qui sont en nombre fini, on n'a qu'à appliquer ce que nous avons dit plus haut. Le premier seul donne une limite différente de zéro.

Nous pouvons donc conclure en disant que, sauf le cas exclu, le produit de l'intégrale par x^{λ_1+1} a une limite finie et différente de zéro pour $x = +\infty$.

On a supposé $\alpha_1 = 0$. En donnant à α_1 une valeur quelconque et rétablissant le terme dépendant de μ, nous reviendrons à l'intégrale

$$y_1 = \int e^{\mu z}(z-\alpha_1)^{\lambda_1}\dots(z-\alpha_m)^{\lambda_m} e^{zx}\,dz,$$

relative au lacet qui correspond à α_1. Pour être ramené au cas de $\alpha_1 = 0$, il suffit de remplacer z par $\alpha_1 + z$, et c'est par suite au produit

$$y_1 e^{-\alpha_1 x}$$

que nous avons à appliquer le résultat qui vient d'être établi. Nous avons donc le théorème suivant, qui résume cette discussion :

En désignant par y_1 l'intégrale correspondant à α_1, le produit

$$y_1 e^{-\alpha_1 x} x^{\lambda_1+1}$$

a une limite finie et différente de zéro pour $x = +\infty$.

12. Les m points singuliers α nous donnent ainsi m intégrales

$$y_1, \quad y_2, \quad \dots, \quad y_m.$$

Le théorème précédent va nous permettre aisément de démontrer qu'elles sont linéairement indépendantes. Supposons, en effet, que nous ayons la relation

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m = 0.$$

Rangeons les α dans l'ordre

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \dots, \quad \alpha_m,$$

en supposant qu'ils soient ainsi rangés par ordre décroissant de gran-

deur de leur partie réelle : nous aurons

$$C_1 y_1 e^{-\alpha_1 x} x^{\lambda_1+1} + C_2 y_2 e^{-\alpha_1 x} x^{\lambda_1+1} + \ldots + C_m y_m e^{-\alpha_1 x} x^{\lambda_1+1} = 0.$$

Faisons tendre x vers l'infini ; tous les termes, sauf le premier, ont zéro pour limite, puisqu'on a

$$y_2 e^{-\alpha_1 x} x^{\lambda_1+1} = (y_2 e^{-\alpha_2 x} x^{\lambda_2+1}) \times (e^{(\alpha_2-\alpha_1)x} x^{\lambda_1-\lambda_2})$$

et le premier facteur a une limite finie, tandis que le second tend vers zéro. Nous aurons donc

$$C_1 = 0$$

et, en continuant ainsi, nous trouverions

$$C_2 = \ldots = C_m = 0.$$

Le théorème est, par suite, établi.

13. Nous avons supposé que nous étions dans le cas général. Bien des cas particuliers peuvent se présenter ; leur étude ne présente pas de difficultés sérieuses. Contentons-nous de considérer le cas où il y aurait deux racines égales pour le polynome $P(z)$ (§ 9). Nous aurions alors, en supposant $\alpha_1 = \alpha_2$,

$$\frac{\frac{dv}{dz}}{v} = \mu + \frac{\lambda_2}{(z-\alpha_1)^2} + \frac{\lambda_1}{z-\alpha_1} + \frac{\lambda_3}{z-\alpha_3} + \ldots,$$

et, par suite,

$$v = e^{\mu z} e^{-\frac{\lambda_2}{z-\alpha_1}} (z-\alpha_1)^{\lambda_1} (z-\alpha_3)^{\lambda_3} \ldots.$$

On pourra toujours considérer un lacet analogue à celui que nous avons formé tout à l'heure, qui nous donnera une première intégrale. On voit moins immédiatement comment on pourra avoir une seconde intégrale, celle qui correspond à un chemin joignant α_1 à α_2 quand ces deux points sont distincts. Il est possible d'approcher du point α_1 de telle sorte que v tende vers zéro. Soit

$$z - \alpha_1 = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$$

et soit

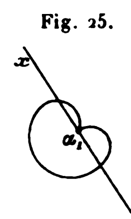
$$-\frac{\lambda_2}{z-\alpha_1} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{R} [\cos(\theta+\alpha) - i \sin(\theta+\alpha)].$$

Il faudra que $\cos(\theta + \alpha)$ soit négatif. Il y aura donc une certaine direction $\alpha_1 x$, et d'un certain côté de celle-ci (à droite par exemple dans la figure 25) on aura les directions pour lesquelles

$$e^{-\frac{\lambda_1}{z-\alpha_1}}$$

tend vers zéro, quand z se rapproche de α_1. Si l'on prend alors un chemin partant de α_1 dans une de ces directions et revenant en α_1

Fig. 25.



également à droite de $\alpha_1 x$, mais après être passé à sa gauche, l'intégrale correspondante ne sera pas nulle en général et donnera une seconde solution de l'équation linéaire correspondant à la racine α_1.

14. Indiquons, comme exemple, une équation rencontrée par Bessel dans des recherches de Mécanique céleste :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2m\frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

En appliquant les résultats précédents, on a

$$\frac{dv}{dz}(1+z^2) = 2vz(m-1)$$

et, par suite,

$$v = (1-z^2)^{m-1}.$$

On a ici

$$a_1 = -i, \qquad a_2 = -i.$$

En particulier, l'intégrale holomorphe sera donnée par l'intégrale définie

$$\int_{-i}^{+i} (1-z^2)^{m-1} e^{zx}\,dz,$$

qui n'a de sens d'ailleurs que si la partie réelle de m est positive. En changeant z en zi, on ramènera immédiatement l'intégrale précédente

à la forme

$$\int_{-1}^{+1} (1-z^2)^{m-1} \cos zx \, dz,$$

dont le développement en série entière est bien facile.

Citons encore l'équation, très voisine de la précédente,

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - u = 0,$$

qui se déduit de l'équation aux dérivées partielles

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$$

quand on suppose que u ne dépend que de la distance

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

L'application de la méthode de Laplace conduit à l'intégrale

$$u = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{zr}\, dz}{\sqrt{z^2 - 1}},$$

qui donne la solution du problème de l'équilibre calorifique d'une plaque indéfinie rayonnant au dehors, avec une source à l'origine, problème correspondant à l'équation (α).

L'intégrale u est nulle pour $r = \infty$, et l'on démontre aisément que, pour $r = 0$, u devient infini comme

$$\log \frac{1}{r},$$

ce qui correspond à la source calorifique placée à l'origine.

15. Cherchons encore ce que donne la méthode de Laplace pour une équation à coefficients constants

$$a_0 \frac{d^m y}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + a_m y = 0.$$

En posant

$$y = \int_\alpha^\beta v \, e^{zx}\, dz,$$

et faisant la substitution dans le premier membre de l'équation diffé-

rentielle, il vient, comme résultat de la substitution,

$$\int_\alpha^\beta v f(z)\, e^{zx}\, dz,$$

en posant

$$f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m.$$

Nous ne pouvons pas ici former l'équation différentielle donnant v. L'application immédiate de la méthode ne donnerait donc que $v = 0$. Mais l'intégrale précédente sera encore nulle si nous prenons $\alpha = \beta$, et si nous intégrons le long d'un contour fermé à l'intérieur duquel le produit

$$v f(z)$$

soit holomorphe. Ainsi, l'équation proposée sera vérifiée si l'on prend

$$v = \frac{P(z)}{f(z)},$$

$P(z)$ étant holomorphe dans une aire limitée par un contour le long duquel on prendra l'intégrale qui donne y. *La méthode de Laplace conduit donc tout naturellement à la méthode d'intégration des équations à coefficients constants développée par Cauchy dans un Chapitre de ses anciens Exercices.*

On retrouve facilement de cette manière la forme élémentaire des intégrales des équations à coefficients constants. Soit α une racine multiple d'ordre p de l'équation caractéristique

$$f(z) = 0,$$

et considérons un contour C n'enveloppant que cette racine. Nous pouvons prendre

$$v = \frac{A}{(z-\alpha)^p} + \frac{A_1}{(z-\alpha)^{p-1}} + \ldots + \frac{A_{p-1}}{(z-\alpha)} + G(z),$$

$G(z)$ étant holomorphe dans C et les constantes A étant arbitraires. Nous avons à calculer

$$\int_C v\, e^{zx}\, dz.$$

Pour avoir le résidu de ve^{zx}, on pose $z = \alpha + h$; il faut prendre

le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement. On trouve ainsi immédiatement

$$e^{\alpha x}(C_0 + C_1 x + \ldots + C_{p-1} x^{p-1}),$$

expression dans laquelle les C sont, comme les A, des constantes arbitraires. On obtient donc ainsi les p intégrales correspondant à la racine multiple d'ordre p.

Faisons encore une remarque intéressante relative aux équations à coefficients constants. Je prends l'intégrale

$$y = \int_C \frac{P(z)}{f(z)} e^{zx}\, dz$$

le long d'un cercle C, ayant l'origine pour centre et comprenant à son intérieur toutes les racines de $f(z)$. Montrons qu'on peut déterminer le polynome $P(z)$ d'ordre $m-1$ de telle sorte que

$$y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$$

aient des valeurs données à l'avance pour $x = 0$. On a

$$y_0 = \int_C \frac{P(z)}{f(z)}\, dz, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \int_C \frac{z P(z)}{f(z)}\, dz, \quad \ldots, \quad \left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_0 = \int_C \frac{z^{m-1} P(z)}{f(z)}\, dz.$$

Or soit, pour z très grand,

$$\frac{P(z)}{f(z)} = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \ldots + \frac{A_m}{z^m} + \ldots;$$

$A_1, \ldots, A_m$ seront arbitraires si $P(z)$ est un polynome arbitraire d'ordre $m-1$. Les valeurs des A se trouveront déterminées de proche en proche en fonction des valeurs initiales de y et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$. On peut remarquer qu'il résulte de là que *l'ensemble des intégrales correspondant à chacune des racines de l'équation caractéristique forme bien un système fondamental.*

III. — Application générale de la transformation de Laplace au cas des équations linéaires dont les coefficients sont des polynomes; représentations asymptotiques de M. Poincaré.

16. Nous n'avons étudié dans la Section précédente que le cas où les polynomes P (§ 9) sont du premier degré. Arrivons à l'équation

générale

$$P_0 \frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + P_m y = 0,$$

où les coefficients P sont des polynomes de degré p en x.

Nous reprenons l'intégrale

$$y = \int_\alpha^\beta v(z)\, e^{zx}\, dz.$$

Nous avons plus haut transformé, au moyen de l'intégration par parties, les produits

$$xy, \quad x\frac{dy}{dx}, \quad \ldots, \quad x\frac{d^m y}{dx^m}.$$

Considérons maintenant les produits

$$x^p y, \quad x^p \frac{dy}{dx}, \quad \ldots, \quad x^p \frac{d^m y}{dx^m}.$$

Nous nous servirons à cet effet de la formule d'intégration par parties généralisée, à savoir

$$\int U \frac{d^p V}{dz^p} dz = U \frac{d^{p-1} V}{dz^{p-1}} - \frac{dU}{dz} \frac{d^{p-2} V}{dz^{p-2}} + \ldots$$
$$+ (-1)^{p-1} \frac{d^{p-1} U}{dz^{p-1}} V - (-1)^{p-1} \int V \frac{d^p U}{dz^p} dz.$$

On a ici

$$x^p y = \int_\alpha^\beta v\, x^p\, e^{zx}\, dz.$$

Nous poserons donc

$$U = v, \qquad V = e^{zx},$$

et l'on aura alors

$$x^p y = (v x^{p-1} e^{zx})_\alpha^\beta - \left(\frac{dv}{dz} x^{p-2} e^{zx}\right)_\alpha^\beta + \ldots - (-1)^{p-1} \int_\alpha^\beta e^{zx} \frac{d^p v}{dz^p} dz.$$

Semblablement, pour réduire

$$x^p \frac{d^m y}{dx^m} = \int_\alpha^\beta v z^m x^p e^{zx}\, dz,$$

on posera

$$U = v z^m, \qquad V = e^{zx},$$

et l'on a ainsi

$$x^p \frac{d^m y}{dx^m} = (v z^m x^{p-1} e^{zx})_\alpha^\beta - \ldots - (-1)^{p-1} \int_\alpha^\beta e^{zx} \frac{d^p(v z^m)}{dz^p} dz.$$

Soit maintenant

$$\begin{aligned} P_0 &= C_0\, x^p + \ldots, \\ P_1 &= C_1\, x^p + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_m &= C_m x^p + \ldots. \end{aligned}$$

et considérons dans l'équation différentielle transformée l'intégrale définie qui y figure. Cette intégrale est

$$\int_\alpha^\beta \left[C_0 \frac{d^p(v z^m)}{dz^p} + C_1 \frac{d^p(v z^{m-1})}{dz^p} + \ldots \right] e^{zx}\, dz.$$

La quantité entre crochets ne dépend pas de x. En l'égalant à zéro, nous obtiendrons une équation linéaire et homogène en v d'ordre p, dont les coefficients sont des polynomes de degré m en z. Ce sera l'équation

$$(6) \qquad (C_0 z^m + C_1 z^{m-1} + \ldots + C_m) \frac{d^p v}{dz^p} + \ldots = 0.$$

Si l'on peut choisir une fonction v satisfaisant à l'équation précédente, et si l'on peut, par un choix convenable de α et β, s'arranger de manière que les termes intégrés soient nuls, on aura une solution de l'équation proposée. Les termes intégrés sont de la forme

$$(7) \qquad \left[\frac{d^h(v z^k)}{dz^h} e^{zx} \right]_\alpha^\beta = 0 \qquad \begin{pmatrix} h = 0, 1, 2, \ldots, p-1 \\ k = 0, 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}.$$

On voit donc que *la transformation de Laplace ramène l'intégration de l'équation proposée d'ordre m à celle d une équation d'ordre p*.

17. M. Poincaré, dans le Mémoire déjà cité, a montré comment on pourrait réaliser toutes les conditions exigées pour l'application de la méthode, et comment, de plus, on peut ainsi étudier les valeurs des intégrales de l'équation proposée pour x très grand et s'en allant à l'infini dans une direction déterminée, que nous pouvons supposer d'ailleurs, sans diminuer la généralité, être la direction positive de l'axe réel.

Nous supposons aussi que C_0 n'est pas nul, c'est-à-dire que *les degrés de* $P_1, \ldots, P_m$ *ne surpassent pas celui de* P_0. Enfin, il n'existe aucune relation particulière d'égalité entre les coefficients des polynomes P.

Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ les racines de l'équation

$$C_0 z^m + C_1 z^{m-1} + \dots + C_m = 0.$$

Ce sont les points singuliers de l'équation linéaire (6) donnant v. L'équation (6) a, dans le voisinage de chacun de ces points singuliers, $m - 1$ intégrales holomorphes [1], et l'on a une $m^{\text{ième}}$ intégrale de la forme

$$(z - \alpha_1)^{\lambda_1} \varphi_1(z),$$

$\varphi_1(z)$ étant holomorphe dans le voisinage de α_1.

Comme nous l'avons fait dans la Section précédente, menons par le point α_1 une parallèle D à l'axe réel du côté des ξ *négatifs* $(z = \xi + i\eta)$. Nous allons prendre pour v l'intégrale non holomorphe dans le voisinage de α_1. Quand z s'en va à l'infini dans cette direction, nous savons (§ 2 de ce Chapitre) que l'on peut trouver un nombre μ tel que

$$v e^{\mu z}, \quad \frac{dv}{dz} e^{\mu z}, \quad \dots, \quad \frac{d^m v}{dz^m} e^{\mu z}$$

tendent vers zéro, quand z s'éloigne ainsi à l'infini, et, en augmentant μ s'il est nécessaire, il en sera de même des produits

$$v z^\nu e^{\mu z}, \quad \frac{dv}{dz} z^\nu e^{\mu z}, \quad \dots, \quad \frac{d^m v}{dz^m} z^\nu e^{\mu z},$$

quel que soit l'exposant ν.

En désignant, comme précédemment, par α et β le point à l'infini sur la droite D, les conditions (7) seront vérifiées si x est positif et suffisamment grand. On formera encore le lacet considéré au paragraphe 10, et nous obtiendrons ainsi un système de m intégrales

$$y_1, \quad y_2, \quad \dots, \quad y_m.$$

---

(1) Nous nous appuyons sur ce que l'équation

$$x \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + p_m y = 0,$$

où les p sont holomorphes dans le voisinage de $x = 0$, admet $m - 1$ intégrales holomorphes autour de ce point. On voit, en effet, de suite, en substituant une série entière dans le premier membre de l'équation, que les $m - 1$ premiers coefficients peuvent être pris arbitrairement, les autres se déterminant de proche en proche. Quant à la convergence, elle se démontre par les procédés de comparaison dont nous avons fait tant de fois usage.

correspondant respectivement aux points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Nous n'avons maintenant rien à changer aux raisonnements développés dans le paragraphe 11, et nous avons donc encore la conclusion suivante :

Les produits

$$y_1 e^{\alpha_1 x} x^{\lambda_1+1}, \quad y_2 e^{-\alpha_2 x} x^{\lambda_2+1}, \quad \ldots, \quad y_m e^{-\alpha_m x} x^{\lambda_m+1}$$

tendent vers des limites finies et différentes de zéro (sauf le cas d'un λ entier et positif) quand x tend vers $+\infty$.

18. Dans un second Mémoire sur les intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires [1], M. Poincaré a complété le résultat précédent en montrant qu'on pouvait en déduire certaines expressions *asymptotiques*. Nous avons trouvé au paragraphe 11 que le produit

$$y_1 e^{-\alpha_1 x} x^{\lambda_1+1}$$

peut se mettre sous la forme

$$(S) \quad \begin{cases} x^{\lambda_1+1} \int_L A_0 z^{\lambda_1} e^{zx}\, dz + \ldots \\ + x^{\lambda_1+1} \int_L A_n z^{\lambda_1+n} e^{zx}\, dz + x^{\lambda_1+1} \int_L R_n z^{\lambda_1} e^{zx}\, dz; \end{cases}$$

les intégrales correspondent au lacet L, dont les deux extrémités sont à l'infini dans la direction indiquée et qui tourne autour de $z = 0$.

L'intégrale le long de L se compose d'une partie rectiligne et d'une partie circulaire le long de C. Pour la partie rectiligne, nous savons que le produit de l'intégrale par une puissance quelconque de x tend vers zéro quand x augmente indéfiniment. Bornons-nous donc à considérer

$$x^{\lambda_1+1} \int_C A_0 z^{\lambda_1} e^{zx}\, dz + \ldots + x^{\lambda_1+1} \int_C A_n z^{\lambda_1+n} e^{zx}\, dz + x^{\lambda_1+1} \int_C R_n z^{\lambda_1} e^{zx}\, dz.$$

Rappelons-nous, d'autre part, que

$$x^{\lambda_1+1} \int_C A_k z^{\lambda_1+k} e^{zx}\, dz$$

---

[1] H. POINCARÉ, *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires* (*Acta mathematica*, t. VIII).

peut s'écrire

$$\frac{A_k}{x^k}(e^{2\lambda_1\pi i}-1)\left[\Gamma(\lambda_1+k+1)-\int_{rx}^{\infty} y^{\lambda_1+k}e^{-y}\,dy\right].$$

Or, le produit de l'intégrale

$$\int_{rx}^{\infty} y^{\lambda_1+k}e^{-y}\,dy$$

par une puissance quelconque de x a pour limite zéro pour x infini. De même le produit du dernier terme de (S) par x^n a zéro pour limite quand x augmente indéfiniment. Pour le voir, reportons-nous encore au paragraphe 11 et au dernier terme de la somme S

$$x^{\lambda_1+1}\int_C R_n z^{\lambda_1} e^{zx}\,dz.$$

Le nombre n est maintenant déterminé. D'après l'expression de R_n, on voit de suite que le module du produit de

$$x^{\lambda_1+n+1}\int_C R_n z^{\lambda_1} e^{zx}\,dz$$

est, à un facteur numérique près indépendant de x, moindre que celui de l'expression

$$\frac{1}{x}\,\frac{\mu\rho^{n+1}}{1-r\rho}.$$

Le produit étudié tend donc bien vers zéro pour $x=\infty$.

Il en résulte que, si l'on pose

$$\Sigma=(e^{2\lambda_1\pi i}-1)\left[A_0\Gamma(\lambda_1+1)+\frac{A_1\Gamma(\lambda_1+2)}{x}+\ldots+\frac{A_n\Gamma(\lambda_1+n)}{x^n}\right],$$

le produit

$$x^n(\Sigma-y_1 e^{-\alpha_1 x}x^{\lambda_1+1})$$

tend vers zéro pour $x=+\infty$. C'est ce que l'on exprimera en disant que le produit

$$y_1 e^{-\alpha_1 x}x^{\lambda_1+1}$$

est représenté *asymptotiquement* par la suite Σ.

19. Reprenons l'expression de l'intégrale

$$y_1 = \int_L v\, e^{zx}\, dz.$$

Il résulte du paragraphe précédent que

$$y_1 = e^{\alpha_1 x} x^{-\lambda_1 - 1} (e^{2\lambda_1 \pi i} - 1) \Gamma(\lambda_1 + 1)$$
$$\left[A_0 + \frac{A_1(\lambda_1 + 1)}{x} + \ldots + \frac{A_n(\lambda_1 + 1)\ldots(\lambda_1 + n)}{x^n} + \frac{\varepsilon_0}{x^n} \right],$$

ε_0 tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$: nous avons remplacé $\Gamma(\lambda_1 + 2), \ldots, \Gamma(\lambda_1 + n)$ par leurs valeurs en fonction de $\Gamma(\lambda_1 + 1)$. Écrivons ce développement sous la forme

$$y_1 = e^{\alpha_1 x} x^{-\lambda_1 - 1} \left(P_0 + \frac{P_1}{x} + \ldots + \frac{P_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_0}{x^n} \right).$$

En étudiant de la même manière l'intégrale

$$\frac{dy_1}{dx} = \int_L z v\, e^{zx}\, dz,$$

on trouve immédiatement le développement

$$\frac{dy_1}{dx} = e^{\alpha_1 x} x^{-\lambda_1 - 1} \left(R_0 + \frac{R_1}{x} + \ldots + \frac{R_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right),$$

ε_1 tendant vers zéro et les termes, à l'exception de $\frac{\varepsilon_1}{x^n} e^{\alpha_1 x} x^{-\lambda_1 - 1}$, provenant de la différentiation de y_1, quand on néglige $\frac{\varepsilon_0}{x^n}$. On a finalement, en allant jusqu'à la dérivée d'ordre m,

$$\frac{d^m y_1}{dx^m} = e^{\alpha_1 x} x^{-\lambda_1 - 1} \left(T_0 + \frac{T_1}{x} + \ldots + \frac{T_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_m}{x^n} \right),$$

ε_m tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$, et les termes, à l'exception de celui qui contient ε_m, provenant de la dérivation $m^{\text{ième}}$ de y_1, quand on néglige $\frac{\varepsilon_0}{x^n}$.

Substituons ces valeurs de y_1 et de ses dérivées dans le premier membre

$$\frac{d^m y}{dx^m} + \frac{C_1 x^p + \ldots}{C_0 x^p + \ldots} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + \frac{C_p x^p + \ldots}{C_0 x^p + \ldots} y$$

de l'équation différentielle ; les coefficients des puissances successives de $\frac{1}{x}$ dans le résultat de cette substitution doivent s'annuler, puisque n est un entier qui peut être aussi grand qu'on veut. Les constantes α_1, λ_1 et les coefficients P sont donc ceux qu'on obtient, quand on cherche à écrire que l'équation est vérifiée par une série de la forme

$$e^{\alpha_1 x}x^{-\lambda_1-1}\left(P_0+\frac{P_1}{x}+\frac{P_2}{x^2}+\ldots\right).$$

Or, c'est là un problème que nous avons déjà cherché à résoudre (Chapitre XI, § 22) ; nous avons trouvé m valeurs de α_1, et à chacune de ces valeurs a correspondu un développement de la forme précédente. L'expression que nous venons de trouver pour y_1 coïncide donc avec un de ces développements, et nous avons vu que ceux-ci sont en général divergents. Nous arrivons donc au théorème suivant, dû à M. Poincaré (*loc. cit.*) :

Les m développements divergents de la forme

$$e^{\alpha x}x^{-\lambda-1}\left(P_0+\frac{P_1}{x}+\frac{P_2}{x^2}+\ldots\right)$$

représentent asymptotiquement m intégrales de l'équation différentielle, quand x grandit indéfiniment en étant positif.

Nous avons, dans tout ce qui précède, supposé que x augmentait indéfiniment en étant réel et positif. D'après ce qui a été dit au paragraphe 3, il est possible d'étendre cette théorie au cas où x s'éloigne à l'infini avec un argument déterminé quelconque ; mais il est important de remarquer que les m développements divergents de la forme précédente ne représenteront pas asymptotiquement, *pour tout argument*, les mêmes intégrales. Pour certaines valeurs de cet argument, il y aura passage brusque d'une intégrale à une autre, du moins en général.

IV. — Applications des méthodes d'approximations successives à la recherche des valeurs asymptotiques.

30. Les résultats que nous avons obtenus avec M. Poincaré dans la Section précédente pourraient être établis et même étendus en

variant un peu les procédés d'approximation successive dont nous avons déjà fait usage en plusieurs endroits de cet Ouvrage. Sans approfondir complètement la question à ce nouveau point de vue, envisageons une équation linéaire de second ordre

$$(7)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + p_1\frac{dy}{dx} + p_2 y = 0,$$

où, dans le voisinage de $x = \infty$, les coefficients p_1 et p_2 sont susceptibles d'être mis sous la forme

$$p_1 = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots,$$
$$p_2 = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots,$$

séries convergentes pour $|x|$ suffisamment grand.

Posons

$$y = e^{\lambda x}\,Y.$$

On voit de suite que, si l'on prend pour la constante λ une racine de l'équation du second degré

$$(8)\qquad \lambda^2 + a_0\lambda + b_0 = 0,$$

on a une équation de la même forme (7), mais où le coefficient remplaçant b_0 sera nul.

Posons ensuite

$$Y = e^{\mu x} z;$$

on a, en prenant μ de telle sorte que

$$a_0\mu + b_1 = 0,$$

une équation encore de même forme, mais dans laquelle le coefficient de z n'aura pas de terme en $\frac{1}{x}$.

Finalement, nous pouvons, sans diminuer la généralité, envisager l'équation

$$(9)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \ldots\right)y = 0.$$

En faisant les réductions précédentes, on obtiendra d'ailleurs une équation avec un a_0 positif, et une avec un a_0 négatif, si nous supposons réelles les racines de l'équation (8).

21. Nous allons étudier l'équation (9), en supposant a_0 négatif, et il est clair qu'on peut le supposer égal à -1, en remplaçant x par kx (k convenable et positif).

Nous envisageons donc l'équation

$$(10)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\left(-1+\frac{a_1}{x}+\ldots\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{b_2}{x^2}+\frac{b_3}{x^3}+\ldots\right)y=0,$$

et nous nous proposons, afin d'étudier ses intégrales pour x positif et très grand, de procéder par approximations successives.

22. Commençons par une remarque préliminaire. Soit l'équation

$$(10)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=f(x),$$

où $f(x)$ est une fonction continue, s'annulant pour $x=+\infty$, et telle que l'intégrale

$$\int_\infty^x f(x)\,dx$$

ait un sens. On voit alors bien aisément que l'expression

$$y=e^x\int_\infty^x f(x)e^{-x}\,dx-\int_\infty^x f(x)\,dx+h \qquad (h \text{ étant une constante})$$

satisfait à l'équation (10), et que l'on a

$$y=h \qquad \text{pour} \qquad x=+\infty.$$

23. Ceci posé, formons les approximations

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}-\frac{dy_1}{dx}=0,$$

$$\frac{d^2y_2}{dx^2}-\frac{dy_2}{dx}=-\left(\frac{a_1}{x}+\ldots\right)\frac{dy_1}{dx}\quad-\left(\frac{b_2}{x^2}+\ldots\right)y_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^2y_n}{dx^2}-\frac{dy_n}{dx}=-\left(\frac{a_1}{x}+\ldots\right)\frac{dy_{n-1}}{dx}-\left(\frac{b_2}{x^2}+\ldots\right)y_{n-1},$$

tous les y prenant la valeur h pour $x=+\infty$.

En appliquant la formule du paragraphe précédent, on aura de suite l'expression de y_n à l'aide de y_{n-1}, mais on peut la simplifier. en intégrant par parties les termes qui renferment $\frac{dy_{n-1}}{dx}$; on trouve

ainsi, sans aucune difficulté,

$$y_n = e^x \int_\infty^x e^{-x}\left(\frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots\right) y_{n-1}\, dx + \int_\infty^x \left(\frac{\beta_2}{x^2} + \ldots\right) y_{n-1}\, dx + h,$$

les α et les β s'exprimant de suite à l'aide des a et des b.

La démonstration de la convergence uniforme de y_n vers une limite (à partir d'une valeur suffisamment grande de x) se fait de la manière suivante. On a

$$y_n - y_{n-1} = e^{-x} \int_\infty^x e^{-x}\left(\frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots\right)(y_{n-1} - y_{n-2})\, dx$$
$$+ \int_\infty^x \left(\frac{\beta_2}{x^2} + \ldots\right)(y_{n-1} - y_{n-2})\, dx.$$

Or, soit M_n le maximum de $|y_{n-1} - y_{n-2}|$ depuis une valeur suffisamment grande a de x jusqu'à $+\infty$. On a manifestement

$$M_n < q M_{n-1},$$

q étant un nombre fixe inférieur à *un*, si a est assez grand. De là résulte la convergence de la série

$$y = y_1 + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots,$$

à la manière d'une progression géométrique décroissante. On démontre enfin que la limite de cette série satisfait à l'équation différentielle proposée, en reprenant un raisonnement déjà fait bien des fois.

Nous avons donc obtenu une intégrale y de l'équation (10), tendant vers h, lorsque x tend vers l'infini positif.

Relativement à la quantité q considérée plus haut, on voit aisément que l'on a

$$q < \frac{K}{x},$$

K étant une constante fixe; cette remarque nous sera utile dans un moment.

24. Il va être possible d'obtenir une valeur asymptotique de y. Soit p un nombre entier fixe supérieur à n. Reprenons chaque terme de la série y.

Nous avons d'abord $y_1 = h$; pour $y_2 - y_1$ nous avons

$$y_2 - y_1 = e^x \int_\infty^x e^{-x}\left(\frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots\right) h\, dx + \int_\infty^x \left(\frac{\beta_2}{x^2} + \ldots\right) h\, dx,$$

et, en intégrant par parties, on met cette expression sous la forme

$$\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots + \frac{A_{p-1}}{x^{p-1}} + \frac{A_p + \varepsilon_p}{x^p},$$

ε_p étant nul pour $x = \infty$. En prenant ensuite $y_3 - y_2$, on trouve sans peine le développement

$$\frac{B_1}{x^2} + \frac{B_2}{x^3} + \dots + \frac{B_{p-1} + \varepsilon_{p-1}}{x^p} \qquad (\lim \varepsilon_{p-1} = 0 \text{ pour } x = \infty).$$

On aura pour $y_4 - y_3$ la forme

$$\frac{C_1}{x^3} + \frac{C_2}{x^4} + \dots + \frac{C_{p-2} + \varepsilon_{p-2}}{x^p} \qquad (\lim \varepsilon_{p-2} = 0 \text{ pour } x = \infty),$$

et allons ainsi jusqu'à $y_n - y_{n-1}$, qui pourra s'écrire

$$\frac{L_1}{x^{n-1}} + \frac{L_2}{x^n} + \dots + \frac{L_{p-(n-2)} + \varepsilon_{p-(n-2)}}{x^p} \qquad (p > n).$$

Nous avons donc pour y_n, qui est la somme

$$y_1 + (y_2 - y_1) + \dots + (y_n - y_{n-1}),$$

une expression de la forme

$$h + \frac{H_1}{x} + \frac{H_2}{x^2} + \dots + \frac{H_{p-1}}{x^{p-1}} + \frac{H_p + \eta_p}{x^p},$$

η_p étant nul pour $x = \infty$. Quant au reste

$$(y_{n+1} - y_n) + \dots,$$

il est moindre que

$$\frac{K^n h}{x^n} + \frac{K^{n+1} h}{x^{n+1}} + \dots.$$

Il en résulte que l'on a

$$y = h + \frac{H_1}{x} + \frac{H_2}{x^2} + \dots + \frac{H_{n-2}}{x^{n-2}} + \frac{H_{n-1} + \lambda_{n-1}}{x^{n-1}},$$

les H étant des constantes que les calculs précédents déterminent, et λ_n, tendant vers zéro pour $x = \infty$.

Finalement, si nous revenons à l'équation initiale (1), *nous aurons une intégrale avec la représentation asymptotique*

$$e^{\lambda x} x^{\mu} \left(h + \frac{H_1}{x} + \frac{H_2}{x^2} + \dots + \frac{H_n + \varepsilon_n}{x^n} \right)$$

pour une valeur donnée (quelconque) de l'entier n, les coefficients H étant des constantes fournies par l'analyse précédente, et ε_n tendant vers zéro pour $x = \infty$.

C'est la représentation asymptotique analogue à celle que nous avons obtenue dans la Section précédente; le développement indéfini

$$h + \frac{H_1}{x} + \frac{H_2}{x^2} + \ldots$$

sera en général divergent.

25. Dans les calculs qui précèdent, nous avons pris (§ 21) l'intégrale correspondant à a_0 négatif. Pour l'intégrale correspondant à a_0 positif, une analyse analogue peut être développée, un peu plus compliquée toutefois en ce qui concerne la représentation asymptotique; mais je laisse au lecteur le soin d'étudier cette seconde intégrale.

J'aime mieux dire un mot du cas où les racines de l'équation

$$\lambda^2 + a_0\lambda + b_0 = 0$$

du paragraphe 20, que nous avons supposées réelles, sont imaginaires; on suppose toujours que tous les coefficients a, b sont réels. Dans ces conditions on reconnaît que, après avoir fait les réductions du paragraphe 20, les nouvelles quantités a_0 et a_1 sont purement imaginaires (de la forme αi).

On aura donc à partir d'une équation

$$(\Sigma) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{b_2}{x^2} + \ldots\right)y = 0,$$

a_0 et a_1 étant purement imaginaires.

J'indiquerai la façon dont les approximations successives doivent ici être dirigées. Envisageons l'équation linéaire du second ordre ayant les deux solutions

$$1 \quad \text{et} \quad e^{-a_0x-a_1};$$

elle est de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a'_2}{x^2} + \frac{a'_3}{x^3} + \ldots\right)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Désignons par $P(x)$ le coefficient de $\frac{dy}{dx}$ dans cette équation.

Notre équation (Σ) pourra alors s'écrire

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\alpha}{x^2} + \ldots\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{\beta}{x^2} + \ldots\right)y.$$

On commence par rechercher l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} = f(x),$$

se réduisant à h pour $x = +\infty$, en supposant comme plus haut que

$$\int_x^\infty f(x)\,dx$$

ait un sens. Cette recherche simple étant faite, les approximations sont indiquées d'une manière générale par la relation

$$\frac{d^2y_n}{dx^2} + P(x)\frac{dy_n}{dx} = \left(\frac{\alpha}{x^2} + \ldots\right)\frac{dy_{n-1}}{dx} + \left(\frac{\beta}{x^2} + \ldots\right)y_{n-1}.$$

Il n'y a aucune difficulté pour la convergence, les fonctions e^{-a_0x} et x^{-a_1} restant de module fini pour x très grand. On arrive ainsi à deux intégrales représentées asymptotiquement.

26. On pourra faire une application immédiate de ces derniers résultats à l'équation de Bessel

$$\frac{d^2J_\nu}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_\nu}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu = 0.$$

L'équation en λ est ici

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

L'équation en μ (§ 20) est

$$2\mu + 1 = 0.$$

On a donc deux représentations *asymptotiques*

$$\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}\left[H_0 + \frac{H_1}{x} + \ldots\right] \quad \text{et} \quad \frac{e^{-ix}}{\sqrt{x}}\left[H'_0 + \frac{H'_1}{x} + \ldots\right],$$

les H' étant conjugués des H. En revenant à des intégrales réelles on a l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\left[\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \ldots\right)\cos x + \left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{x} + \ldots\right)\sin x\right],$$

où α_0 et β_0 sont arbitraires. Il est clair d'ailleurs que les séries entre parenthèses sont *divergentes*, et donnent seulement des *représentations asymptotiques*, au sens où nous l'avons entendu dans tout ce qui précède. On voit que toutes les intégrales tendent vers zéro pour $x = +\infty$.

Cette forme asymptotique est très propre à étudier les très grandes racines de l'équation

$$J_\nu(x) = 0.$$

On voit aisément que toutes ces racines sont réelles, et l'équation peut s'écrire

$$\operatorname{tang} x = K_0 + \frac{K_1}{x} + \ldots + \frac{K_n + \varepsilon_n}{x^n} \qquad (\varepsilon_n = 0 \text{ pour } x = +\infty).$$

C'est donc, à peu près, pour les grandes racines, l'équation

$$\operatorname{tang} x = K_0,$$

et l'on établira, comme conséquence de ces indications, que,

$$x_p \quad \text{et} \quad x_{p+1}$$

étant deux très grandes racines consécutives, la différence

$$x_{p+1} - x_p$$

se rapproche indéfiniment de π, quand p grandit sans limites.

V. — Étude d'une équation récurrente; théorème de M. Poincaré.

27. Nous terminerons en disant quelques mots d'une question présentant une grande analogie avec quelques-uns des problèmes étudiés au cours de ce Chapitre.

On a des relations récurrentes entre un certain nombre de coefficients des développements en séries entières des intégrales d'une équation linéaire ayant pour coefficients des polynomes. Aussi est-ce d'un problème très important concernant ces suites que je vais m'occuper. Nous allons nous borner à une relation récurrente entre

$$u_{n+2}, \quad u_{n+1} \quad \text{et} \quad u_n,$$

soit

$$P_2 u_{n+2} + P_1 u_{n+1} + P_0 u_n = 0,$$

où je suppose que les P sont des polynomes en n de degré p, soit

$$P_0 = an^p + \ldots,$$
$$P_1 = bn^p + \ldots,$$
$$P_2 = cn^p + \ldots,$$

et l'on suppose que P_2 ne s'annule pour aucune valeur entière et positive de n. En fixant les valeurs de u_0 et u_1, on calculera de proche en proche tous les u.

Nous allons chercher la limite de

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \quad (\text{pour } n = \infty).$$

C'est un problème que s'est posé M. Poincaré (1), dans le cas général d'une relation entre $u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p}$. Exposons son analyse, en la précisant et lui donnant plus de rigueur, dans le cas particulier indiqué.

S'il y a une limite, celle-ci est manifestement racine de l'équation

$$P_2 z + P_1 + \frac{P_0}{z} = 0$$

pour $n = \infty$, c'est-à-dire de l'équation

$$(A) \qquad cz^2 + bz + a = 0.$$

Supposons que l'équation (A) ait ses racines α et β de modules distincts, et soit

$$|\alpha| > |\beta|.$$

Nous allons montrer que *la limite (pour $n = \infty$) de*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

sera en général α, et exceptionnellement β.

Si nous écrivons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = v_n,$$

nous avons

$$P_2 v_{n+1} + P_1 + \frac{P_0}{v_n} = 0.$$

(1) POINCARÉ, *American Journal of Mathematics*, t. VII.

Posons

$$X_n = \frac{v_n - \alpha}{v_n - \beta},$$

ce qui nous donne

$$P_2 \frac{\beta X_{n+1} - \alpha}{X_{n+1} - 1} + P_1 + P_0 \frac{X_n - 1}{\beta X_n - \alpha} = 0.$$

En résolvant par rapport à X_{n+1}, on trouve

$$X_{n+1} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{X_n(1+\varepsilon) + \varepsilon'}{1 + \eta + \eta' X_n},$$

les ε et les η étant très petits avec $\frac{1}{n}$.

Soit M un nombre positif fixe, pris aussi grand qu'on voudra ; on peut prendre n assez grand pour avoir

$$\left| \frac{z(1+\varepsilon) + \varepsilon'}{1 + \eta + \eta' z} \right| < |z| h,$$

$|z|$ étant plus petit que M, et h étant un nombre donné plus grand que *un*, mais tel que

$$h \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < q' < 1 :$$

la limite du premier membre est en effet $|z|$ pour $n = \infty$.

Donc M étant choisi, et n étant pris assez grand, conformément à la condition précédente, s'il arrive que, à partir de cette valeur de n,

$$|X_n|$$

soit moindre que M, on aura

$$|X_{n+1}| < |X_n| h \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < q' |X_n|.$$

Alors, à cause de cette inégalité, X_n tendra évidemment vers zéro ; *par suite, v_n tendra vers α.*

On n'échapperait à cette conclusion que si M étant choisi, et la valeur correspondante de n en résultant, il arrivait que $|X_n|$ fût toujours supérieur à M ; mais alors dans ce cas X_n devrait grandir indéfiniment. On aurait donc

$$\lim_{n=\infty} X_n = \infty,$$

et *par suite* $\lim v_n = \beta$. C. Q. F. D.

28. Un cas très simple est celui où les P sont des constantes ($p = 0$); le résultat est alors intuitif, car l'équation entre X_n et X_{n+1} est alors

$$X_{n+1} = \frac{\beta}{\alpha} X_n,$$

α et β étant les racines de

$$cz^2 + bz + a = 0.$$

Comme $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$, ou bien X_n est toujours infini, ou bien il tend vers zéro.

On voit en outre, sur cet ensemble particulier, que le cas où

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = 1$$

est de tout autre nature.

Ainsi, soit

$$\frac{\beta}{\alpha} = e^{i\varphi};$$

on aura

$$X_{n+1} = e^{in\varphi} X_1.$$

Donc, quand n augmentera indéfiniment, il n'y aura pas de limite, *si le rapport*

$$\frac{\varphi}{2\pi}$$

est incommensurable.

29. M. Poincaré a fait une application remarquable de son théorème à l'étude des développements en séries de polynomes. Soient

$$u_0, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

des polynomes en x, liés par une relation de récurrence

$$P_2 u_{n+2} + P_1 u_{n+1} - P_0 u_n = 0,$$

les P étant des polynomes en n et x.

On considère une série de la forme

$$(1) \qquad A_0 u_0 + A_1 u_1 + \ldots - A_n u_n + \ldots,$$

où les A sont des constantes. La limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est la plus grande

racine d'une certaine équation, racine appelée plus haut α. Envisageons alors la série de puissances

(2) $$A_0 + A_1 t + \ldots + A_n t^n + \ldots.$$

Elle a un rayon ρ de convergence. La condition de convergence pour (1) sera en général

$$|\alpha| < \rho.$$

Si, en effet, cette condition est remplie, la série (1) convergera; car, à partir d'une certaine valeur de n, on aura

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \rho' < \rho,$$

ρ' étant compris entre α et ρ, puisque $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a pour limite α. Si, pour fixer les idées, ceci commence à $n = 0$, on déduira des inégalités

$$\left|\frac{u_1}{u_0}\right| < \rho', \quad \ldots, \quad \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| < \rho'$$

l'inégalité

$$|u_n| < u_0 \rho'^n.$$

Donc la série (1) aura ses termes de modules moindres que ceux de la série

$$|u_0 A_n \rho'^n|;$$

par suite, elle convergera.

Si, au contraire, on a

$$\alpha > \rho,$$

un raisonnement analogue montrera la divergence. *La courbe limitant la région de convergence sera ainsi*

$$|\alpha| = \rho.$$

30. Prenons, comme application, le polynome

$$u_n = (x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n.$$

On établit facilement la relation récurrente

$$u_n - 2x u_{n-1} + u_{n-2} = 0.$$

L'équation donnant α est donc

$$\alpha^2 - 2\alpha x + 1 = 0.$$

Pour x complexe, on prend la racine

$$x + \sqrt{x^2 - 1},$$

de plus grand module. Or on a

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2x.$$

Nous avons déjà rencontré (t. II, p. 314) cette transformation entre α et x. A la circonférence de rayon r dans le plan de la variable α correspond une ellipse, ayant les foyers -1 et $+1$ dans le plan de la variable x.

La courbe $|\alpha| = \rho$ *est donc une ellipse dans le plan de la variable* x.

Les polynomes de Legendre se traitent aussi bien aisément. Le polynome u_n est donné par

$$u_n = \frac{1}{2^n} \frac{1}{1.2\ldots n} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

On a la récurrence

$$nu_n - (2n-1)xu_{n-1} + (n-1)u_{n-2} = 0.$$

L'équation donnant α est encore

$$\alpha^2 - 2\alpha x + 1 = 0,$$

et les courbes correspondant à la limitation de la convergence d'une série de polynomes de Legendre

$$A_0 + A_1 u_1 + \ldots + A_n u_n + \ldots$$

sont encore des ellipses homofocales.

CHAPITRE XV.

SUR QUELQUES CLASSES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES INTÉGRABLES.

I. — Équations à coefficients constants.

1. Nous allons indiquer dans ce Chapitre quelques classes d'équations intégrables. Déjà nous avons trouvé, en appliquant la méthode de Laplace (Chap. XIV, § 15), la forme des intégrales des équations différentielles à coefficients constants ; ce type est le premier dont Euler ait donné l'intégrale générale.

Reprenons cette question pour la traiter d'une manière plus élémentaire. Soit l'équation à coefficients constants

$$a_0 \frac{d^m y}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + a_m y = 0.$$

En posant $y = e^{zx}$ et faisant la substitution dans le premier membre de cette équation, il vient, comme résultat de la substitution,

$$e^{zx} f(z),$$

où $f(z)$ désigne le polynome

$$f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m.$$

On voit donc que, pour avoir une solution e^{zx} de l'équation proposée, il suffit que z soit racine de l'équation caractéristique

$$f(z) = 0.$$

Supposons d'abord que cette équation algébrique de degré m ait toutes ses racines distinctes : on obtiendra m solutions distinctes de

l'équation proposée en prenant pour z les m racines de l'équation caractéristique, soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Pour s'en assurer, il suffit de considérer le déterminant formé par ces m solutions et leurs $m-1$ premières dérivées. Ce déterminant, en désignant par s la somme des racines de l'équation caractéristique, peut s'écrire

$$e^{sx}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_m \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_m^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{m-1} & \alpha_2^{m-1} & \ldots & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix} = e^{sx}\Pi(\alpha_i - \alpha_k).$$

Il n'est pas nul, puisque toutes les racines sont distinctes, et, dans ce cas, la solution du problème est complète.

2. Supposons maintenant que l'équation $f(z) = 0$ ait une racine multiple α d'ordre p ; nous aurons bien encore la solution $e^{\alpha x}$, mais les considérations précédentes ne nous donnent que cette solution. Cherchons à exprimer y à l'aide d'une fonction de la forme

$$y = v\,e^{\alpha x},$$

où v désigne une fonction inconnue de x. On trouve immédiatement que le résultat de la substitution dans l'équation proposée est

$$e^{\alpha x}\left[f(\alpha)v + f'(\alpha)\frac{dv}{dx} + \ldots + \frac{f^{(p)}(\alpha)}{1.2\ldots p}\frac{d^p v}{dx^p} + \ldots\right],$$

et, comme

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{p-1}(\alpha) = 0,$$

puisque la racine α est d'ordre p, on voit qu'on satisfera à l'équation proposée en prenant pour v un polynome arbitraire de degré $p-1$,

$$v = C_0 + C_1 x + \ldots + C_{p-1}x^{p-1},$$

où les C sont des constantes arbitraires. A la racine multiple d'ordre p correspondent donc p intégrales particulières, et, dans tous les cas, que l'équation caractéristique ait des racines simples ou des racines multiples, on trouve ainsi m solutions particulières de l'équation linéaire. Mais, pour que la solution du problème soit complète, il importe de montrer que ces m solutions forment bien un système

fondamental, c'est-à-dire qu'il ne peut exister de relation linéaire et homogène entre ces m solutions ([1]).

3. Considérons donc les racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ayant des degrés de multiplicité quelconques; nous aurons prouvé que les m solutions précédentes sont distinctes, si nous démontrons qu'il ne peut pas exister une relation identique de la forme

$$(A) \qquad P_1 e^{\alpha_1 x} + P_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + P_n e^{\alpha_n x} = 0,$$

où $P_1, P_2, \ldots, P_n$ désignent des polynomes entiers en x, sans que les P soient identiquement nuls. La démonstration est immédiate dans le cas $n = 1$ et $n = 2$.

Si $n = 1$, c'est-à-dire si l'équation caractéristique a une racine multiple d'ordre m, la relation linéaire et homogène précédente prend la forme

$$e^{\alpha_1 x}(C_0 + C_1 x + \ldots + C_{m-1} x^{m-1}) = 0,$$

ce qui exige $C_0 = C_1 = \ldots = C_{m-1} = 0$.

Si $n = 2$, on devrait avoir

$$P_1 e^{\alpha_1 x} + P_2 e^{\alpha_2 x} = 0,$$

ce qui est impossible, car on aurait alors

$$e^{(\alpha_2 - \alpha_1)x} = -\frac{P_1}{P_2}.$$

Or une fonction rationnelle ne peut être égale à une exponentielle qui est une fonction périodique et admettant un point essentiel à l'infini.

Il nous suffit maintenant de démontrer que, si une identité de la forme (A) est impossible pour $n - 1$ exponentielles, elle est aussi impossible pour n exponentielles.

En posant

$$\alpha_k - \alpha_1 = \beta_{k-1},$$

l'égalité

$$P_1 e^{\alpha_1 x} + \ldots + P_n e^{\alpha_n x} = 0$$

([1]) Ce point a déjà été établi d'une manière indirecte à propos de la méthode de Laplace; la démonstration du paragraphe suivant est plus élémentaire et plus directe.

devient

$$P_1 + P_2 e^{\beta_1 x} + \ldots + P_n e^{\beta_{n-1} x} = 0,$$

et, dans cette identité, toutes les lettres β sont différentes de zéro et différentes entre elles. Si $\mu - 1$ est le degré de P_1, différentions μ fois cette identité; le terme P_1 disparaîtra, et nous devrons avoir identiquement

$$e^{\beta_1 x}\left[\frac{d^\mu P_2}{dx^\mu} + \mu\beta_1 \frac{d^{\mu-1} P_2}{dx^{\mu-1}} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\beta_1^2 \frac{d^{\mu-2} P_2}{dx^{\mu-2}} + \ldots\right] + \ldots = 0.$$

Dans cette identité, le nombre des β est égal à $n - 1$, les coefficients des exponentielles sont des polynomes en x, qui devront être identiquement nuls, puisque le théorème est supposé établi pour $n - 1$ exponentielles. Donc P_2 est un polynome qui doit satisfaire à l'équation différentielle à coefficients constants

$$\frac{d^\mu P_2}{dx^\mu} + \mu\beta_1 \frac{d^{\mu-1} P_2}{dx^{\mu-1}} + \ldots = 0,$$

dont l'équation caractéristique est visiblement

$$(\zeta + \beta_1)^\mu = 0.$$

La solution générale de cette équation est

$$e^{-\beta_1 x}(C_0 + C_1 x + \ldots + C_{\mu-1} x^{\mu-1}).$$

Elle ne peut se réduire à un polynome, puisque β_1 est différent de zéro, que si tous les C sont nuls. Donc P_2 est identiquement nul. Il en est de même des autres polynomes, et le théorème est démontré.

4. Au lieu d'une seule équation, considérons un système d'équations différentielles linéaires et homogènes du premier ordre à coefficients constants

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1m} y_m,\\
\frac{dy_2}{dx} &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2m} y_m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{dy_m}{dx} &= a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \ldots + a_{mm} y_m.
\end{aligned}$$

C'est le cas qui se présente en Mécanique lorsqu'on étudie les petits mouvements au moyen des équations de Lagrange et en se bornant aux termes du premier ordre.

On a un système de solutions en posant

$$y_1 = A_1 e^{\lambda x}, \qquad y_2 = A_2 e^{\lambda x}, \qquad \ldots, \qquad y_m = A_m e^{\lambda x},$$

où les A désignent des constantes et λ un nombre convenablement choisi.

En effet, en substituant dans les équations proposées et supprimant $e^{\lambda x}$, il vient

$$\begin{array}{llll} A_1(a_{11}-\lambda) + A_2 a_{12} & + \ldots + A_m a_{1m} & & = 0, \\ A_1 a_{21} \quad + A_2(a_{22}-\lambda) & + \ldots + A_m a_{2m} & & = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & , \\ A_1 a_{m1} \quad + A_2 a_{m2} & + \ldots + A_m(a_{mm}-\lambda) & & = 0, \end{array}$$

ce qui exige que λ satisfasse à l'équation caractéristique de degré m

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{2m} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mm}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Si les m racines de cette équation sont distinctes, à chacune d'elles correspondra un système de valeurs pour $A_1, A_2, \ldots, A_m$ et, par suite, un système de solutions pour $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Aux m racines distinctes correspondent donc m systèmes de solutions particulières.

5. Supposons maintenant que l'équation $f(\lambda) = 0$ ait des racines multiples. Pour traiter ce cas de la manière la plus rapide, nous reviendrons aux expressions de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ par des intégrales de la forme

$$y_i = \int v_i(z)\, e^{zx}\, dz$$

prises le long d'un contour fermé, et dans lesquelles les v sont des fonctions à déterminer.

Substituons dans les équations différentielles; nous aurons m inté-

grales qui devront être nulles :

$$\int [v_1(a_{11} - z) + v_2 a_{12} + \ldots + v_m a_{1m}] e^{zx}\, dz = 0,$$
$$\int [v_1 a_{21} + v_2(a_{22} - z) + \ldots + v_m a_{2m}] e^{zx}\, dz = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\int [v_1 a_{m1} + v_2 a_{m2} + \ldots + v_m(a_{mm} - z)] e^{zx}\, dz = 0.$$

Ces équations seront satisfaites si l'on prend pour $v_1, v_2, \ldots, v_m$ des fonctions telles que les multiplicateurs de e^{zx} se réduisent à des fonctions holomorphes de z à l'intérieur du contour le long duquel on intègre. Nous pourrons, par exemple, déterminer les fonctions v à l'aide des m équations linéaires non homogènes

$$v_1(a_{11} - z) + v_2 a_{12} + \ldots + v_m a_{1m} = P(z),$$
$$v_1 a_{21} + v_2(a_{22} - z) + \ldots + v_m a_{2m} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$v_1 a_{m1} + v_2 a_{m2} + \ldots + v_m(a_{mm} - z) = 0,$$

où $P(z)$ désigne une fonction holomorphe arbitraire.

Le déterminant des coefficients de ces équations est précisément $f(z)$, et, si l'on désigne par $\psi_1(z), \ldots, \psi_m(z)$ les mineurs du premier ordre, correspondant à la première ligne, on tirera des équations précédentes

$$v_1(z) = \frac{\psi_1(z) P(z)}{f(z)}, \quad \ldots, \quad v_m(z) = \frac{\psi_m(z) P(z)}{f(z)}.$$

Il reste à fixer le contour d'intégration. Soit α une racine multiple d'ordre p de l'équation caractéristique

$$f(z) = 0 :$$

nous considérons un contour C n'enveloppant que cette racine. Nous avons alors à calculer, pour obtenir les y, les résidus des onctions v. On trouve ainsi immédiatement, pour la fonction v_1 par exemple, que ce résidu est de la forme

$$e^{\alpha x}[A_1 R_1(x) + A_2 R_2(x) + \ldots + A_p R_p(x)],$$

où les R désignent des polynomes déterminés en x de degré $p - 1$.

On pourra donc poser

$$y_1 = e^{\alpha x}[A_1 R_1(x) + \ldots + A_p R_p(x)],$$

et l'on aura pour $y_2, \ldots, y_m$ des expressions semblables, avec les mêmes constantes arbitraires A, mais avec d'autres polynomes R.

On voit donc ainsi qu'à une racine multiple d'ordre p du polynome caractéristique correspondent p systèmes de solutions.

II. — Sur une classe d'équations à coefficients rationnels et à intégrale générale uniforme.

6. Nous allons considérer maintenant une équation à coefficients entiers,

$$P_0 \frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + P_m y = 0, \tag{1}$$

où les P sont des polynomes en x, dont le degré est *au plus égal* à celui du premier d'entre eux, P_0.

On suppose que *l'intégrale générale est uniforme, et que tous les points singuliers à distance finie appartiennent à la classe particulière étudiée par M. Fuchs* (Chap. XI, § 9). Seul, le point à l'infini peut présenter une singularité essentielle.

Halphen a donné, au sujet des équations précédentes, une proposition très intéressante, que nous allons faire connaître (¹). Remarquons de suite que si l'on pose

$$y = z\,R(x),$$

$R(x)$ étant une fonction rationnelle, l'équation différentielle en z restera de même forme, c'est-à-dire que ses coefficients seront encore des polynomes, le premier étant de degré supérieur ou égal à celui des autres. Cela, étant, on peut fixer *a priori* les pôles $x_1, x_2, \ldots$ de toute intégrale, et leurs ordres maxima de multiplicité, que nous désignerons par $\mu_1, \mu_2, \ldots$. Si l'on fait alors la transformée

$$y = \frac{z}{(x - x_1)^{\mu_1}(x - x_2)^{\mu_2}\ldots},$$

(¹) Ces équations ont été considérées par Halphen dans une Note des *Comptes rendus* (t. CI, 1885, p. 1238); il les avait regardées d'abord comme un cas limite des équations à coefficients doublement périodiques et à intégrale générale uniforme, et les a ensuite étudiées à un point de vue plus élémentaire.

nous aurons une équation

$$(2) \qquad Q_0 \frac{d^m z}{dx^m} + Q_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \ldots + Q_m z = 0,$$

dont l'intégrale générale sera une fonction holomorphe dans tout le plan. En posant maintenant $z = \mathrm{Z} e^{ax}$, où a est une constante, on aura encore une équation de même forme, dans laquelle le coefficient de Z est

$$a^m Q_0 + a^{m-1} Q_1 + \ldots + Q_m.$$

On peut choisir a de manière que, dans ce coefficient, le terme de degré le plus élevé en x disparaisse.

Écrivons alors l'équation en Z

$$(3) \qquad R_0 \frac{d^m \mathrm{Z}}{dx^m} + \ldots + R_m \mathrm{Z} = 0.$$

Le polynome R_0 est alors d'un certain degré p; les autres polynomes R sont au plus de degré p, sauf R_m, qui est au plus de degré $p-1$. On aura

$$\frac{R_1}{R_0} = \alpha_0 + \Sigma \frac{\alpha_i}{(x - a_i)},$$

en désignant par a_i les diverses racines de R_0. L'équation fondamentale déterminante relative à a_i est

$$r(r-1)\ldots(r-m+1) + \alpha_i r(r-1)\ldots(r-m+2) + \ldots = 0.$$

La somme de ses racines est

$$\frac{m(m-1)}{2} - \alpha_i.$$

Puisque l'intégrale générale est holomorphe autour de $x = a_i$, ces racines sont nécessairement entières, non négatives et inégales (sans quoi il y aurait des logarithmes dans les développements). Leur somme est donc au moins égale à

$$0 + 1 + 2 + \ldots + (m-1) \quad \text{ou} \quad \frac{m(m-1)}{2}.$$

Donc α_i est un entier négatif ou nul et, par suite,

$$\Sigma \alpha_i \leqq 0,$$

la sommation s'étendant aux différents points singuliers a_i.

Ceci posé, supposons que R_m ne soit pas nul identiquement. En posant $\frac{dZ}{dx} = Z'$, on a

$$R_0 \frac{d^{m-1}Z'}{dx^{m-1}} + \ldots + R_{m-1} Z' + R_m Z = 0,$$

et, en différentiant,

$$R_0 \frac{d^m Z'}{dx^m} + (R'_0 + R_1) \frac{d^{m-1}Z'}{dx^{m-1}} + \ldots + R'_m Z = 0.$$

L'élimination de Z entre ces deux équations donne

$$(4) \qquad R_0 R_m \frac{d^m Z'}{dx^m} + [(R'_0 + R_1) R_m - R_0 R'_m] \frac{d^{m-1}Z'}{dx^{m-1}} + \ldots = 0$$

et cette équation est toujours du même type. Le rapport des deux premiers coefficients est dans cette équation :

$$\frac{R_1}{R_0} + \frac{R'_0}{R_0} - \frac{R'_m}{R_m}.$$

Le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de $\frac{R'_0}{R_0}$ est égal à p, et dans $\frac{R'_m}{R_m}$ il est au plus égal à $p - 1$, puisque R_m est au plus de degré $p - 1$. Donc, pour l'équation (4) en Z', si l'on forme la somme analogue à $\Sigma\alpha_i$, on trouvera une somme supérieure à celle que l'on a trouvée pour l'équation (3) en Z.

On pourra raisonner sur l'équation (4) comme on a raisonné sur l'équation (3), pourvu que le dernier coefficient ne soit pas nul, et l'on continuera ainsi tant que l'on ne sera pas arrêté.

Or, on ne peut continuer indéfiniment ces transformations, car la somme désignée d'une manière générale par $\Sigma\alpha$ est un entier négatif, qui augmente à chaque transformation. Il arrivera donc un moment où l'on aura une équation dont le dernier coefficient sera identiquement nul ; par suite, comme ces équations correspondent aux dérivées successives de Z, il y aura une intégrale de l'équation (3) dont la dérivée d'un certain ordre se réduira à une constante. L'équation (3) admettra donc un polynome comme intégrale partculière, et, par suite, en revenant à l'équation (2), en tenant compte du facteur exponentiel, on aura une intégrale de la forme

$$e^{ax} G(x),$$

$G(x)$ étant un polynome.

Et nous avons enfin, pour l'équation donnée (1), *une intégrale de la forme*

$$e^{ax} S(x),$$

$S(x)$ *étant une fonction rationnelle.*

7. Nous pouvons maintenant démontrer facilement le théorème d'Halphen, d'après lequel *un système fondamental d'intégrales de l'équation* (1) *est, sous les conditions indiquées, formé par les fonctions*

$$e^{a_1 x} S_1(x), \quad e^{a_2 x} S_2(x), \quad \ldots, \quad e^{a_m x} S_m(x),$$

les S *étant des fonctions rationnelles et les a étant des constantes qui ne sont pas nécessairement distinctes.*

Admettons que le théorème soit établi pour une équation d'ordre $m-1$; nous allons le démontrer pour une équation d'ordre m. Cette équation admet, d'après ce qui précède, une intégrale de la forme

$$y_1 = e^{a_1 x} S_1(x);$$

si l'on pose

$$y = y_1 \int u\, dx,$$

l'équation en u sera d'ordre $m-1$, elle appartiendra au même type, et son intégrale générale sera uniforme, puisque

$$u = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right).$$

Soit donc une intégrale de l'équation en u, de la forme

$$e^{\lambda x} S(x),$$

$S(x)$ étant rationnelle; il correspondra, pour y, une intégrale

$$y = y_1 \int e^{\lambda x} S(x)\, dx.$$

Cette fonction y doit être uniforme; or, en faisant la réduction d'une intégrale

$$\int e^{\lambda x} S(x)\, dx,$$

on sait qu'on est conduit à une fonction de la forme

$$e^{\lambda x} \Sigma(x),$$

Σ étant rationnelle, et à une somme de termes de la forme

$$A\int \frac{e^{\lambda x}\,dx}{x-a} + B\int \frac{e^{\lambda x}\,dx}{x-b} + \ldots,$$

les coefficients A, B, ... étant des constantes; si tous ces coefficients ne sont pas nuls, nous aurons des termes logarithmiques dans les développements et, par suite, l'intégrale ne sera pas uniforme. Aux $m-1$ intégrales de l'équation en u, formant par hypothèse un système fondamental, correspondent par conséquent $m-1$ intégrales de l'équation en y qui, avec y_1, forment un système fondamental de cette dernière équation, et *le théorème est démontré.*

8. On peut adjoindre bien aisément au théorème d'Halphen une réciproque. Considérons une équation linéaire dont un système fondamental serait formé par les m fonctions

$$e^{a_1 x}S_1(x),\quad e^{a_2 x}S_2(x),\quad \ldots,\quad e^{a_m x}S_m(x),$$

les S étant des fonctions rationnelles et les a des constantes qui ne sont pas nécessairement distinctes. Il est évident que ces fonctions, supposées linéairement indépendantes, satisfont à une équation linéaire d'ordre m, dont les coefficients sont rationnels. En mettant les coefficients sous forme entière, ces coefficients deviennent des polynomes, et l'on a alors une équation de la forme

$$P_0\frac{d^m y}{dx^m} + P_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + P_m y = 0,$$

les P étant des polynomes. Il faut prouver, et ce sera la réciproque du théorème d'Halphen, que *le degré de* P_0 *est supérieur ou égal aux degrés de* $P_1, \ldots, P_m$.

Le théorème est immédiat pour $m=1$, car, si

$$y = e^{a_1 x}S_1(x),$$

on aura

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = a_1 + \frac{S_1'(x)}{S_1(x)}.$$

Or, si $S_1(x)$ représente la fonction rationnelle $\frac{U}{V}$, $\frac{S_1'(x)}{S_1(x)}$ est égal à

$$\frac{U'V-UV'}{U.V}$$

et le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur.

Si l'on suppose maintenant le théorème établi pour $m-1$ fonctions de la forme indiquée, nous allons l'établir pour m fonctions de même sorte. Considérons les m fonctions

$$1, \quad \frac{e^{a_2 x} S_2(x)}{e^{a_1 x} S_1(x)}, \quad \frac{e^{a_3 x} S_3(x)}{e^{a_1 x} S_1(x)}, \quad \ldots, \quad \frac{e^{a_m x} S_m(x)}{e^{a_1 x} S_1(x)}$$

obtenues en divisant par $e^{a_1 x} S_1(x)$ les termes de la suite donnée. Ces m fonctions satisfont à une équation à coefficients entiers

$$(5) \qquad Q_0 \frac{d^m z}{dx^m} + Q_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \ldots + Q_{m-1} \frac{dz}{dx} = 0.$$

Il n'y a pas de terme en z, puisque l'équation doit être vérifiée pour $z = \text{const}$. Or, si l'on pose

$$\frac{dz}{dx} = u,$$

on aura l'équation d'ordre $m-1$

$$Q_0 \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + Q_1 \frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} + \ldots + Q_{m-1} u = 0,$$

qui admet pour intégrales

$$\frac{d}{dx}\left(e^{(a_2 - a_1)x} \frac{S_2}{S_1}\right), \quad \ldots, \quad \frac{d}{dx}\left(e^{(a_m - a_1)x} \frac{S_m}{S_1}\right),$$

et ces expressions sont de la forme indiquée. Le théorème étant vrai pour $m-1$ expressions, le degré de Q_0 n'est inférieur à celui d'aucun des autres polynomes $Q_1, \ldots, Q_{m-1}$.

Si maintenant dans l'équation (5), qui est du type cherché, nous posons

$$z = \frac{y}{e^{a_1 x} S_1(x)},$$

l'équation transformée en y reste du même type, comme nous l'avons déjà dit plus haut, et nous avons finalement l'équation cherchée en y, où le premier coefficient est d'un degré au moins égal à celui d'un quelconque des autres.

III. — Des équations différentielles à intégrale générale uniforme pour tout point d'une surface de Riemann. Cas de $p = 1$; équations à coefficients doublement périodiques.

9. Considérons une équation dont l'intégrale générale u serait uniforme et régulière dans le voisinage de tout point (x, y) d'une surface de Riemann définie par une équation algébrique $f(x, y) = 0$. Les coefficients d'une telle équation, quand le premier d'entre eux est supposé égal à un, sont des fonctions du point analytique (x, y), restant non seulement uniformes et régulières dans le voisinage de tout point de la surface, mais restant de plus uniformes sur la surface entière ; ce sont donc des fonctions rationnelles de x et y. Nous avons donc une équation de la forme

$$\frac{d^m u}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + \ldots + P_m u = 0,$$

où les P sont des fonctions rationnelles de x et y. Cette équation n'est pas quelconque, puisque nous supposons que, dans le voisinage d'un point quelconque de la surface, l'intégrale générale est uniforme. L'intégrale générale n'est d'ailleurs pas uniforme sur la surface tout entière, c'est-à-dire que, si l'on part d'un point et qu'on y revienne après avoir décrit un contour fermé, l'intégrale pourra ne pas reprendre la même valeur. Il n'en serait nécessairement ainsi que si le genre p de $f(x, y) = 0$ était égal à zéro, auquel cas la surface de Riemann se réduit à un plan simple.

Traçons sur la surface de Riemann les p rétrosections (t. II, 2ᵉ éd., p. 412 et suiv.) et le contour total K, rendant la surface simplement connexe, formé par les p rétrosections et certaines lignes les joignant deux à deux à la manière d'une chaîne. La surface étant rendue simplement connexe, toute intégrale de l'équation différentielle devient uniforme si le point (x, y) ne traverse pas le contour K. Si nous prenons deux points a et b sur une rétrosection, de part et d'autre de la coupure C, par exemple (se reporter à la figure de la page 415, t. II), et que

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_m$$

représente un système fondamental d'intégrales, celles-ci, quand on

passera de a en b, sans traverser K, se retrouveront avec d'autres valeurs, qui seront nécessairement de la forme

$$\begin{array}{l} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1m}u_m, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2m}u_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots + a_{mm}u_m, \end{array}$$

les a étant des constantes. Une certaine substitution linéaire correspond donc à la coupure C; il en sera de même, pour chacune des parties des rétrosections, et l'on a ainsi $2p$ substitutions linéaires. Quant aux lignes joignant deux à deux les rétrosections, il ne leur correspond pas de substitutions nouvelles, c'est-à-dire que les substitutions correspondantes sont des produits des substitutions précédentes et de leurs inverses. Ainsi, par exemple, supposons, comme dans la figure de la page 435 (t. II), que la rétrosection (CD) soit la dernière de la chaîne; prenons deux points sur pq, dont l'un est sur un bord de cette coupure et l'autre sur l'autre bord. Désignons par S et Σ les substitutions linéaires correspondant respectivement aux coupures C et D, sur lesquelles on aurait marqué un bord positif et un bord négatif, ces substitutions correspondant au passage du bord positif au bord négatif; la substitution correspondant à pq s'obtiendra en faisant le produit des substitutions

$$S, \quad \Sigma, \quad S^{-1}, \quad \Sigma^{-1},$$

qui correspond à la rétrosection (C, D) tout entière. Nous avons donc, pour tout chemin tracé dans le plan, à combiner les $2p$ substitutions correspondant aux p rétrosections. Il y a, entre ces $2p$ substitutions

$$(6) \qquad S_1, \quad \Sigma_1, \quad S_2, \quad \Sigma_2, \quad \ldots, \quad S_p, \quad \Sigma_p,$$

une relation facile à obtenir. Si l'on décrit le chemin K tout entier, la substitution correspondante doit être la substitution unité, puisque ce contour rend la surface simplement connexe.

Soit d'abord $p = 2$; en partant d'un point de la coupure pq et en y revenant après avoir décrit le contour K, nous aurons, en choisissant convenablement les sens positif et négatif sur les rétrosections,

$$S_1\Sigma_1 S_1^{-1}\Sigma_1^{-1} S_2\Sigma_2 S_2^{-1}\Sigma_2^{-1} = 1.$$

La relation a une forme moins simple, si p est supérieur à deux;

prenons $p = 3$, et supposons que les rétrosections se suivent en chaîne dans l'ordre 1, 2, 3. On aura, en dénommant convenablement les rétrosections et choisissant convenablement les sens positif et négatif,

$$S_1 \Sigma_1 S_1^{-1} \Sigma_1^{-1} S_2 S_3 \Sigma_3 S_3^{-1} \Sigma_3^{-1} \Sigma_2 S_2^{-1} \Sigma_2^{-1} = 1,$$

et il n'y aura aucune difficulté à obtenir la relation analogue pour p quelconque ([1]).

Les substitutions (6) *ne sont pas, en général, échangeables*, c'est-à-dire que le produit de deux quelconques d'entre elles dépend de l'ordre des facteurs. *C'est cette circonstance qui fait toute la difficulté de la théorie des équations précédentes et ne permet pas d'en faire une théorie simple ;* aussi nous nous bornerons au seul cas où, *en général,* les substitutions sont échangeables, je veux dire le cas $p = 1$.

10. Soit donc maintenant $p = 1$. Il n'y a qu'une seule rétrosection et deux substitutions

$$S_1, \quad \Sigma_1.$$

Elles sont échangeables ; c'est ce qui résulte de ce que la substitution correspondant à la rétrosection est la substitution unité.

On a ainsi

$$S_1 \Sigma_1 S_1^{-1} \Sigma_1^{-1} = 1,$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$S_1 \Sigma_1 = \Sigma_1 S_1,$$

c'est-à-dire que le produit des deux substitutions Σ_1 et S_1 est indépendant de l'ordre des facteurs.

Nous pouvons donner une autre forme à l'équation différentielle qui nous occupe; exprimons à cet effet les coordonnées x et y à l'aide de fonctions doublement périodiques d'un paramètre z. Si u désigne l'intégrale générale de l'équation, la fonction u de z sera uniforme dans tout le plan de la variable complexe z, puisqu'elle était uniforme dans le voisinage de tout point (x, y) de la surface de Riemann. Nous

([1]) A la fin de son Mémoire *Sur les fonctions à muliplicateurs* (*Acta mathematica*, t. XIII), M. Appell consacre quelques pages aux équations qui nous occupent et indique quelques exemples.

avons donc une équation de la forme

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^m u}{dz^m} + p_1(z)\frac{d^{m-1}u}{dz^{m-1}} + \ldots + p_m(z)u = 0,$$

les $p(z)$ étant des fonctions doublement périodiques de z aux périodes ω et ω', et l'intégrale générale étant une fonction uniforme n'ayant, à distance finie, d'autres points singuliers que des pôles.

Les deux substitutions S_1 et Σ_1, considérées plus haut, correspondent respectivement au changement de z en $z+\omega$ et $z+\omega'$; et dire que ces substitutions sont échangeables revient à dire que toute intégrale reprend la même valeur quand on change z en $z+\omega$, puis dans le résultat z en $z+\omega'$ ou bien quand on change z en $z+\omega'$, puis dans le résultat z en $z+\omega$, ce qui est évident puisque l'intégrale est uniforme.

11. Dans ses mémorables recherches sur quelques applications des fonctions elliptiques [1], M. Hermite avait considéré une intégrale particulière du type (E) : c'est l'équation de Lamé

$$\frac{d^2y}{dz^2} = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 z + h]y,$$

où $\operatorname{sn} z$ désigne la fonction elliptique de module k, n un entier positif et h une constante quelconque. M. Hermite avait montré, par un calcul direct, que l'intégrale de cette équation pouvait être obtenue à l'aide des transcendantes de la théorie des fonctions elliptiques. Le résultat qui se présente pour l'équation de Lamé n'est pas fortuit; des circonstances analogues se présentent pour toute équation différentielle du type (E), c'est-à-dire pour toutes les équations linéaires à coefficients doublement périodiques et à intégrale générale uniforme [2].

Partons donc d'une équation (E) à intégrale générale uniforme, et désignons par

$$\varphi_1(z), \quad \varphi_2(z), \quad \ldots, \quad \varphi_m(z)$$

---

(1) CH. HERMITE, *Sur quelques applications des fonctions elliptiques* (*Comptes rendus*, années 1877 et suiv.).

(2) E. PICARD, *Comptes rendus*, 21 juillet 1879, 19 janvier et 16 février 1880, et *Journal de Crelle*, t. 90. *Voir* aussi le Tome II du *Traité des fonctions elliptiques* d'HALPHEN, et le Tome III du *Cours d'Analyse* de M. JORDAN.

un système fondamental d'intégrales. Les fonctions

$$\varphi_1(z+\omega),\quad \varphi_2(z+\omega),\quad \ldots,\quad \varphi_m(z+\omega)$$

seront aussi des intégrales, puisque l'équation linéaire ne change pas quand on change z en $z+\omega$.

On aura donc

$$\begin{aligned}\varphi_1(z+\omega) &= a_{11}\ \varphi_1(z)+a_{12}\ \varphi_2(z)+\ldots+a_{1m}\ \varphi_m(z),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \varphi_m(z+\omega) &= a_{m1}\,\varphi_1(z)+a_{m2}\,\varphi_2(z)+\ldots+a_{mm}\,\varphi_m(z),\end{aligned}$$

les a étant des constantes. D'après le théorème fondamental relatif à la réduction des substitutions linéaires (*voir* p. 277 de ce Volume), on peut trouver une combinaison des φ à coefficients constants

$$f_1(z)=\alpha_1\,\varphi_1(z)+\ldots+\alpha_m\,\varphi_m(z),$$

qui se reproduise à un facteur constant près, quand on change z en $z+\omega$. En général, on aura m combinaisons de cette forme ; mais, dans tous les cas possibles, on en aura au moins une. Soit f_1 une telle combinaison ; j'envisage la suite des fonctions

$$f_1(z),\quad f_1(z+\omega'),\quad f_1(z+2\omega'),\quad \ldots,$$

qui sont toutes des intégrales de l'équation. Entre les $n+1$ premières de ces fonctions, n étant inférieur ou égal à m, existera une relation homogène et linéaire à coefficients constants, puisque l'équation ne peut avoir plus de m intégrales linéairement indépendantes. En prenant pour n le plus petit nombre possible, nous aurons

$$f_1(z+n\omega')=b_1 f_1(z)+b_2 f_1(z+\omega')+\ldots+b_n f_1[z+(n-1)\omega'],$$

b_1 étant différent de zéro, puisque autrement on aurait une relation linéaire entre les n premières fonctions de la suite. Posons

$$\begin{aligned}f_1(z+\omega') &= f_2(z),\\ f_2(z+\omega') &= f_3(z),\\ &\ldots\ldots\ldots,\\ f_{n-1}(z+\omega') &= f_n(z),\\ f_n(z+\omega') &= b_1 f_1(z)+\ldots+b_n f_n(z)\qquad (b_1\neq 0).\end{aligned}$$

En appliquant encore le même théorème sur les substitutions

linéaires, on voit qu'il existera une combinaison linéaire

$$\varphi_n(z) = \beta_1 f_1(z) + \beta_2 f_2(z) + \ldots + \beta_n f_n(z),$$

se reproduisant à un facteur constant près, quand on change z en $z+\omega'$; cette combinaison linéaire ne sera certainement pas identiquement nulle, d'après la façon dont on a choisi le nombre n. D'autre part, la fonction $\varphi(z)$ se reproduit aussi comme f_1, à un facteur constant près, quand on change z en $z+\omega$. Nous avons donc pour intégrale une fonction $\varphi(z)$, jouissant de la propriété suivante :

$$\varphi(z+\omega) = \mu\,\varphi(z),$$
$$\varphi(z+\omega') = \mu'\,\varphi(z),$$

μ et μ' étant deux constantes. M. Hermite, qui, dans le travail cité, a fait une étude approfondie des fonctions uniformes à discontinuités polaires jouissant de la propriété précédente, les appelle des fonctions doublement périodiques de *seconde espèce*, en réservant le nom de fonctions doublement périodiques ordinaires ou de *première espèce* aux fonctions de cette nature correspondant à $\mu = \mu' = 1$. Avec cette terminologie, nous pouvons énoncer le théorème suivant, qui est fondamental dans cette théorie :

Toute équation E *admet toujours pour intégrale une fonction doublement périodique de seconde espèce.*

Le théorème précédent ne souffre aucune exception ; si l'on se borne au cas *général*, on pourra aller plus loin. Nous avons trouvé une fonction de seconde espèce comme intégrale de l'équation différentielle; or la méthode qui nous y a conduit donnera en général m intégrales de cette nature, et l'on peut dire par suite que *les équations* E *ont en général un système fondamental d'intégrales qui sont des fonctions doublement périodiques de seconde espèce.*

12. On peut obtenir facilement, dans tous les cas, la forme des autres intégrales de l'équation donnée. Soit $\psi_1(z)$ l'intégrale doublement périodique de seconde espèce qu'admet toujours l'équation ; en posant

$$y = \psi_1(z)\int \mathrm{Y}\,dz,$$

on aura pour Y une équation d'ordre $m-1$, du type E, dont l'inté-

grale générale sera aussi uniforme, puisque

$$Y = \frac{d}{dz}\left[\frac{y}{\psi_1(z)}\right].$$

Elle admettra donc une intégrale $\psi_2(z)$ doublement périodique de seconde espèce, et l'on continuera ainsi de proche en proche, de telle sorte qu'on obtient le système fondamental .

$$\begin{aligned}
y_1 &= \psi_1(z),\\
y_2 &= \psi_1(z)\int \psi_2(z)\,dz,\\
y_3 &= \psi_1(z)\int \psi_2(z)\,dz\int \psi_3(z)\,dz,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
y_m &= \psi_1(z)\int \psi_2(z)\,dz\int \ldots\int \psi_m(z)\,dz,
\end{aligned}$$

$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ étant des fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

13. Si l'on veut aller plus loin, il est nécessaire d'introduire les transcendantes de la théorie des fonctions elliptiques. Je renverrai, pour l'étude de ces transcendantes, au Cours lithographié de M. Hermite ou au second volume de ses Œuvres (Note ajoutée au Traité de Lacroix).

La fonction $H(z)$ de Jacobi va jouer le rôle essentiel; c'est une fonction entière de z satisfaisant aux deux identités

$$\begin{aligned}
H(z+\omega) &= -H(z),\\
H(z+\omega') &= -H(z)e^{-\frac{2\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)},
\end{aligned}$$

ω et ω' étant les deux quantités que Jacobi désigne par $2K$ et $2iK'$.

M. Hermite a montré comment on pouvait décomposer en éléments simples toute fonction doublement périodique de seconde espèce. Considérons une telle fonction $F(z)$ dont les multiplicateurs μ et μ' ne puissent être mis sous la forme $\mu = e^{h\omega}$, $\mu' = e^{h\omega'}$, en désignant par h une constante convenable; l'élément simple est alors la fonction

$$f(z) = \frac{H(z+\Omega)e^{\lambda z}}{H(z)};$$

on peut choisir les constantes Ω et λ de manière que les multiplicateurs de cette fonction, qui est une fonction doublement périodique de seconde espèce, soient μ et μ'. On aura alors

$$(7) \qquad F(z) = \Sigma[A_0 f(z-a) + \ldots + A_\alpha D^\alpha f(z-a)],$$

la sommation s'étendant aux différents pôles a de F dans un parallélogramme (ω, ω'); les A sont des constantes et le symbole D^α désigne une dérivée d'ordre α.

Dans le cas particulier où l'on a

$$\mu = e^{h\omega}, \qquad \mu' = e^{h\omega'},$$

M. Mittag-Leffler a montré que cette formule devait être modifiée [1]; on a alors, comme élément simple,

$$f(z) = \frac{H'(z)}{H(z)} e^{hz},$$

et il vient

$$(8) \qquad F(z) = a_0 e^{hz} + \Sigma[A_0 f(z-a) + \ldots + A_\alpha D^\alpha f(z-a)];$$

dans cette expression les A ne peuvent pas être des constantes arbitraires ; on a la relation

$$\Sigma(A_0 + A_1 h + \ldots + A_\alpha h^\alpha) e^{-ha} = 0.$$

Ce résultat s'applique en particulier pour $h = 0$, cas où la fonction est doublement périodique de première espèce.

La dérivée logarithmique de $H(z)$ se présente constamment ; on la désigne par $\zeta(z)$.

En posant donc

$$\zeta(z) = \frac{H'(z)}{H(z)},$$

on aura

$$\zeta(z+\omega) = \zeta(z), \qquad \zeta(z+\omega') = \zeta(z) + \eta,$$

η étant une constante.

14. Nous avons dit qu'*en général* on aurait pour une équation E un système fondamental formé d'intégrales de seconde espèce. Il est

---

[1] MITTAG-LEFFLER, *Comptes rendus*, 26 janvier 1880.

intéressant de rechercher dans tous les cas possibles la formule des intégrales.

Prenons une équation E du second ordre ; on a, comme nous l'avons vu, deux intégrales

$$y_1 = \psi_1(z), \qquad y_2 = \psi_1(z)\int \psi_2(z)\,dz,$$

$\psi_1(z)$ et $\psi_2(z)$ étant des fonctions de seconde espèce. Nous devons nous rendre compte de la nature de l'intégrale y_2 qui, par hypothèse, est uniforme.

Si les deux multiplicateurs de ψ_2 ne sont pas de la forme $e^{h\omega}$, $e^{h\omega'}$, on devra, dans la formule (8), avoir tous es A_0 égaux à zéro, sinon l'intégration donnerait des logarithmes, et l'on pourra prendre, par suite,

$$\int \psi_2(z)\,dz = \Sigma[A_1 f(z-a) + \ldots + A_\alpha D^{\alpha-1} f(z-a)].$$

L'intégrale y_2 sera, comme y_1, une fonction de seconde espèce : c'est le cas général.

Supposons maintenant que les multiplicateurs de ψ_2 soient $e^{h\omega}$ et $e^{h\omega'}$; alors ψ_2 sera de la forme (8), et, si nous supposons $h \neq 0$, on aura d'abord les A_0 nuls, puis l'intégration donne

$$\int \psi_2(z)\,dz = \frac{a_0}{h} e^{hz} + \Sigma[A_1 f(z-a) + \ldots + A_\alpha D^{\alpha-1} f(z-a)]$$

avec la relation

$$\Sigma(A_1 + \ldots + A_\alpha h^{\alpha-1}) e^{ha} = 0.$$

L'intégrale y_2 ainsi obtenue sera encore une fonction de seconde espèce.

Il ne nous reste plus qu'à considérer le cas $h = 0$; on a alors

$$\psi_2(z) = a_0 + \Sigma[A_0 \zeta(z-a) + \ldots + A_\alpha D^\alpha \zeta(z-a)].$$

Tous les A_0 devront être nuls pour que l'intégrale soit uniforme, et nous aurons par suite pour y_2 un polynome du premier degré, par rapport à z et aux $\zeta(z-a)$, avec des coefficients qui seront des fonctions doublement périodiques. Comme d'ailleurs la différence

$$\zeta(z-a) - \zeta(z)$$

est manifestement une fonction doublement périodique, nous pou-

vons dire que *l'intégrale y_2 se présente sous la forme d'un polynome du premier degré en z et $\zeta(z)$ dont les coefficients sont des fonctions doublement périodiques aux mêmes multiplicateurs.*

15. Considérons maintenant une équation E du troisième ordre; nous avons les trois intégrales

$$y_1 = \psi_1, \qquad y_2 = \psi_1 \int \psi_2 \, dz, \qquad y_3 = \psi_1 \int \psi_2 \, dz \int \psi_3 \, dz,$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3 étant des fonctions doublement périodiques. Nous connaissons la forme analytique des deux premières; nous avons à rechercher la forme de y_3 supposée uniforme.

L'expression

$$\psi_2 \int \psi_3 \, dz$$

est uniforme; si elle est doublement périodique (de première ou de seconde espèce), nous sommes ramené au cas précédent. Dans le cas contraire, cette expression sera, d'après ce qui précède, de la forme

$$P + Q\,\zeta(z) + Rz, \tag{9}$$

P, Q, R étant doublement périodiques, et l'on peut admettre que $z = 0$ n'est pas un pôle de Q et R, car, s'il en était autrement, il suffirait de remplacer z par $\alpha + z$, α étant une constante arbitraire, pour réaliser la circonstance que nous venons de dire. On peut en outre supposer que tout pôle a de l'expression (9) est distinct de zéro. Nous avons donc à chercher la nature de l'intégrale

$$\int [P + Q\,\zeta(z) + Rz] \, dz,$$

qui est une fonction uniforme. Soit a un pôle de (9), et désignons par p, q, r les résidus correspondants de P, Q, R. On devra avoir nécessairement

$$p + q\,\zeta(a) + ra = 0,$$

et, comme $a + \omega$ sera aussi un pôle, on aura pareillement

$$p + q\,\zeta(a) + r(a + \omega) = 0.$$

On en conclut $r = 0$, et, prenant ensuite le pôle $a + \omega'$, on aura

$$p + q[\zeta(a) + \eta] = 0;$$

donc $p=0$, $q=0$. Les résidus des fonctions Q et R sont donc nuls pour tous leurs pôles, et l'on peut, par suite, écrire

$$Q = \frac{dQ_1}{dz}, \qquad R = \frac{dR_1}{dz},$$

Q_1 et R_1 étant uniformes. L'intégrale cherchée devient donc

$$\int \left[P + \frac{dQ_1}{dz}\zeta(z) + \frac{dR_1}{dz}z \right] dz;$$

elle est ramenée, en intégrant par parties, à

$$\int [P - Q_1\zeta'(z) - R_1]\, dz.$$

Si Q et R sont des fonctions de *seconde* espèce, nous pourrons prendre pour Q_1 et R_1 des fonctions également de seconde espèce, et nous aurons par conséquent une intégrale du type déjà étudié ; y_3 est encore un polynome du premier degré en z et $\zeta(z)$ à coefficients doublement périodiques.

Si P, Q et R sont des fonctions de *première* espèce, Q_1 et R_1 sont de la forme

$$az + b\zeta(z) + \varphi(z),$$

a et b étant des constantes et $\varphi(z)$ une fonction doublement périodique de première espèce. Notre intégrale prend alors la forme

$$\int [Az\zeta'(z) + B\zeta(z)\zeta'(z) + Cz + D\zeta(z) + \chi(z)]\, dz,$$

A, B, C, D étant des constantes, et $\chi(z)$ une fonction de première espèce. L'intégration par parties nous donne des termes en

$$z^2, \quad \zeta^2(z), \quad z\zeta(z),$$

et il reste une intégrale de la forme

$$\int [\lambda\zeta(z) + \psi(z)]\, dz,$$

λ étant une constante et $\psi(z)$ une fonction de première espèce, intégrale qui se réduit elle-même à un polynome en z et $\zeta(z)$,

En résumé, *l'intégrale y_3 se mettra sous la forme d'un poly-*

nome du second degré en

$$z \quad et \quad \zeta(z)$$

dont les coefficients sont des fonctions doublement périodiques de z aux mêmes multiplicateurs.

Le théorème que nous venons de démontrer pour $m = 2$ et $m = 3$ est général, et il a été démontré pour la première fois par M. G. Floquet dans toute sa généralité (¹); on peut l'énoncer ainsi :

Dans tous les cas, *l'intégrale générale d'une équation* E, *d'ordre m, pourra se mettre sous la forme d'un polynome en z et* $\zeta(z)$ *de degré* $m-1$, *les coefficients de ce polynome étant des fonctions doublement périodiques aux mêmes multiplicateurs.* On peut l'établir en procédant de proche en proche, comme nous l'avons fait pour $m = 2$ et pour $m = 3$; nous ne nous y arrêterons pas.

16. Comme exemple d'équation E, nous devons reprendre l'équation, déjà citée, de Lamé sous la forme que lui donne M. Hermite,

$$\frac{d^2y}{dz^2} - [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 z + h]y = 0.$$

On voit aisément que l'intégrale générale de cette équation est uniforme. Les périodes sont ici $2K$ et $2iK'$, et il n'y a pour le coefficient de y que le seul pôle iK' dans le parallélogramme des périodes. Les racines de l'équation fondamentale déterminante relative au point iK sont

$$-n \quad \text{et} \quad n+1.$$

D'après les théorèmes généraux de M. Fuchs, il y aura une intégrale correspondant à la plus grande racine, c'est-à-dire de la forme

$$y_1 = (z - iK')^{n+1}\psi(z),$$

$\psi(z)$ étant holomorphe, différent de zéro pour $z = iK'$ et ne renfermant que des termes d'ordre pair. Pour la seconde intégrale y_2, il pourrait y avoir un logarithme, puisque la différence des racines de l'équation fondamentale est un nombre entier ; mais il est aisé de voir

(¹) G. FLOQUET, *Comptes rendus*, t. XCVIII, p. 82. On pourra aussi consulter à ce sujet le Tome II du *Traité des fonctions elliptiques* d'HALPHEN (p. 542).

qu'il n'y en a pas. On a, en effet, l'équation n'ayant pas de terme en $\frac{dy}{dz}$,

$$y_2 \frac{d^2 y_1}{dz^2} - y_1 \frac{d^2 y_2}{dz^2} = 0,$$

d'où l'on conclut

$$y_2 = y_1 \int \frac{C\,dz}{y_1^2},$$

C étant constante. Puisque y_1^2 ne renferme que des termes d'ordre pair, l'intégration ne pourra donner aucun logarithme. L'intégrale générale de l'équation de Lamé est donc uniforme.

Indiquons, sans approfondir ce sujet qui nous mènerait trop loin, la marche à suivre pour trouver l'intégrale. Nous savons que l'on peut donner à l'intégrale la forme

$$A_0 f(z - iK') + \ldots + A_{n-1} D^{n-1} f(z - iK')$$

en posant

$$f(z) = \frac{H(z + \Omega)}{H(z)} e^{\lambda z},$$

Ω et λ étant deux constantes, pour le moment arbitraires. En substituant cette expression dans le premier membre de l'équation différentielle, on aura, en posant $z = iK' + \varepsilon$ et développant suivant les puissances croissantes de ε, les termes à exposants négatifs en

$$\varepsilon^{-(n+2)}, \quad \varepsilon^{-(n+1)}, \quad \ldots, \quad \varepsilon^{-1}.$$

Le premier terme disparaîtra de lui-même, puisque c'est en l'annulant qu'on a obtenu l'équation fondamentale déterminante. Il restera donc $n+1$ relations homogènes et linéaires en A, dont les coefficients dépendront de λ et de Ω. On est donc conduit à *deux* équations en λ et Ω; et ceux-ci ayant été choisis, on aura le rapport des A. Nous avons écrit que le premier membre de l'équation différentielle, après la substitution, est une fonction doublement périodique de seconde espèce, qui n'a pas de pôle; il se réduit donc nécessairement à zéro et l'on a alors une intégrale. On démontre ainsi, pour l'équation de Lamé, l'existence d'une intégrale fonction doublement périodique de seconde espèce, et l'on a, en même temps, une indication des calculs à faire pour la recherche effective de cette intégrale. Soit $F(z)$ l'intégrale précédente; $F(-z)$ sera aussi une intégrale, puisque l'équation ne change pas quand on change z en $-z$; si h

est arbitraire, cette seconde intégrale sera distincte de la première, et l'on a alors les deux intégrales fonctions doublement périodiques de seconde espèce

$$F(z) \quad \text{et} \quad F(-z),$$

qui donneront l'intégrale générale de l'équation de Lamé.

Soit, par exemple, $n = 1$, c'est-à-dire l'équation

$$\frac{d^2y}{dz^2} = (2k^2 \operatorname{sn}^2 z + h)y.$$

En effectuant les calculs qui viennent d'être indiqués, M. Hermite trouve

$$F(z) = \frac{H(z+\Omega)}{\Theta(z)} e^{-\frac{\Theta'(\Omega)}{\Theta(\Omega)}z},$$

Ω étant donnée par l'équation

$$h + 1 + k^2 - k^2 \operatorname{sn}^2 \Omega = 0;$$

$\Theta(z)$ désigne une des fonctions introduites par Jacobi en même temps que $H(z)$ dans la théorie des fonctions elliptiques.

Je citerai encore l'équation du troisième ordre, que j'ai indiquée autrefois (*Comptes rendus*, 1880) et qui a donné le premier exemple d'une équation d'ordre supérieur au second intégrée au moyen des fonctions elliptiques

$$\frac{d^3y}{dz^3} + (h - 6k^2 \operatorname{sn}^2 z)\frac{dy}{dz} + h_1 y = 0,$$

h et h_1 désignant deux constantes quelconques. On démontrera aisément que son intégrale générale est uniforme. Trois de ses intégrales auront la forme

$$y = \frac{H(x+\omega)}{\Theta(x)} e^{\left(\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}x\right)},$$

λ et ω étant des constantes convenablement choisies. La substitution de y dans l'équation différentielle donne les relations suivantes, qui servent à déterminer λ et ω :

$$h - (1 + k^2) + 3(\lambda^2 - k^2 \operatorname{sn}^2 \omega) = 0,$$
$$2\lambda^3 - 6\lambda k^2 \operatorname{sn}^2 \omega + 2\lambda(1 + k^2) - 4k^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega - h_1 = 0.$$

L'élimination de λ entre ces équations donne

(E) $$h_1 + 8h_1k^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega + \mathrm{M}\operatorname{sn}^2\omega + \mathrm{N} = 0;$$

M et N sont des polynomes en h, dont la forme se simplifie beaucoup quand on pose, comme l'a fait M. Hermite pour l'intégration de l'équation de Lamé (dans le cas de $n = 2$),

$$h = 4(1+k^2) - 6k^2 \operatorname{sn}^2 a.$$

On a alors

$$\mathrm{M} = 16k^4[3k^2 \operatorname{sn}^4 a - 2(1+k^2)\operatorname{sn}^2 a + 1],$$
$$\mathrm{N} = 16k^4 \operatorname{sn}^4 a(1+k^2 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 a).$$

Le premier membre de l'équation (E), considéré comme fonction de ω, est une fonction doublement périodique aux périodes $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$, ayant l'infini triple $i\mathrm{K}'$. L'équation (E) a donc trois racines dans le parallélogramme des périodes, et l'on obtient bien ainsi trois intégrales de la forme indiquée. En faisant $h_1 = 0$, on retombe sur les calculs relatifs à l'équation de Lamé pour $n = 2$.

On trouvera dans les *Applications des fonctions elliptiques* de M. Hermite (§ XXXVIII) d'autres exemples, dus à M. Mittag-Leffler, d'équations d'ordre supérieur au second rentrant dans la classe qui nous occupe.

17. Je terminerai ce Chapitre, en considérant avec Halphen une classe d'équations à coefficients doublement périodiques, ne rentrant pas immédiatement dans la classe que nous venons d'étudier, mais pouvant cependant s'y ramener au moyen d'un changement de fonctions (1).

Supposons que nous ayons une équation à coefficients doublement périodiques

$$\frac{d^m y}{dz^m} + p\frac{d^{m-1}y}{dz^{m-1}} + \ldots + qy = 0,$$

dont l'intégrale générale ne soit pas uniforme, mais pour laquelle *le rapport de deux intégrales quelconques soit uniforme.*

Si a_1 est un point singulier, les racines de l'équation fondamentale

(1) C.-H. Halphen, *Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables* (t. XXVIII des *Mémoires des Savants étrangers*).

déterminante devront être

$$\nu_1,\quad \nu_1+e_1,\quad \nu_1+e'_1,\quad \ldots,$$

les e étant des entiers positifs, et, de plus, aucun développement ne contiendra de logarithmes.

La somme des racines de l'équation fondamentale déterminante relative à a_1, c'est-à-dire

$$m\nu_1+\Sigma e,$$

sera égale à

$$\frac{m(m-1)}{2}-\alpha_1,$$

α_1 désignant le résidu de p pour le pôle a_1. Donc, si les points singuliers sont $a_1, a_2, \ldots, a_\lambda$, dans un parallélogramme, le produit

$$m(\nu_1+\ldots+\nu_\lambda)$$

sera un nombre entier, puisque la somme des résidus de p pour les pôles $a_1, \ldots, a_\lambda$ est nulle.

Si nous rendons le parallélogramme m fois plus grand, nous aurons des points singuliers m fois plus nombreux, et alors la somme des ν, qui leur correspondent, sera un entier. Plaçons-nous donc dans cette hypothèse toujours réalisable, et, conservant les mêmes notations que précédemment, nous aurons cette fois

$$\Sigma\nu = \text{entier} = k.$$

Nous poserons maintenant

$$y = \mathrm{Y} f(z).$$

L'équation transformée en Y sera à coefficients doublement périodiques, si $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ est doublement périodique. Or, on peut prendre

$$f(z) = [\mathrm{H}(z-a_1)]^{\nu_1}[\mathrm{H}(z-a_2)]^{\nu_2}\ldots[\mathrm{H}(z-a_\lambda)]^{\nu_\lambda}\,\mathrm{H}(z)^{-k};$$

on aura

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \nu_1\zeta(z-a_1)+\ldots+\nu_\lambda\zeta(z-a_\lambda)-k\zeta(z),$$

qui sera doublement périodique, puisque $\Sigma\nu-k=0$. D'autre part, Y deviendra uniforme; on sera donc ramené, pour l'équation en Y,

à une équation à coefficients doublement périodiques et à intégrale générale uniforme. On ne doit pas oublier seulement qu'en général on doit considérer, pour cette équation transformée, le parallélogramme des périodes comme formé de m parallélogrammes de l'équation primitive.

CHAPITRE XVI.

THÉORIE DES SUBSTITUTIONS ET DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

I. — Sur les groupes de substitutions et les fonctions rationnelles de n lettres.

1. Nous nous proposons d'étudier, dans le Chapitre suivant, les analogies entre les équations algébriques et les équations différentielles linéaires. Il est donc indispensable que nous reprenions les théories algébriques, qui sont les analogues de celles que nous développerons ensuite pour les équations linéaires; c'est ce que je vais faire le plus succinctement possible [1].

Désignons par

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

n lettres représentant n grandeurs indépendantes. On sait qu'on peut effectuer sur ces lettres des permutations en nombre $1.2\ldots n$.

[1] La bibliographie sur la théorie des substitutions et des équations algébriques serait bien longue à établir. Je me contenterai de citer quelques Traités généraux sur ce sujet; ce sont tout d'abord le *Traité des substitutions et équations algébriques* (Paris, 1870) de M. Camille JORDAN, dans lequel l'illustre géomètre expose les recherches de ses devanciers et les siennes propres; les *Leçons d'Algèbre* de M. NETTO (Leipzig, 1900) et le *Lehrbuch* de M. H. WEBER (Brunswick, 1908). Parmi les Livres français, deux doivent être signalés. L'un, de MM. BOREL et DRACH, expose, en les développant, les leçons de M. Tannery à l'École Normale; il est intitulé *Introduction à l'étude de la Théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure* (Paris, Nony, 1895); les auteurs se sont surtout préoccupés du point de vue philosophique et logique dans leur très intéressante exposition des théories algébriques. Le second Livre, dû à M. H. VOGT, intitulé *Leçons sur la résolution algébrique des équations* (Paris, Nony, 1895), est rédigé avec beaucoup de soin et se recommande particulièrement à ceux qui veulent étudier ces questions pour la première fois.

Ces permutations sont les résultats qu'on obtient en écrivant ces lettres à la suite les unes des autres de toutes les manières possibles.

En posant $N = 1.2 \ldots n$, désignons par

$$\Sigma_0, \quad \Sigma_1, \quad \ldots, \quad \Sigma_{N-1}$$

les N permutations dont nous venons de parler. L'opération, par laquelle on passe d'une permutation à une autre, est dite une *substitution*. On peut représenter une substitution en écrivant entre parenthèses la permutation de laquelle on part et, au-dessus de celle-ci, la permutation nouvelle qui doit la remplacer. Comme l'ordre des éléments qui se correspondent n'intervient pas dans le résultat, on peut supposer que chaque substitution remplace les éléments d'une permutation fixe : par exemple, la permutation Σ_0 qui représente $x_1, x_2, \ldots, x_n$, par ceux de même rang d'une autre quelconque Σ_i. Nous représenterons ainsi par

$$\left(\frac{\Sigma_i}{\Sigma_0}\right)$$

la substitution qui a pour effet de remplacer les lettres de la permutation Σ_0 par les lettres de la permutation Σ_i. On désigne souvent par de simples lettres S, T, ... les diverses substitutions qu'on a à envisager. Il y a intérêt à considérer, dans l'ensemble des substitutions, la substitution

$$\left(\frac{\Sigma_0}{\Sigma_0}\right),$$

qu'on appelle la *substitution identique* ou la *substitution unité ;* cette substitution indique la conservation de l'ordre des lettres. On a alors N substitutions effectuées sur les n lettres; nous désignerons ces substitutions par

$$(1) \qquad S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_N,$$

la première substitution S_1 se réduisant à la substitution *unité*.

On désigne sous le nom de *transposition* la substitution qui consiste à permuter seulement entre elles deux des lettres, les $n-2$ autres restant invariables. Toute substitution peut être regardée comme résultant d'une succession de transpositions. On le voit de suite en supposant le théorème vrai pour $n-1$ lettres et l'étendant

à n. Soit, en effet,

$$x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_\alpha,\quad \ldots,\quad x_n,$$

remplacées respectivement par

$$x_\alpha,\quad x_\beta,\quad \ldots,\quad x_\lambda.$$

Nous pouvons d'abord faire sur la première permutation une inversion x_1 et x_α, ce qui nous donne

$$x_\alpha,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_1,\quad \ldots,\quad x_n,$$

et nous n'avons plus affaire ensuite qu'à une substitution relative à $n-1$ lettres.

Les substitutions les plus simples sont celles qui remplacent, dans une permutation, chaque élément par celui qui le suit, et le dernier par le premier; on appelle *circulaire* une telle substitution. Toute substitution de n éléments est circulaire ou se décompose en substitutions circulaires. Soient, en effet, x_1 une lettre quelconque, x_α celle qui la remplace lorsqu'on effectue la substitution; soit de même x_β la lettre qui remplace x_α; et ainsi de suite jusqu'à la lettre x_λ qui sera remplacée par x_1. Nous aurons ainsi, dans la substitution, un premier cycle; une lettre non rencontrée donnera naissance à un autre cycle et ainsi de suite, de sorte que la substitution est bien décomposée en un certain nombre de cycles ou substitutions circulaires.

2. Si l'on effectue sur les x d'abord la substitution S et ensuite la substitution T, on aura une substitution résultante, qu'on appelle le *produit des deux substitutions* S et T; nous la désignerons par

$$TS,$$

en indiquant par là qu'*on fait d'abord la substitution* S *et ensuite la substitution* T [1].

Il ne faut pas confondre les deux substitutions

$$TS \quad\text{et}\quad ST,$$

---

[1] On fait souvent l'hypothèse inverse; nous-mêmes l'avons faite dans un Chapitre précédent. Nous conserverons jusqu'à la fin du Volume la convention faite dans le texte.

qui sont, en général, distinctes. Quand elles sont identiques, on dit que les substitutions S et T sont *échangeables*.

On appelle *substitution inverse* d'une substitution S et l'on désigne par S^{-1} la substitution représentant l'opération inverse ; on a

$$SS^{-1} = S^{-1}S = 1.$$

Dans le cas où les deux substitutions S et T sont échangeables, on a, comme nous venons de le dire,

$$TS = ST;$$

on en déduit

$$TSS^{-1} = STS^{-1}$$

et, par suite,

$$T = STS^{-1}.$$

3. Considérons maintenant une fonction rationnelle de n variables indépendantes

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Quand on effectue sur

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

toutes les substitutions (1), il peut arriver que la fonction ne change pas. On sait que la fonction φ est dite alors une fonction *symétrique* de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et peut s'exprimer en fonction rationnelle des fonctions symétriques élémentaires

$$p_1 = \Sigma x_1, \qquad p_2 = \Sigma x_1 x_2, \qquad p_n = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

D'autre part, si la fonction φ est arbitraire, on obtiendra N fonctions distinctes, quand on effectuera toutes les permutations possibles sur les x, c'est-à-dire les substitutions (1).

Mais il peut y avoir des intermédiaires entre les deux cas extrêmes dont nous venons de parler ; ainsi pour $n = 4$ la fonction

$$\varphi = x_1 x_2 + x_3 x_4$$

ne prend que *trois valeurs* pour les *vingt-quatre* substitutions effectuées sur x_1, x_2, x_3, x_4. Ces trois valeurs sont visiblement φ lui-même et les deux expressions

$$x_1 x_3 + x_2 x_4, \quad x_1 x_4 + x_2 x_3.$$

Considérons donc l'ensemble de toutes les substitutions qui laisseraient invariable une certaine fonction $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, et désignons-les par

$$(G) \qquad S_1 = 1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_r,$$

la substitution unité étant évidemment comprise parmi elles. *Les substitutions précédentes forment un groupe*, c'est-à-dire que les inverses et les produits de deux substitutions quelconques de la suite (G) appartiennent eux-mêmes à cette suite. Il en résulte qu'en combinant d'une manière quelconque, par multiplication, les substitutions de (G), on aura toujours des substitutions de la même suite. On appelle *degré* d'un groupe (G) de substitutions le nombre des lettres figurant dans ces substitutions. L'*ordre* d'un groupe est le nombre r des substitutions de ce groupe.

En particulier, à une fonction symétrique correspond le groupe général des $1.2\ldots n$ substitutions relatives à n lettres. Nous appellerons ce groupe le *groupe symétrique*.

4. Une fonction rationnelle φ nous a conduit à la notion capitale de *groupe de substitutions*. On peut inversement concevoir *a priori* la notion de groupe de substitutions, c'est-à-dire d'un ensemble de substitutions telles que leurs inverses et le produit d'un nombre quelconque d'entre elles donnent une substitution de cet ensemble. On peut établir que, pour un tel groupe, *il y aura toujours des fonctions rationnelles que laisseront invariables les substitutions du groupe, tandis que toute autre substitution modifierait ces fonctions*. Considérons, en effet, l'expression

$$\varphi = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n,$$

les α étant des constantes distinctes. Il est clair que cette fonction a $1.2\ldots n$ valeurs quand on effectue sur les x toutes les permutations possibles. Soit d'autre part G un groupe de substitutions d'ordre r ; désignons par

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_r$$

les r valeurs que prend la fonction φ pour les substitutions de ce groupe ($\varphi_1 = \varphi$), et formons le produit

$$\Phi = \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_r.$$

C'est une fonction rationnelle de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que laissent invariable les substitutions du groupe, puisque ces substitutions permutent seulement les différents facteurs.

D'autre part, toute permutation S, qui ne fait pas partie du groupe G, ne laisse pas invariable la fonction Φ. En effet, en effectuant sur φ une telle permutation, on obtient une expression φ'_1 différente de $\varphi_2, \ldots, \varphi_r$, puisque les $1.2 \ldots n$ permutations donnent des résultats distincts. Si Φ restait invariable pour la substitution S, φ'_1 ne pourrait différer de $\varphi_2, \ldots, \varphi_r$ que par un facteur constant. Mais, si l'on avait

$$\varphi'_1 = k\varphi_p \qquad (p \gtreqless r),$$

on aurait nécessairement $k = 1$, puisque α_0 n'est pas nul, et, par suite, φ'_1 serait égal à φ_p, ce que nous venons de dire être impossible.

5. Supposons qu'une fonction φ prenne ρ valeurs quand on effectue sur les x toutes les permutations possibles, et soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ ces ρ fonctions. Toute fonction symétrique Φ de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ restera invariable quand on effectuera sur les x une permutation quelconque, puisqu'une telle permutation ne peut que changer l'ordre de ces fonctions.

La fonction Φ s'exprimera donc à l'aide des fonctions symétriques élémentaires. Il en résulte que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ *peuvent être regardés comme les racines d'une équation de degré* ρ, *dont les coefficients sont des fonctions symétriques des variables;* nous désignerons cette équation par

$$F(\varphi) = 0.$$

6. Étant donné un groupe G, il existe une infinité de fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que laissent invariables les substitutions de ce groupe. Nous allons démontrer, relativement à ces fonctions, un théorème d'une grande importance. Je dis que :

Deux fonctions appartenant au même groupe s'expriment rationnellement l'une par l'autre.

Soit r l'ordre du groupe G, dont nous représentons les substitutions par

$$(2) \qquad S_1 = 1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_r.$$

Soit d'abord φ_1 une des fonctions correspondant à ce groupe : si σ désigne une substitution n'appartenant pas à G, la fonction φ_1 se changera en une autre fonction φ_2 quand on effectuera la substitution σ. Toutes les substitutions

$$(3) \qquad \sigma, \quad \sigma S_2, \quad \ldots, \quad \sigma S_r$$

transformeront φ_1 en φ_2, et ce seront les seules, car, si S' désigne une telle substitution, la substitution

$$\sigma^{-1} S'$$

transformera φ_1 en elle-même; on aura donc

$$\sigma^{-1} S' = S_i \qquad (i \lesseqgtr r),$$

ce qui revient bien à

$$S' = \sigma S_i,$$

comme nous voulions le faire voir. Cherchons le groupe appartenant à la fonction φ_2. Si S'' est une substitution de ce groupe, la substitution $\sigma^{-1} S'' \sigma$ transformera φ_1 en elle-même. Donc

$$\sigma^{-1} S'' \sigma = S_i,$$

d'où l'on déduit que le groupe cherché est formé des substitutions

$$\sigma S_i \sigma^{-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

On désigne ce groupe sous le nom de *transformé* du groupe G par la substitution σ. Si les substitutions (2) et (3) ne donnent pas l'ensemble du groupe des permutations de n lettres, c'est-à-dire si

$$\frac{1.2\ldots n}{r} > 2,$$

il y aura une substitution σ' n'appartenant pas à (2) et (3). Cette substitution transforme φ_1 en φ_3, et le groupe de φ_3 est le transformé de G par σ', de même que le groupe de φ_2 était le transformé de G par σ. En continuant ainsi, on voit que, si la fonction φ prend ρ valeurs pour l'ensemble des substitutions, on partagera cet ensemble en ρ groupes de r substitutions, tels que (2), (3), ...; on a évidemment

$$1.2\ldots n = r\rho.$$

Cela posé, soit ψ_1 une seconde fonction correspondant au groupe G

et désignons par

$$\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_\rho$$

les ρ valeurs de ψ correspondant respectivement aux substitutions (2), (3), ... Considérons les expressions

$$\begin{array}{l} \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_\rho, \\ \varphi_1\ \psi_1 + \varphi_2\ \psi_2 + \ldots + \varphi_\rho\ \psi_\rho, \\ \varphi_1^2\ \psi_1 + \varphi_2^2\ \psi_2 + \ldots + \varphi_\rho^2\ \psi_\rho, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_1^{\rho-1}\psi_1 + \varphi_2^{\rho-1}\psi_2 + \ldots + \varphi_\rho^{\rho-1}\psi_\rho. \end{array}$$

Ces expressions sont évidemment symétriques en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, puisque toute permutation effectuée sur les x ne peut que changer φ_i en φ_k et ψ_i en ψ_k. Elles s'exprimeront donc à l'aide des fonctions symétriques élémentaires ; posons donc

$$\begin{array}{l} \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_\rho = P_1, \\ \varphi_1\ \psi_1 + \varphi_2\ \psi_2 + \ldots + \varphi_\rho\ \psi_\rho = P_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_1^{\rho-1}\psi_1 + \varphi_2^{\rho-1}\psi_2 + \ldots + \varphi_\rho^{\rho-1}\psi_\rho = P_\rho. \end{array}$$

Nous pouvons tirer de ces équations du premier degré les valeurs de $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\rho$. Considérons en particulier ψ_1 ; son expression sera symétrique par rapport à $\varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$; or, ces dernières quantités sont racines de l'équation

$$\frac{F(\varphi)}{\varphi - \varphi_1} = 0,$$

comme il résulte du paragraphe 5. Cette équation a ses coefficients rationnels en ψ_1 et symétriques par rapport aux x. Il résulte immédiatement de là que ψ_1 *s'exprime rationnellement à l'aide de* φ_1, comme nous voulions l'établir. Il est bien entendu que, dans cette expression rationnelle, figurent comme coefficients de φ_1 des fonctions symétriques des x.

La démonstration précédente permet d'établir un théorème plus général que celui que nous venons d'énoncer. Les deux fonctions ψ et φ n'ont pas besoin d'appartenir au même groupe. Supposons seulement que ψ reste invariable pour toutes les substitutions du groupe auquel appartient φ. Il arrivera alors que les fonctions dési-

gnées par

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\rho$$

ne seront pas toutes distinctes, car il y aura d'autres permutations que celles du groupe G n'altérant pas la fonction ψ_1. Mais cela importe peu pour la démonstration, et nous avons le théorème général suivant, dû à Lagrange :

Si deux fonctions rationnelles de plusieurs variables ψ et φ sont telles que l'une ψ reste invariable pour toutes les substitutions du groupe auquel appartient φ, la fonction ψ s'exprime rationnellement au moyen de la seconde et des fonctions symétriques élémentaires.

7. Un exemple intéressant de fonctions, ayant plusieurs valeurs pour l'ensemble des permutations, nous est fourni par les fonctions entières ayant *deux* valeurs. Soit une telle fonction φ et désignons par

$$\varphi_1 \text{ et } \varphi_2$$

ses deux valeurs. Toute substitution S du groupe qui change φ_1 en elle-même changera aussi φ_2 en elle-même, car autrement S^{-1} changerait φ_1 en φ_2, tandis que manifestement S^{-1} change, comme S, φ_1 en elle-même. Il y a donc deux genres de substitutions, les unes changeant φ_1 en φ_2 et φ_2 en φ_1, les autres changeant φ_1 et φ_2 en elles-mêmes. Envisageons la fonction

$$\varphi_1 - \varphi_2;$$

ce sera une fonction ayant deux valeurs égales et de signes contraires. On appelle *alternée* une fonction jouissant de cette propriété de n'avoir, pour l'ensemble des permutations, que deux valeurs égales et de signes contraires. Le carré d'une fonction alternée est une fonction symétrique.

Toute substitution pouvant être obtenue en faisant une succession d'inversions entre deux lettres, il est clair qu'il y aura au moins une inversion changeant le signe d'une fonction alternée F. Si cette inversion est entre x_α et x_β, la fonction F s'annulera nécessairement pour $x_\alpha = x_\beta$ et sera, par suite, divisible par $x_\alpha - x_\beta$. Ainsi F^2 est divisible par $(x_\alpha - x_\beta)^2$ et, comme il est symétrique, il sera divisible

par tous les binomes analogues. Donc F est divisible par la fonction u formée de $\frac{n(n-1)}{2}$ facteurs linéaires :

$$\begin{aligned} u = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)&\ldots(x_1 - x_n),\\ (x_2 - x_3)&\ldots(x_2 - x_n),\\ &\ldots\ldots,\\ &(x_{n-1} - x_n). \end{aligned}$$

On voit d'ailleurs, de suite, que cette fonction u n'a que deux valeurs égales et de signes contraires. La fonction alternée F sera divisible par une puissance m de u, qui sera impaire, car autrement le quotient

$$\frac{F}{u^m}$$

serait encore alterné et, par suite, divisible par u ; m ne serait pas alors la plus haute puissance de u, qui divise F. Nous pouvons donc écrire

$$F = Su,$$

S étant symétrique.

Si nous revenons alors à la fonction φ, on peut écrire

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2P_1 u,$$
$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2P_2,$$

P_1 et P_2 étant symétriques ; donc *toute fonction à deux valeurs est de la forme*

$$P_2 + P_1 u.$$

Toutes ces fonctions se ramènent donc à u, c'est-à-dire à la racine carrée du discriminant des n lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il est clair, d'ailleurs, que la fonction u n'a que deux valeurs, puisque toute substitution ne peut que permuter l'ordre des facteurs linéaires et changer leurs signes.

Le groupe de substitutions laissant invariable la fonction u s'appelle le *groupe alterné*. Soient

$$S_1 = 1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_r$$

les substitutions de ce groupe. Pour toutes ces substitutions, la fonction u prend une même valeur u_1.

Raisonnons comme au paragraphe 6 : il y a, dans le groupe général

des $1.2\ldots n$ substitutions, une substitution σ qui n'appartient pas au groupe alterné, sans quoi u serait symétrique. Nous avons alors une seconde ligne

$$\sigma, \quad \sigma S_2, \quad \ldots, \quad \sigma S_r$$

de substitutions transformant u_1 en une autre fonction u_2, et, comme u n'a que deux valeurs, les $2r$ substitutions précédentes donnent toutes les substitutions du groupe symétrique. Donc

$$r = \frac{1.2\ldots n}{2},$$

et, par suite, *le groupe alterné est d'ordre* $\frac{1.2\ldots n}{2}$. On voit bien facilement qu'il est formé des substitutions du groupe symétrique se ramenant à un nombre *pair* de transpositions.

Un second exemple nous sera fourni par la fonction

$$x_1 x_2 + x_3 x_4,$$

déjà considérée au paragraphe 3. Cette fonction a trois valeurs; il y aura donc trois lignes dans le Tableau des substitutions du groupe symétrique mis sous la forme

$$\begin{array}{cccc} S_1, & S_2, & \ldots, & S_r, \\ \sigma S_1, & \sigma S_2, & \ldots, & \sigma S_r, \\ \sigma' S_1, & \sigma' S_2, & \ldots, & \sigma' S_r, \end{array}$$

où les substitutions de la première ligne sont celles qui laissen invariable la fonction. On aura donc

$$3r = 1.2.3.4 \quad \text{ou} \quad r = 8.$$

Le groupe des S est donc d'ordre *huit*.

II. — De la réductibilité des fonctions entières.

8. La notion de réductibilité des fonctions entières joue un rôle capital dans la théorie des équations algébriques. Nous devons nous y arrêter un moment.

Définissons d'abord avec précision, comme le faisait Kronecker [1],

---

[1] KRONECKER, *Grundzüge einer arithm. Theorie der algebraischen Grössen* (*Festschrift zum Kummer's Jubilæum*, 1882).

ce qu'on doit entendre par *domaine de rationalité*. Étant donnés des paramètres $R_1, R_2, R_3, \ldots$, que l'on suppose indéterminés et indépendants les uns des autres, nous appellerons *domaine de rationalité* l'ensemble des fonctions rationnelles de ces paramètres, les coefficients figurant dans ces fonctions rationnelles étant des nombres entiers. Le domaine le plus simple est formé par les nombres rationnels ; il ne comprend aucun paramètre.

Le premier problème qui se présente est de reconnaître si une équation à coefficients entiers

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

admet une racine commensurable ; c'est là une question classique sur laquelle je n'ai pas à insister ici. Prenons maintenant une équation

$$f(x, R_1, R_2, R_3, \ldots) = 0, \tag{2}$$

dans laquelle les coefficients des puissances de x sont des fonctions rationnelles des R à coefficients eux-mêmes commensurables, et cherchons si cette équation en x peut être vérifiée par une fonction appartenant au domaine de rationalité. Écrivons l'équation sous la forme

$$a_0(R_1, R_2, \ldots)x^m + a_1(R_1, R_2, \ldots)x^{m-1} + \ldots = 0,$$

les a étant des polynomes en R à coefficients entiers. En posant

$$a_0(R_1, R_2, \ldots)x = y,$$

nous aurons une équation en y de même forme, mais où le premier coefficient sera l'unité.

S'il existe une racine x rationnelle par rapport aux R, l'équation en y aura une racine entière, et nous sommes donc ramené à la recherche d'une racine de l'équation

$$y^m + b_1(R_1, R_2, \ldots)y^{m-1} + \ldots = 0$$

qui soit une fonction entière de $R_1, R_2, \ldots$, formée avec des nombres rationnels. On trouve immédiatement une limite supérieure du degré possible de y par rapport à chacun des paramètres $R_1, R_2, \ldots$, comme le montre, par exemple, la théorie des asymptotes. On fera donc la substitution à y dans l'équation d'un polynome en $R_1, R_2, \ldots$

d'un degré déterminé, les coefficients A de ce polynome étant indéterminés. En égalant à zéro tous les termes du résultat de la substitution, on aura un certain nombre de relations algébriques entre les coefficients A. Il ne s'agira plus que de voir si l'on peut y satisfaire par des nombres commensurables.

On aura d'abord à voir si les équations sont compatibles algébriquement ; s'il en est ainsi, la résolution de ces équations se ramène, par des calculs où n'entre aucune irrationalité, à la résolution d'une équation unique à coefficients rationnels, et nous sommes ainsi conduit de nouveau au premier problème.

Supposons enfin que nous voulions reconnaître si l'équation (2) admet un diviseur rationnel de degré k. Je désigne par

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_m$$

les m racines de l'équation, et je forme l'expression

$$(3) \qquad y - p_1 t_1 - p_2 t_2 - \ldots - p_k t_k,$$

en désignant par $p_1, p_2, \ldots, p_k$ les fonctions symétriques élémentaires relatives à $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k}$. Nous représentons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ k nombres distincts de la suite des m premiers nombres, et les t sont des paramètres arbitraires. En prenant pour les α toutes les combinaisons possibles des m premiers nombres k à k, et formant le produit des expressions (3), nous aurons

$$\Pi(y - p_1 t_1 - p_2 t_2 - \ldots - p_k t_k) = F(y, t_1, \ldots, t_k, R_1, R_2, \ldots),$$

et nous avons à rechercher si l'équation

$$F(y, t_1, \ldots, t_k, R_1, R_2, \ldots) = 0$$

admet pour y une racine rationnelle en t et R et à coefficients commensurables.

Une telle racine, que nous savons trouver d'après ce qui précède, devra être nécessairement de la forme

$$p_1 t_1 + p_2 t_2 + \ldots + p_k t_k,$$

et, si elle est rationnelle, c'est que les fonctions symétriques p de $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k}$ appartiennent au domaine de rationalité $(R_1, R_2, \ldots)$. *L'équation est dite alors réductible*, et nous pouvons obtenir les différentes équations en lesquelles elle se décompose.

Une équation qui n'est pas réductible dans un domaine donné de rationalité est dite *irréductible* dans ce domaine.

9. Démontrons de suite une proposition fort simple, mais de grande importance, sur les équations irréductibles. Je suppose que, dans un certain domaine de rationalité, une équation algébrique ait une racine commune avec une équation irréductible : je vais montrer qu'*elle admettra toutes les racines de cette seconde équation*. Soit donc

$$F(x, R_1, R_2, \ldots) = 0$$

la première équation, et représentons par

$$f(x, R_1, R_2, \ldots) = 0$$

l'équation irréductible qui a, par hypothèse, une racine commune avec F. Nous pouvons former le plus grand commun diviseur $\theta(x, R_1, R_2, \ldots)$ entre F et f; ses coefficients appartiendront au même domaine de rationalité. Il faut nécessairement que θ et f coïncident, car autrement f ne serait pas irréductible ; il est évident alors que toutes les racines de f appartiennent à F.

10. Nous allons généraliser le point de vue auquel nous venons de nous placer pour définir l'irréductibilité d'une équation, mais auparavant établissons une proposition qui nous sera plus tard très utile. Étant donné un domaine de rationalité, considérons une équation de degré n

$$f(x) = 0,$$

dont nous désignerons les racines supposées inégales par

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n,$$

et soit

$$V = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

une fonction rationnelle telle que les $1.2\ldots n$ valeurs numériques qu'elle prend, quand on permute les racines de toutes les manières possibles, soient toutes différentes; nous allons démontrer que *les* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *s'expriment en fonctions rationnelles de* V [1]. Ce

[1] Cette proposition se trouve au commencement du Mémoire célèbre de Galois, dont nous allons bientôt nous occuper. Elle est citée sans démonstration par Abel dans le Mémoire posthume *Sur les fonctions elliptiques*.

théorème joue un grand rôle dans la théorie de Galois, comme nous le verrons bientôt, et nous allons rapporter la démonstration qu'en donne l'illustre géomètre. Mais nous pouvons observer auparavant que le théorème est en quelque sorte évident, car V satisfait à une équation d'ordre $1.2\ldots n$ dont les racines sont distinctes, et à chaque valeur de V ne correspond qu'une seule valeur de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, puisque pour deux permutations différentes des x on a deux valeurs différentes de V.

Ne nous contentons pas cependant de cette vue rapide, et cherchons comment on pourra trouver effectivement les expressions rationnelles des racines en fonction de V. Désignons par V_1 la valeur de V pour une certaine permutation, soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Laissons x_1 fixe et permutons de toutes les manières possibles $x_2, x_3, \ldots, x_n$; nous aurons ainsi les $\mu = 1.2\ldots(n-1)$ valeurs distinctes de V

$$V_1, \quad V_2, \quad \ldots, \quad V_\mu.$$

Les coefficients de l'équation donnant ces valeurs de V seront symétriques par rapport aux racines de l'équation

$$\frac{f(x)}{x-x_1} = 0,$$

et seront par suite rationnels en x_1. Désignons cette équation par

$$(4) \qquad F(V, x_1) = 0,$$

F étant un polynome en V et x_1. Il en résulte que l'équation en x

$$(5) \qquad F(V_1, x) = 0$$

admet certainement x_1 pour racine. L'équation (5) en x et l'équation

$$f(x) = 0$$

ont donc une racine commune x_1. Elles ne peuvent en avoir qu'une, car, si x_2 était racine de (5), on aurait

$$F(V_1, x_2) = 0.$$

Or l'équation

$$(6) \qquad F(V, x_2) = 0$$

admet pour racines les valeurs de V obtenues en transposant x_1 et

x_2 dans les permutations qui correspondaient aux racines de l'équation (4) ; cette dernière équation et l'équation (6) n'ont donc pas de racines communes, puisque toutes les valeurs de V sont distinctes. Ainsi l'équation (5) et l'équation

$$f(x) = 0$$

n'ont qu'une racine commune, et nous aurons pour cette racine commune x_1 une fonction rationnelle de V_1. On aura de même d'autres fonctions rationnelles de V_1 pour les autres racines x_2, x_3, ..., x_n, et le théorème est par suite démontré, en même temps qu'on a une marche à suivre pour trouver explicitement ces fonctions rationnelles.

Deux corollaires du théorème précédent joueront dans la Section suivante un rôle capital.

Soit

$$\Psi(V) = 0$$

l'équation donnant les $1.2\ldots n$ valeurs de V. Nous venons de voir que x_1, x_2, ..., x_n sont fonctions rationnelles de V_1. Comme, d'autre part, une autre quelconque des valeurs de V est rationnelle en x_1, x_2, ..., x_n, elle sera aussi rationnelle en V_1. Donc, *toutes les racines de l'équation* Ψ *sont fonctions rationnelles de l'une quelconque d'entre elles*.

En second lieu, supposons que l'équation Ψ soit réductible, et prenons l'un de ses facteurs *irréductibles*

$$\psi(V) = 0$$

dont nous désignerons les racines par

$$V_1, \quad V_2, \quad \ldots, \quad V_\nu.$$

Nous avons trouvé plus haut, pour les racines de l'équation $f(x) = 0$,

$$x_1 = R_1(V_1), \qquad x_2 = R_2(V_1), \qquad \ldots, \qquad x_n = R_n(V_1),$$

les R étant rationnels. Il est facile de voir qu'elles pourront être représentées aussi, quoique dans un ordre différent, par

$$(7) \qquad R_1(V_h), \quad R_2(V_h), \quad \ldots, \quad R_n(V_h),$$

V_h étant une quelconque des racines V_1, V_2, ..., V_ν. En effet,

l'équation f admet par hypothèse la racine $R_1(V_1)$: l'équation

$$f[R_1(V)] = 0$$

est donc satisfaite pour $V = V_1$; il s'ensuit qu'elle doit être satisfaite pour $V_2, \ldots, V_\nu$ (§ 9). Les termes de la suite (7) sont donc des racines ; il reste à prouver qu'ils sont distincts. En effet, si l'on avait par exemple

$$R_1(V_h) - R_2(V_h) = 0 \qquad (h \neq 1),$$

l'équation

$$R_1(V) - R_2(V) = 0$$

étant vérifiée pour $V = V_h$ serait vérifiée pour $V = V_1$, ce qui n'est pas.

11. Indiquons encore une conséquence de la proposition précédente : *Étant donné un nombre quelconque d'irrationnelles algébriques, on peut toujours les exprimer toutes en fonction d'une même irrationnelle.* Soient, par exemple, deux équations algébriques de degré μ et ν

$$\varphi(y) = 0, \qquad \psi(z) = 0:$$

on pourra exprimer y et z en fonctions rationnelles d'une même racine d'une troisième équation algébrique dont les coefficients appartiennent au même domaine de rationalité. En effet, les racines

$$y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_\mu; \qquad z_1, \; z_2, \; \ldots, \; z_\nu$$

sont racines d'une même équation algébrique

$$f(x) = 0,$$

et, comme rien ne supposait plus haut que $f(x)$ était irréductible, nous pouvons appliquer le théorème précédent, et exprimer ainsi les y et z en fonction rationnelle d'une irrationnelle auxiliaire V.

12. Nous pouvons maintenant généraliser le point de vue auquel nous nous étions d'abord placé pour définir l'irréductibilité d'une équation. Nous avons jusqu'ici considéré le domaine de rationalité $(R_1, R_2, \ldots)$. Nous pouvons adjoindre à ce domaine des fonctions algébriques de $R_1, R_2, \ldots$, c'est-à-dire des racines d'équations algébriques

$$\varphi(u, R_1, R_2, \ldots) = 0, \qquad \psi(v, R_1, R_2, \ldots) = 0, \qquad \ldots.$$

Cela posé, une équation en x

$$f(x, u, v, \ldots, R_1, R_2, \ldots) = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles à coefficients entiers de $u, v, \ldots, R_1, R_2, \ldots$, sera réductible, si elle a une racine commune avec une équation de même forme et de degré moindre. D'après le paragraphe précédent, on peut supposer que l'on adjoint *une seule* fonction algébrique. Nous aurions donc l'équation

$$\varphi(u, R_1, R_2, \ldots) = 0,$$

que l'on peut supposer irréductible au sens des paragraphes précédents, et l'équation

$$f(x, u, R_1, R_2, \ldots) = 0,$$

qui peut d'ailleurs ne pas renfermer u. Il sera facile de reconnaître si cette équation est réductible au sens généralisé que nous adoptons maintenant. En procédant comme au paragraphe 8, il suffit de reconnaître si l'équation admet une racine fonction rationnelle de $u, R_1, R_2, \ldots$ à coefficients entiers. Or, si m est le degré de φ par rapport à u, une telle racine sera de la forme

$$x = A_0 + A_1 u + \ldots + A_{m-1} u^{m-1},$$

les A étant des fonctions rationnelles des R à coefficients commensurables. En substituant cette expression dans l'équation f, nous aurons une relation de la forme

$$\psi(u, A_0, \ldots, A_{m-1}, R_1, R_2, \ldots) = 0.$$

On ramènera toutes les puissances de u dans ψ à être au plus de degré $m - 1$, en se servant de l'équation φ, et l'on devra alors avoir une identité, ce qui donnera m équations pour déterminer les A. On est ainsi ramené au problème, déjà étudié, de reconnaître si des équations peuvent être vérifiées par des fonctions rationnelles, à coefficients entiers, de certains paramètres qui y figurent.

Comme exemple d'une équation devenue réductible par l'adjonction d'une irrationnelle, il suffira de prendre l'équation

$$x^4 - 2x^2 - 3 = 0.$$

Elle est irréductible quand le domaine de rationalité est l'ensemble

des nombres entiers. Elle devient au contraire réductible quand on adjoint l'irrationnelle u définie par

$$u^2 - 3 = 0,$$

puisque l'équation peut s'écrire

$$(x^2 - 3)(x^2 + 1) = 0,$$

d'où il résulte que $x^4 - 2x^2 - 3$ admet le facteur $x - u$.

III. — Théorème fondamental de Galois; groupe d'une équation algébrique (¹).

13. Arrivons maintenant aux principes si féconds introduits par Galois dans la théorie des équations algébriques. Nous commencerons par la notion fondamentale du *groupe* d'une équation algébrique. Nous partons d'une équation de degré n

$$f(x) = 0,$$

dont les coefficients appartiennent à un certain domaine de rationalité, et dont les racines sont inégales. Soit, comme plus haut,

(¹) Les Œuvres mathématiques d'Évariste Galois ont été publiées dans le *Journal de Mathématiques* (1ʳᵉ série, t. XI, 1846). La lettre écrite à Auguste Chevalier par Galois, la veille même de sa mort (29 mai 1832), a été aussi insérée dans ce Volume. Le numéro de septembre 1832 de la *Revue encyclopédique* contient une Notice nécrologique sur Évariste Galois, où l'on trouvera les renseignements les plus intéressants sur la destinée tragique de ce géomètre, d'un incomparable génie, mort à 20 ans.

Galois est surtout connu pour ses célèbres travaux sur les équations algébriques. Il avait fait en Analyse des découvertes au moins aussi éclatantes. Comme on le voit dans sa lettre à Auguste Chevalier, il avait approfondi l'étude des intégrales de différentielles algébriques, les avait classées, comme on l'a fait depuis, en trois espèces et avait trouvé le nombre de leurs périodes.

Les Œuvres de Galois ont été réimprimées par les soins de la Société mathématique de France (Gauthier-Villars, 1897). Un extrait des principaux manuscrits de Galois, remis par A. Chevalier à Liouville, et restés jusqu'ici dans les papiers de l'éminent géomètre, vient d'être publié par M. Tannery (Gauthier-Villars, 1908). La fille de Liouville, Mᵐᵉ de Blignières, a fait don de ces manuscrits à la Bibliothèque de l'Institut.

Une belle Notice sur la vie d'Évariste Galois a été écrite par M. Paul Dupuy dans les *Annales de l'École Normale* (3ᵉ série, t. XIII, 1896); on y voit que dans sa courte vie la politique occupe Galois au moins autant que la science.

au paragraphe 10,

$$V = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

une fonction rationnelle des racines, dont les $1.2\ldots n$ valeurs sont différentes quand on permute les racines de toutes les manières possibles. On pourra, par exemple, prendre, comme l'indique Galois,

$$V = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n,$$

les a étant des grandeurs arbitraires appartenant au domaine de rationalité. Désignons, comme plus haut (§ 10), par $\psi(V)$ un facteur irréductible de degré ν de l'équation donnant les $1.2\ldots n$ valeurs de V et soient toujours $V_1, V_2, \ldots, V_\nu$ les racines de ψ. D'après ce que nous avons dit, les racines peuvent être représentées par l'une quelconque des lignes horizontales du Tableau suivant :

$$\begin{array}{llll} R_1(V_1), & R_2(V_1), & \ldots, & R_n(V_1), \\ R_1(V_2), & R_2(V_2), & \ldots, & R_n(V_2), \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ R_1(V_\nu), & R_2(V_\nu), & \ldots, & R_n(V_\nu). \end{array}$$

Chacune de ces lignes représente une permutation des racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$. J'ajoute que toutes ces permutations sont différentes, car, autrement, l'expression $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$ devrait être à la fois égale à V_1 et à V_2. Nous allons montrer qu'*à ces permutations correspond un groupe de substitutions*. La première ligne se réduit à

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n.$$

Désignons par

$$S_1 = 1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_\nu$$

les substitutions correspondant au passage de la première ligne à elle-même et à chacune des suivantes. Nous savons (§ 10) que

$$V_k = \theta_k(V_1),$$

θ_k étant une fonction rationnelle ; le remplacement de V_1 par $\theta_k(V_1)$ donne la substitution S_k. La substitution S_k donne donc la permutation

$$R_1[\theta_k(V_1)], \quad R_2[\theta_k(V_1)], \quad \ldots, \quad R_n[\theta_k(V_1)].$$

Si nous voulons maintenant effectuer sur cette permutation la substitution S_k, il faudra remplacer V_1 par $\theta_k(V_1)$; nous aurons donc

la permutation

$$(8) \qquad R_1[\theta_k(\theta_h)], \quad R_2[\theta_k(\theta_h)], \quad \ldots, \quad R_n[\theta_k(\theta_h)];$$

mais on voit immédiatement que

$$\theta_k[\theta_h(V_1)]$$

est une racine de $\psi(V)$, car cette expression n'est autre chose que $\theta_k(V_h)$. Or, puisqu'on a

$$\psi[\theta_k(V_1)] = 0,$$

l'équation

$$\psi[\theta_k(V)] = 0$$

a une racine commune avec $\psi(V) = 0$. Elle admet donc toutes les racines de cette dernière équation et en particulier V_h. La suite (8) fait donc partie des substitutions de notre Tableau, et celles-ci forment bien un groupe qui est évidemment d'ordre ν. Galois appelle ce groupe *le groupe de l'équation* pour le domaine considéré de rationalité. Nous allons maintenant démontrer la double propriété caractéristique de ce groupe, que nous désignerons par G.

14. Le théorème fondamental peut s'énoncer de la manière suivante :

Toute fonction rationnelle des racines, invariable par les substitutions du groupe G, *appartient au domaine de rationalité, et réciproquement toute fonction rationnelle des racines appartenant au domaine de rationalité reste invariable par les substitutions du groupe.*

Il est essentiel de remarquer, avec Galois, qu'on appelle ici *fonction invariable* non seulement une fonction dont la forme algébrique est invariable par les permutations des racines entre elles, mais encore toute fonction dont la valeur *numérique* ne varie pas par ces substitutions, alors même que sa forme algébrique aurait varié.

Démontrons d'abord la première partie du théorème. Toute fonction des racines peut se mettre sous la forme

$$F = \lambda(V),$$

V étant une racine de l'équation $\psi(V) = 0$ considérée au paragraphe précédent, et, puisque cette fonction a la même valeur *numérique*

pour toutes les substitutions du groupe G, on aura

$$\lambda(V_1) = \lambda(V_2) = \ldots = \lambda(V_\nu)$$

et, par suite,

$$F = \frac{1}{\nu}[\lambda(V_1) + \lambda(V_2) + \ldots + \lambda(V_\nu)];$$

F est donc une fonction symétrique de $V_1, V_2, \ldots, V_\nu$; *elle appartient donc au domaine de rationalité, comme les coefficients de l'équation* ψ.

Passons à la seconde partie. Soit F une fonction rationnelle des racines dont la valeur numérique appartient au domaine de rationalité; nous pouvons écrire

$$\lambda(V_1) - \Omega = 0,$$

en supposant que ce soit pour la disposition des racines correspondant à $V = V_1$ que la fonction prenne la valeur Ω. Mais, puisque l'équation

$$\lambda(V) - \Omega = 0$$

a la racine commune V_1 avec l'équation $\psi(V) = 0$, elle admet toutes les racines de cette dernière équation qui est irréductible, et l'on a, par suite,

$$\lambda(V_1) = \lambda(V_2) = \ldots = \lambda(V_\nu).$$

La valeur numérique de F *est donc invariable par les substitutions de* G.

15. Une remarque très importante est à faire, relativement au groupe d'une équation.

Nous avons d'abord formé l'équation

$$\Psi(V) = 0$$

n'ayant que des racines simples et donnant les $1.2\ldots n$ valeurs de V, et nous avons considéré ensuite un facteur irréductible $\psi(V)$ de cette équation. On doit nécessairement se demander quelle conséquence entraînerait pour le groupe de l'équation la substitution d'un facteur irréductible à un autre. Soit

$$\Psi(V) = \psi(V).\varphi(V)\ldots\chi(V),$$

les différents facteurs $\psi, \varphi, \ldots, \chi$ étant supposés irréductibles et le

facteur ψ d'ordre ν étant celui qui nous a conduit au groupe G. Toutes les racines de $\Psi(V)$ étant fonctions rationnelles de l'une quelconque d'entre elles, une racine de $\varphi(V)$ est fonction rationnelle d'une racine de $\psi(V)$; en désignant par V_1 une racine de ψ, nous avons pour une des racines de φ

$$\theta(V_1).$$

Or, en posant

$$V'_i = \theta(V_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

les V_i désignant les diverses racines de ψ, les quantités V'_i satisfont à une équation d'ordre ν, dont les coefficients appartiendront au domaine de rationalité, et qui ayant une racine commune avec φ, à savoir $\theta(V_1)$, admettra toutes les racines de ce dernier polynome. Donc le degré de φ est au plus égal à celui de ψ; mais un raisonnement tout semblable montre que le degré de ψ est au plus égal à celui de φ. Donc *tous les polynomes* $\psi, \varphi, \ldots, \chi$ *sont de même degré,* et l'on passe de l'un à l'autre au moyen d'une transformation rationnelle.

Nous avons vu que, si l'on substitue dans les expressions

$$R_1(V), \quad R_2(V), \quad \ldots, \quad R_n(V)$$

les différentes racines $V_1, V_2, \ldots, V_\nu$ de l'équation ψ, on obtient l'ensemble des permutations correspondant au groupe G, la première permutation étant précisément, si l'on veut,

$$(\Sigma) \qquad x_1 = R_1(V_1), \quad x_2 = R_2(V_1), \quad \ldots, \quad x_n = R_n(V_1).$$

Si l'on considère maintenant les racines

$$V'_1, \quad V'_2, \quad \ldots \quad V'_\nu$$

du facteur φ, la suite

$$R'_1(V'_1), \quad R'_2(V'_1), \quad \ldots, \quad R'_n(V'_1),$$

où les R' représentent des fonctions rationnelles, donne encore la suite des racines de l'équation $f(x) = 0$. Or

$$V'_i = \theta(V_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots \nu);$$

la suite précédente peut donc s'écrire

$$(\Sigma') \qquad R'_1[\theta(V_1)], \quad R'_2[\theta(V_1)], \quad \ldots, \quad R'_n[\theta(V_1)].$$

En mettant dans la suite (Σ'), à la place de V_1, les autres racines

$V_2, \ldots, V_\nu$, on obtiendra le groupe G' qu'aurait donné le facteur φ. Soit S la substitution par laquelle on passe de (Σ) à (Σ'); elle fera passer x_h du rang h au rang k, et l'on aura

$$R_h(V_1) = R'_k[\theta(V_1)], \qquad \text{d'où} \qquad R_h(V_i) = R'_k[\theta(V_i)].$$

On en conclut que la même substitution S fait passer d'une ligne de G à la ligne de même rang dans G' : donc, si g et g' désignent ces deux substitutions correspondantes, on aura

$$g' = S g S^{-1},$$

et le groupe G' est, par conséquent, la transformée du groupe G par la substitution S.

Ainsi, si Ψ a r facteurs irréductibles, nous pourrons former r groupes, qui seront les transformés de l'un d'entre eux par $r-1$ substitutions convenables. En considérant comme équivalents deux groupes transformés l'un de l'autre, on peut dire qu'à une équation ne correspond qu'un groupe.

16. Le groupe d'une équation se réduira, *en général*, au groupe symétrique, c'est-à-dire à l'ensemble des substitutions correspondant aux $1.2\ldots n$ permutations de n lettres. Ainsi, considérons l'équation *générale* d'ordre n

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n = 0;$$

j'entends par là une équation pour laquelle le domaine de rationalité soit défini par les paramètres $(p_1, \ldots, p_n)$.

Toute fonction rationnelle des racines $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ restant invariable par les substitutions du groupe de cette équation doit pouvoir s'exprimer rationnellement en fonction de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, et l'on a

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = R(p_1, p_2, \ldots p_n);$$

mais on peut considérer ici $p_1, p_2, \ldots, p_n$ comme fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qu'on prendra comme variables indépendantes, et alors, le second membre étant symétrique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il en est de même du premier.

17. Lorsque le groupe G d'une équation n'est pas le groupe symétrique, cette équation est une équation particulière. Elle est caracté-

risée par ce fait qu'il existe nécessairement entre les racines au moins une relation rationnelle, cette relation n'ayant pas lieu pour toute substitution faite sur ces racines. On a, en effet, d'après ce qui précède, en désignant toujours par $\psi(V)$ le facteur irréductible considéré plus haut,

$$\psi(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n) = 0.$$

La fonction $\psi(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n)$, dont la valeur numérique est zéro, reste invariable par les substitutions du groupe G; mais elle variera pour toute autre substitution, puisqu'à celle-ci correspond une valeur de V, qui n'est pas racine de $\psi(V)$. La relation précédente est donc une relation rationnelle entre les racines, et cette relation cesse d'être vérifiée quand on permute les x d'une manière quelconque.

Inversement, s'il existe une relation

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

entre les racines, relation qui ne soit pas vérifiée pour toute permutation des x, il est aisé de voir que le groupe de l'équation ne sera pas le groupe symétrique. Si l'on remplace, en effet, les x par leur valeur en fonction de V, l'équation précédente, en tenant compte de l'équation $\Psi(V)$, se réduira à une équation

$$\psi_1(V) = 0,$$

ψ_1 étant au plus du degré

$$1.2\ldots n - 1,$$

et elle ne se réduira pas à une identité, car autrement la relation φ se trouverait vérifiée pour toute substitution faite sur les x, ce que nous ne supposons pas. La résolvante de Galois

$$\Psi(V) = 0$$

admet donc un facteur rationnel de degré inférieur à $1.2\ldots n$, et le groupe de l'équation n'est pas le groupe symétrique.

18. Terminons cette Section par quelques remarques relatives aux fonctions rationnelles des racines d'une équation. Soit une fonction rationnelle des racines

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Supposons qu'elle garde la même valeur *numérique* quand on fait sur les x une substitution

$$(S) \qquad \begin{pmatrix} x_\alpha & x_\beta & \dots & x_\lambda \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix};$$

ceci veut dire que l'on aura l'égalité numérique

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda),$$

égalité qui ne subsisterait pas nécessairement si les x étaient des variables indépendantes.

Mais cette définition n'est bien nette que si l'on parle d'une fonction φ *parfaitement déterminée*. On pourrait exprimer, d'une manière ou d'une autre, par exemple au moyen des relations entre les racines quand il en existe, la fonction $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sous une autre forme $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, et l'on *n'aurait pas nécessairement*

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi(x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda).$$

On ne peut donc pas, d'une manière générale, parler d'une fonction des racines restant invariable pour une substitution, à moins de prendre la fonction *sous une forme déterminée*. Cette restriction, qui pourrait être une source de difficultés, sera heureusement inutile si la substitution (S) appartient au groupe de l'équation. Si l'on a, en effet,

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) - \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

on a, dans le premier membre, une fonction des racines dont la valeur *zéro* appartient au domaine et, par suite, d'après le théorème fondamental, on aura encore

$$\varphi(x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda) - \psi(x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda) = 0.$$

Si donc φ est numériquement invariable pour la substitution S, il en sera de même de ψ. *On pourra donc faire abstraction des expressions multiples que peut recevoir une fonction rationnelle des racines si les substitutions que l'on veut effectuer appartiennent au groupe de l'équation.* Cette remarque, que l'on omet généralement, sera d'une grande importance dans tout le développement de la théorie.

Voici maintenant un théorème important rappelant celui de

Lagrange par la forme de l'énoncé. Je considère une fonction

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

rationnelle des racines gardant la même valeur numérique pour les substitutions d'un groupe G' faisant partie du groupe G de l'équation, et pour celles-là seulement; *toute autre fonction* F *numériquement invariable pour les substitutions de* G' *s'exprimera rationnellement à l'aide de la première.*

Introduisons toujours l'équation

$$\psi(V) = 0$$

et les expressions de $x_1, x_2, \dots, x_n$ à l'aide de V. Le groupe de substitutions G' sur les x correspond à un échange entre certaines racines

$$V_1, \quad V_2, \quad \dots, \quad V_\alpha \qquad (\alpha < \nu)$$

de l'équation précédente.

Quant aux fonctions $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, nous pouvons les mettre sous la forme

$$f(V), \quad F(V).$$

Or, en désignant par a la valeur de f pour $V_1, V_2, \dots, V_\alpha$, l'équation

$$f(V) = a$$

est vérifiée pour $V_1, V_2, \dots, V_\alpha$, et ce sont les seules racines qu'elle ait en commun avec l'équation

$$\psi(V) = 0.$$

Or l'équation donnant les racines communes à ces deux équations s'obtient en cherchant un plus grand commun diviseur, opération qui n'introduit aucune irrationalité. Par suite, $V_1, V_2, \dots, V_\alpha$ sont racines d'une équation de la forme

$$\lambda(V, a) = 0,$$

où les coefficients sont fonctions rationnelles de a. Or, on a aussi

$$F(V_1) = F(V_2) = \dots = F(V_\alpha);$$

donc nous pouvons écrire

$$F = \frac{1}{\alpha}[F(V_1) + F(V_2) + \ldots + F(V_\alpha)],$$

et par suite F, symétrique en $V_1, V_2, \ldots, V_\alpha$, s'exprime rationnellement à l'aide de a, c'est-à-dire de f; c'est ce que nous voulions démontrer [1].

IV. — Groupes simples et groupes composés; groupes transitifs.

19. Avant de montrer l'importance de la notion de groupe d'une équation algébrique, approfondissons davantage les généralités déjà étudiées dans la première Section de ce Chapitre sur les groupes de substitutions.

On dit qu'un groupe G relatif à p lettres contient un autre groupe Γ s'il renferme toutes les substitutions de cet autre groupe. Le second groupe Γ est appelé *sous-groupe* du premier.

Faisons voir d'abord qu'*un sous-groupe d'un groupe donné a pour ordre un diviseur de l'ordre du groupe.*

Désignons respectivement par m et μ les ordres des groupes G et Γ, et soient

$$(9) \qquad S_1, \ S_2, \ S_3, \ \ldots, \ S_\mu \qquad (S_1 = 1)$$

les substitutions de Γ ; ces substitutions appartiennent à G et l'on a par hypothèse $m > \mu$. Il y aura donc une substitution T de G, qui

---

(1) Nous nous sommes placé dans cette Section, comme d'ailleurs dans tout ce Chapitre, au point de vue arithmétique, qui est celui de Galois. En se plaçant au point de vue de la théorie des fonctions, et prenant en particulier une équation algébrique en y,

$$f(y, x) = 0,$$

dont les coefficients sont fonctions rationnelles d'un paramètre x, on peut considérer le groupe des substitutions relatives aux permutations des racines quand x part d'un point pour y revenir après avoir décrit un chemin quelconque. On obtient alors des théorèmes analogues à ceux de Galois; on pourra consulter à ce sujet une Note de M. HERMITE *Sur les fonctions algébriques* (*Comptes rendus*, t. XXXII, 1851). Dans son *Traité*, M. Jordan appelle le groupe dont je viens de parler *le groupe de monodromie.*

n'appartient pas à la suite précédente ; les substitutions

$$(10)\qquad TS_1,\ TS_2,\ \ldots,\ TS_\mu$$

appartiendront donc à G ; elles sont distinctes et, de plus, aucune n'appartient à la suite (9), car, si l'on avait

$$TS_i = S_k,$$

on en conclurait

$$T = S_k S_i^{-1},$$

c'est-à-dire que T appartiendrait à la suite (9) qui, par hypothèse, forme un groupe. De là résulte que l'on a $m = 2\mu$ ou $m > 2\mu$. Dans le second cas, il y aura une substitution T' de G n'appartenant pas aux suites (9) et (10), et nous aurons une nouvelle suite

$$(11)\qquad T'S_1,\ T'S_2,\ \ldots,\ T'S_\mu$$

de substitutions de G et, par suite, m sera égal ou supérieur à 3μ. En continuant ainsi, on arrive à partager les m substitutions de G en un certain nombre n de μ substitutions données par les suites (9), (10), (11), ...; nous avons donc bien

$$m = n\mu,$$

comme nous l'avons énoncé.

Un corollaire immédiat est relatif aux substitutions communes à deux groupes. Ces substitutions forment évidemment un groupe, et *l'ordre de celui-ci, d'après le théorème précédent, est un diviseur commun des ordres des groupes considérés.*

20. Le tableau des substitutions de G, mis sous la forme

$$\left.\begin{matrix} S_1, & S_2, & \ldots, & S_\mu \\ T_1S_1, & T_1S_2, & \ldots, & T_1S_\mu \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ T_{n-1}S_1, & T_{n-1}S_2, & \ldots, & T_{n-1}S_\mu \end{matrix}\right\} \quad (S_1 = 1),$$

qui se présente déjà dans les *Exercices d'Analyse* de Cauchy, est extrêmement important dans la théorie des substitutions.

Si une fonction de p lettres reste invariable pour les substitutions de Γ et pour celles-là seulement, cherchons le nombre des valeurs que prendra cette fonction pour l'ensemble des substitutions de G.

Soit donc la fonction

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_\mu),$$

qui reste invariable pour les substitutions $S_1, S_2, \ldots, S_\mu$; toutes les substitutions

$$T_1 S_i$$

transformeront φ_1 en la même fonction que la substitution T_1, puisque la première substitution à effectuer S_i transforme φ_1 en lui-même. Appelons φ_2 ce que devient φ_1 par la substitution T_1. De même la substitution T_2 nous donnera une fonction φ_3, ainsi que tous les termes de la troisième ligne. Nous obtenons ainsi n fonctions

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n$$

correspondant respectivement aux n lignes du Tableau ci-dessus. D'ailleurs, toutes ces fonctions sont distinctes. Supposons, en effet, que T_α et T_β donnent la même fonction et que β soit plus grand que α ; la substitution

$$T_\alpha^{-1} T_\beta$$

transformerait φ_1 en lui-même, et l'on aurait par suite

$$T_\alpha^{-1} T_\beta = S_k,$$

c'est-à-dire

$$T_\beta = T_\alpha S_k,$$

ce qui est contraire aux hypothèses faites, car on a appelé T_β une substitution de G, qui ne se trouvait pas dans les lignes précédentes.

21. Nous venons de dire que, si l'on effectue sur φ_1 toutes les substitutions

$$T_1 S_1, \quad T_1 S_2, \quad \ldots, \quad T_1 S_\mu,$$

on obtient la fonction φ_2. Il est facile d'en déduire quelles sont les substitutions transformant φ_2 en lui-même. Si Σ désigne une telle substitution, la substitution

$$T_1^{-1} \Sigma T_1$$

transformera φ_1 en lui-même : on aura donc

$$T_1^{-1} \Sigma T_1 = S_\alpha$$

et, par suite,

$$\Sigma = T_1 S_\alpha T_1^{-1}.$$

Cette substitution est donc une transformée par T_1 d'une substitution de la première ligne. Nous avons déjà introduit (§ 6) cette expression de transformée d'une substitution par une autre, et défini ce qu'on entend par *transformé* d'un groupe par une substitution. De ce que nous venons de dire, il résulte que le groupe correspondant à la fonction

$$\varphi_\lambda$$

est le groupe transformé de Γ par la substitution $T_{\lambda-1}$ (on doit prendre $T_0 = 1$).

22. Un cas particulier intéressant est celui où ces sous-groupes correspondant respectivement aux différentes fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ auraient eux-mêmes un sous-groupe commun ; soit H le sous-groupe formé par toutes les substitutions laissant $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ invariables. Si h désigne une substitution de H, et que s représente une substitution quelconque de G, la substitution

$$shs^{-1}$$

transforme φ_α en lui-même quel que soit α. Car tout d'abord la substitution s^{-1} transformera φ_α en une autre fonction φ_β, la substitution h conserve φ_β, et enfin s nous ramène à φ_α. Il en résulte que le groupe

$$sHs^{-1}, \tag{12}$$

transformé de H par la substitution s, est le groupe H lui-même. D'une manière générale on dit qu'un groupe H, sous-groupe d'un groupe G, est un *sous-groupe invariant* de ce groupe, quand la transformée de H par une substitution quelconque de G est identique à H.

Un groupe G *qui contient un sous-groupe invariant* (non formé de la seule substitution un) *est dit* COMPOSÉ; *dans le cas contraire, le groupe est dit* SIMPLE.

23. Revenons au cas général. La suite

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n$$

forme l'ensemble des valeurs que prend une fonction φ pour l'ensemble des substitutions de G. A chaque substitution du groupe G

correspond une substitution des lettres φ, et l'ensemble de ces substitutions des φ forme évidemment un groupe g. Deux groupes correspondants tels que G et g sont, d'une manière générale, désignés par M. Camille Jordan sous le nom de *groupes isomorphes;* à chaque substitution de G correspond une seule substitution de g, mais à une substitution de g peuvent correspondre plusieurs substitutions de G. A chaque substitution de g correspond le même nombre de substitutions de G, à savoir le nombre de ces dernières substitutions qui correspondent à la substitution *unité* des φ; si, en effet, Σ et Σ' sont deux substitutions de G correspondant à une même substitution de g, la substitution

$$\Sigma^{-1}\Sigma'$$

de G correspondra à la substitution unité des φ et l'on aura $\Sigma' = \Sigma\sigma$ en désignant par σ une substitution de G correspondant à la substitution unité des φ.

Or le nombre des substitutions σ est précisément égal à celui des substitutions qui appartiennent à tous les sous-groupes correspondant respectivement aux fonctions φ; nous venons de les considérer à la fin du paragraphe précédent, et nous avons désigné par H le groupe que forme leur ensemble. L'ordre de H sera le nombre des substitutions de G qui correspondent à une même substitution de g.

On peut désigner par le symbole

$$G \mid \Gamma$$

le groupe des φ que nous venons de définir.

Examinons le cas où Γ est un sous-groupe invariant de G; le groupe H coïncidera avec Γ. En revenant au Tableau

$$\begin{array}{cccc}
S_1, & S_2, & \ldots, & S_\mu, \\
T_1\ S_1, & T_1\ S_2, & \ldots, & T_1\ S_\mu, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\
T_{n-1} S_1, & T_{n-1} S_2, & \ldots, & T_{n-1} S_\mu,
\end{array}$$

on voit qu'à chaque substitution des φ correspondent dans G les μ substitutions d'une même ligne; en effet, les deux substitutions

$$T_i S_\alpha \quad \text{et} \quad T_i S_\beta$$

donnent la même permutation des φ, à savoir celle qui correspond à la permutation T_i. Le groupe g des φ est d'ordre n.

Si le groupe des φ admet un sous-groupe g', l'isomorphisme fera correspondre aux substitutions de ce dernier dans G un sous-groupe G' formé seulement d'une partie des substitutions de G. Ce groupe sera formé d'un certain nombre de lignes du Tableau, et il contiendra la première qui correspond à la substitution unité.

On en conclut que G' contient le groupe Γ, qui en est un sous-groupe.

Une application importante du résultat précédent concerne le cas où le groupe Γ est un sous-groupe invariant *maximum* de G. *Nous entendons par* sous-groupe invariant maximum *d'un groupe* G *un sous-groupe invariant* Γ *tel qu'il n'existe aucun groupe, sous-groupe invariant de* G, *contenant* Γ *comme sous-groupe*. Dans ce cas, le groupe g des φ doit être *simple*, car autrement il contiendrait un sous-groupe invariant g' auquel correspondrait un sous-groupe invariant G', qui admettrait lui-même le sous-groupe Γ, et celui-ci ne serait pas, par suite, un sous-groupe invariant maximum. La réciproque est évidente : *si g est un groupe simple,* Γ *est un sous-groupe invariant maximum.*

Si nous revenons au cas général, dans lequel Γ n'est pas un sous-groupe invariant, on montrera de la même manière que, si le groupe H est un sous-groupe invariant maximum, le groupe g est simple.

24. Après la notion de groupes simples et de groupes composés, introduisons encore une autre notion jouant dans la théorie un rôle capital. On dit d'un groupe qu'il est *transitif* quand il existe dans ce groupe au moins une substitution remplaçant un élément quelconque x_α par un autre élément x_β arbitrairement choisi. Un groupe qui n'est pas transitif est dit *intransitif*.

Reprenons, par exemple, la fonction déjà considérée (§ 7)

$$x_1x_2 + x_3x_4.$$

Il existe un groupe de huit substitutions la transformant en elle-même, et parmi ces substitutions on peut en trouver qui remplacent x_1 par une quelconque des autres lettres x_2, x_3, x_4. Le groupe correspondant à cette fonction est donc transitif.

Prenons maintenant la fonction

$$x_1x_2 - x_3x_4.$$

Parmi les substitutions transformant cette fonction en elle-même, il n'y en aura pas remplaçant x_1 par x_3 ou x_4 ; le groupe de cette fonction est intransitif ([1]).

V. — Composition des groupes; théorème de M. Jordan.

25. La composition des groupes forme un Chapitre important de la théorie des substitutions. Soit un groupe composé G ; formons une suite de groupes

$$G, \quad G_1, \quad G_2, \quad \ldots, \quad G_p, \quad 1$$

dont chacun est un sous-groupe invariant maximum du précédent, et dont le dernier est formé par la substitution unité. Soient

$$m, \quad m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_p, \quad 1$$

les ordres respectifs de ces groupes. Les nombres

$$\frac{m}{m_1}, \quad \frac{m_1}{m_2}, \quad \ldots, \quad \frac{m_p}{1}$$

sont des entiers, puisque chaque groupe est un sous groupe du précédent. On les appelle les *facteurs de composition* du groupe G.

Il peut arriver que les opérations précédentes puissent se faire de différentes manières. A chaque série de groupes correspondra alors une suite de facteurs de composition. M. Jordan a démontré ([2]) que *les facteurs de composition sont les mêmes, à l'ordre près, et, par suite, sont en même nombre.*

Ainsi, si l'on a les deux suites de groupes

$$\begin{array}{llllll} G, & G_1, & G_2, & \ldots, & G_p, & 1, \\ G, & G'_1, & & \ldots, & G'_{p'}, & 1, \end{array}$$

([1]) Outre la notion de groupe simple ou composé et de groupe transitif ou intransitif, une autre notion est encore d'une certaine importance dans la théorie des groupes : c'est celle de la *primitivité*. Quoique nous n'ayons pas à en faire usage dans la suite, indiquons cependant une définition. Un groupe transitif est dit *non primitif* lorsque les lettres peuvent y être réparties en systèmes contenant le même nombre de lettres et telles que, dans toutes les substitutions du groupe, les lettres de chaque système soient remplacées par les lettres d'un même système. Les groupes dans lesquels les lettres ne sont pas susceptibles d'être réparties en de tels systèmes sont dits *primitifs*.

([2]) C. JORDAN, *Traité des substitutions*, p. 48.

on aura $p = p'$, et les quotients des m relatifs au second groupe seront les mêmes, à l'ordre près, que pour le premier.

26. Pour démontrer cet important théorème, commençons par un lemme préliminaire ([1]). Soient G et G' deux groupes permutables, c'est-à-dire tels que l'on ait

$$G'GG'^{-1} = G,$$

en entendant par là que la transformée du groupe G par une substitution quelconque de G' redonne le groupe G, et inversement. Désignons par m et m' les ordres de ces deux groupes. Les substitutions communes à G et G' forment un groupe Γ d'ordre μ, et l'on a

$$m = n\mu, \qquad m' = n'\mu.$$

En employant les notations analogues à celles des paragraphes **19** et **20**, nous pouvons mettre les substitutions de G et G' sous la forme des deux Tableaux :

$$\begin{matrix} T_1 S_1, & T_1 S_2, & \ldots, & T_1 S_\mu \\ T_2 S_1, & T_2 S_2, & \ldots, & T_2 S_\mu \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots \\ T_n S_1, & T_n S_2, & \ldots, & T_n S_\mu \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} T'_1 S_1, & T'_1 S_2, & \ldots, & T'_1 S_\mu, \\ T'_2 S_1, & T'_2 S_2, & \ldots, & T'_2 S_\mu, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ T'_{n'} S_1, & T'_{n'} S_2, & \ldots, & T'_{n'} S_\mu, \end{matrix}$$

nous introduisons seulement, pour la symétrie, la substitution $T_1 = T'_1 = 1$; on a aussi $S_1 = 1$, comme plus haut.

Montrons que *les substitutions*

$$T'_\gamma T_\beta S_\alpha$$

forment un groupe d'ordre $\dfrac{mm'}{\mu}$ *contenant les deux groupes* G *et* G' *comme sous-groupes invariants, et que le groupe* $\Gamma(S_1, S_2, \ldots, S_\mu)$ *est un sous-groupe invariant de* G *et de* G'.

Démontrons d'abord la dernière partie de l'énoncé : on a

$$T_\beta S_\gamma S_\alpha (T_\beta S_\gamma)^{-1} = T_\beta S_\gamma S_\alpha S_\gamma^{-1} T_\beta^{-1} = T_\beta S_{\alpha'} T_\beta^{-1} = S_{\alpha''}.$$

La dernière de ces égalités provient de ce que les deux groupes G et

---

([1]) Nous suivons la même marche que M. NETTO dans son *Traité des substitutions* (p. 87 et suiv.).

G' sont permutables, car, $S_{\alpha'}$ appartenant à G', sa transformée par la substitution T_β de G appartient à G'; d'autre part, cette transformée de S'_α par T_β, formée de substitutions de G, appartient à G : elle appartient donc à G et à G', c'est donc une substitution S''_α.

Pour la première partie du lemme, faisons le produit de deux substitutions de la forme indiquée; en désignant par la lettre Σ avec un indice une substitution de G, on aura à faire le produit des deux substitutions

$$(\varepsilon) \qquad T'_\gamma \Sigma_\lambda \quad \text{et} \quad T'_{\gamma'} \Sigma_{\lambda'}.$$

Or, le produit $T'_\gamma \Sigma_\lambda T'_{\gamma'} \Sigma_{\lambda'}$ peut s'écrire

$$T'_\gamma T'_{\gamma'} \Sigma_{\lambda''} \Sigma_{\lambda'}$$

si l'on observe que l'on a

$$\Sigma_\lambda T'_{\gamma'} = T'_{\gamma'} \Sigma_{\lambda''}$$

comme conséquence de la relation $T'^{-1}_{\gamma'} \Sigma_\lambda T'_{\gamma'} = \Sigma_{\lambda''}$, qui exprime que les groupes G et G' sont permutables. Or, d'autre part,

$$T'_\gamma T'_{\gamma'} = T'_{\gamma''} S_{\alpha'}.$$

Nous avons donc le produit des substitutions (ε) sous la forme

$$T'_{\gamma''} S_{\alpha'} \Sigma_{\lambda''} \Sigma_{\lambda'} = T'_{\gamma''} \Sigma_{\lambda'''};$$

il est, par suite, de même forme que chacune des substitutions (ε). On verrait, par des transformations analogues, que l'inverse d'une substitution de la forme (ε) et le quotient de deux telles substitutions sont encore de la même forme. *Ces substitutions forment donc un groupe;* nous l'appellerons le *groupe* Δ.

Pour évaluer l'ordre du groupe ainsi obtenu, et montrer qu'il est égal au nombre des T' multiplié par le nombre des Σ, c'est-à-dire $n'n\mu$ ou $\frac{mm'}{\mu}$, il suffit de faire voir que toutes les substitutions $T'_\gamma T_\beta S_\alpha$ sont distinctes, α, β, γ ayant les valeurs

$$\alpha = 1, 2, \ldots, \mu,$$
$$\beta = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\gamma = 1, 2, \ldots, n'.$$

Si l'on avait, en effet,

$$T'_\gamma T_\beta S_\alpha = T'_{\gamma'} T_{\beta'} S_{\alpha'},$$

on en déduirait

$$T'^{-1}_{\gamma'} T'_{\gamma} = T_{\beta'} S_{\alpha'} S_{\alpha}^{-1} T_{\beta}^{-1};$$

le premier membre représente une substitution du groupe G′, le second une substitution du groupe G ; ils ne peuvent être égaux que si leur valeur commune représente une substitution de Γ, c'est-à-dire une substitution S. On aurait donc

$$T'^{-1}_{\gamma'} T'_{\gamma} = S_{\delta}$$

ou

$$T'_{\gamma} = T'_{\gamma'} S_{\delta},$$

ce qui ne peut avoir lieu, d'après la loi même de formation des deux Tableaux, que si $\gamma = \gamma'$ et $S_{\delta} = 1$. On en déduit

$$T_{\beta} = T_{\beta'} S_{\alpha'} S_{\alpha}^{-1}$$

et, par suite, $\beta = \beta'$, $\alpha = \alpha'$ pour la même raison. *L'ordre du groupe* Δ *est donc* $\dfrac{mm'}{\mu}$.

Le groupe Δ admet évidemment comme sous-groupes les groupes G et G′; il faut faire voir que chacun d'eux, G, *par exemple, est un sous-groupe invariant.* Soient Σ_{α} une substitution quelconque de G, et $T'_{\gamma}\Sigma_{\beta}$ une substitution quelconque de Δ. La transformée de la première par la seconde est

$$T'_{\gamma} \Sigma_{\beta} \Sigma_{\alpha} \Sigma_{\beta}^{-1} T'^{-1}_{\gamma} = T'_{\gamma} \Sigma_{\delta} T'^{-1}_{\gamma}.$$

Or, G et G′ étant permutables, la transformée de Σ_{δ} par T'_{γ} donne encore une substitution de G, et le théorème est établi.

27. Arrivons maintenant à la démonstration du théorème de M. Jordan. En partant du groupe G, nous avons, on le suppose, les deux suites définies plus haut

(I) $\quad G, \; G_1, \; G_2, \; \ldots,$

(II) $\quad G, \; G'_1, \; G'_2, \; \ldots.$

Les deux groupes G_1 et G'_1 sont permutables, et nous allons leur appliquer le théorème que nous venons d'établir pour les groupes appelés G et G′ au paragraphe précédent. Que devient ici le groupe Δ? Il doit se confondre avec G. Tout d'abord, en effet, Δ n'admet que des substitutions appartenant à G; c'est donc un sous-groupe de G.

Ensuite c'est un sous-groupe invariant, comme le sont G_1 et G'_1, ce que vérifie un calcul tout analogue à ceux que nous avons faits plus haut. Si donc Δ ne se confondait pas avec G, ce serait un sous-groupe invariant de G admettant G_1 et G'_1 comme sous-groupes, ce qui est impossible, puisque G_1 et G'_1 sont des sous-groupes maximums.

Il résulte de là que, si l'on désigne par

$$m,\quad m_1,\quad m_2,\quad \ldots,$$
$$m,\quad m'_1,\quad m'_2,\quad \ldots$$

les ordres des groupes des deux suites, on aura

$$m = \frac{m_1 m'_1}{\mu},$$

μ désignant l'ordre du groupe Γ formé par les substitutions communes de G_1 et de G'_1.

D'autre part, le groupe Γ d'ordre μ est un sous-groupe invariant de G_1 et G'_1, d'après le théorème du paragraphe précédent; nous allons montrer qu'il est maximum. Supposons, en effet, qu'il existe un sous-groupe H invariant de G_1 contenant Γ.

Nous allons montrer que le groupe H est permutable à G'_1. Désignons respectivement par s, s' et h, avec des indices, les substitutions de G_1, de G'_1 et de H. On voit de suite, en groupant convenablement les termes, que la substitution

$$s'_\beta h_\alpha s'^{-1}_\beta h_\alpha^{-1}$$

appartient à la fois à G_1 et à G'_1 et, par suite, à Γ. Soit S_λ cette substitution. On en conclut

$$s'_\beta h_\alpha s'^{-1}_\beta = S_\lambda h_\alpha = h_\gamma,$$

ce qui montre que H et G'_1 sont permutables.

Appliquant alors le même théorème à ces deux groupes, on pourrait former un groupe permutable à G et contenant G'_1 comme sous-groupe, ce qui est impossible, puisque G'_1 est maximum. Le groupe H n'existe donc pas, et Γ est un sous-groupe invariant maximum de G_1 et G'_1.

Considérons maintenant une suite de composition du groupe Γ

$$\Gamma,\quad \Gamma_1,\quad \ldots,\quad 1;$$

les deux suites

(III) $\qquad G, \ G_1, \ \Gamma, \ \Gamma_1, \ \ldots, \ 1,$

(IV) $\qquad G, \ G'_1, \ \Gamma, \ \Gamma'_1, \ \ldots, \ 1$

formeront deux suites de composition du groupe G. Pour ces deux suites les facteurs de composition sont les mêmes; la chose est évidente à partir de Γ, puisque les termes sont identiques; et, pour les deux premiers intervalles, cela résulte de la relation établie ci-dessus

$$\frac{m}{m_1} = \frac{m'_1}{\mu} \quad \text{ou} \quad \frac{m}{m'_1} = \frac{m_1}{\mu};$$

donc l'ordre seulement des deux premiers facteurs est interverti.

Puisque les séries (III) et (IV) ont les mêmes facteurs de composition, le théorème que nous avons en vue sera établi, si nous prouvons que (I) et (III), d'une part, (II) et (IV), d'autre part, ont les mêmes facteurs. Mais, pour ces deux derniers couples, la démonstration est d'un degré moindre de difficulté, car, tandis que les suites (I) et (II) n'avaient qu'un groupe commun (le premier), les suites (I) et (III) ont *deux* groupes communs G et G_1; en raisonnant de la même manière on ramènera la démonstration à celle du théorème pour le cas de deux suites ayant les *trois* premiers groupes communs, et ainsi de suite, de proche en proche; ce qui établit le théorème.

28. Dans un intéressant Mémoire ([1]), M. Hölder a étendu le théorème de M. Jordan, en établissant que, non seulement les facteurs numériques de composition forment une suite invariable, mais que les groupes considérés plus haut (§ 23), désignés par

$$G \mid G_1, \quad G_1 \mid G_2, \quad \ldots,$$

et que l'on peut appeler les *groupes facteurs* de G, *forment une suite qui est seulement permutée lorsqu'on passe d'une suite de composition de* G *à une autre*. Nous renverrons pour la démonstration au travail de M. Hölder.

([1]) O. HÖLDER, *Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen* (*Math. Annalen*, t. XXXIV, 1889). Ce Mémoire contient une remarquable et rigoureuse exposition des principaux problèmes concernant le groupe d'une équation.

29. Comme exemple, considérons le groupe symétrique et cherchons à le décomposer en formant la suite définie ci-dessus. Nous ferons d'abord une remarque générale sur la transformée d'une substitution par une autre substitution; soient S une substitution et

$$TST^{-1}$$

sa transformée par T. Montrons que ces deux substitutions sont composées d'un même nombre de cycles portant respectivement sur un même nombre de lettres, ce qu'on exprime souvent en disant qu'elles sont *semblables*. En effet, soit

$$S = (x_1 x_2 x_3 \ldots)(x_k \ldots)\ldots,$$

en mettant les cycles en évidence, et soit la substitution

$$T = \begin{pmatrix} x_\alpha x_\beta x_\gamma \ldots x_\lambda \ldots x_\nu \\ x_1 x_2 x_3 \ldots x_k \ldots x_n \end{pmatrix}.$$

En effectuant successivement les trois substitutions T^{-1}, S, T, l'élément x_α est remplacé par x_1, puis par x_2, et enfin par x_β; donc la substitution TST^{-1} transforme x_α en x_β, puis x_β en x_γ, et ainsi de suite, de telle sorte que

$$TST^{-1} = (x_\alpha x_\beta x_\gamma \ldots)(x_\lambda \ldots)\ldots;$$

ce qui établit bien l'assertion posée plus haut. Il en résulte immédiatement que les deux substitutions S et TST^{-1} peuvent être obtenues en faisant un même nombre de transpositions, puisque des substitutions circulaires d'un même nombre de lettres correspondent à un même nombre de transpositions.

Ceci posé, nous pouvons montrer que le groupe alterné est un sous-groupe invariant du groupe symétrique, car la transformée d'une substitution du groupe alterné par une substitution quelconque renferme, d'après ce qui précède, un nombre pair de transpositions et appartient, par conséquent, au groupe alterné. On remarquera, en outre, que le groupe alterné est un sous-groupe invariant maximum du groupe symétrique, puisque l'ordre d'un sous-groupe du groupe symétrique, étant un diviseur de $1.2\ldots n$, ne peut être supérieur à $\frac{1.2\ldots n}{2}$.

Nous allons maintenant établir que, *si n est supérieur à* quatre, *il*

n'y a pas d'autre groupe invariant dans le groupe symétrique que le groupe alterné. Nous emprunterons la démonstration de ce théorème au *Traité* de M. Jordan (p. 63).

Soit Γ un sous-groupe invariant du groupe symétrique. Supposons en premier lieu que, parmi les cycles d'une de ses substitutions S, il en existe un contenant plus de deux lettres; comme, par une substitution convenable du groupe symétrique, cette substitution S se transforme en une substitution quelconque pourvu que cette dernière ait ses cycles en même nombre et avec le même nombre de lettres que S, nous aurons certainement dans Γ les deux substitutions

$$S_1 = (x_\alpha x_\beta x_\gamma \ldots x_\delta)(x_\varepsilon x_\varphi \ldots)\ldots,$$
$$S_2 = (x_\beta x_\alpha x_\gamma \ldots x_\delta)(x_\varepsilon x_\varphi \ldots)\ldots,$$

les cycles non écrits étant les mêmes dans les deux substitutions. Prenant maintenant la substitution

$$S_1^{-1} S_2,$$

elle fera aussi partie de Γ; mais elle se réduit visiblement au cycle portant sur trois lettres arbitraires

$$(x_\alpha x_\beta x_\delta),$$

toutes les lettres autres que x_α, x_β, x_δ n'étant pas modifiées.

Supposons en second lieu que tous les cycles de S contiennent au plus deux lettres; nous aurons dans Γ les deux substitutions

$$S_1 = (x_\alpha x_\beta)(x_\gamma x_\delta)\ldots,$$
$$S_2 = (x_\alpha x_\gamma)(x_\beta x_\delta)\ldots,$$

les cycles non écrits étant toujours les mêmes, et, par suite, leur produit $S_2 S_1$ est égal à

$$\Sigma = (x_\alpha x_\delta)(x_\beta x_\gamma),$$

toutes les lettres autres que x_α, x_δ, x_β, x_γ n'étant pas modifiées.

Soit maintenant $n > 4$; le groupe Γ contiendra de même

$$\Sigma_1 = (x_\alpha x_\zeta)(x_\beta x_\gamma),$$

ζ étant une lettre arbitraire différente de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. On a enfin

$$\Sigma_1 \Sigma = (x_\alpha x_\delta x_\zeta),$$

et nous avons encore dans Γ une substitution circulaire d'ordre trois portant sur trois lettres arbitraires.

Or, il est aisé de voir qu'un groupe, contenant tous les cycles de trois lettres arbitraires, se réduit au groupe symétrique ou au groupe alterné. En effet, le produit $T'T$ des deux substitutions

$$T = (x_1 x_2 x_3),$$
$$T' = (x_1 x_2 x_4)$$

est égal au produit

$$(x_1 x_4)(x_2 x_3)$$

de deux transpositions, et inversement le produit de deux transpositions est égal à un produit de substitutions circulaires de trois lettres. Il en résulte que le groupe Γ contient nécessairement le groupe alterné; si donc il ne coïncide pas avec le groupe alterné, il sera nécessairement le groupe symétrique.

Nous allons maintenant montrer que *le groupe alterné de n éléments est simple* ($n > 4$) et que, par conséquent, la suite de composition du groupe symétrique G est

$$G, \quad G_1, \quad 1,$$

G_1 désignant le groupe alterné. J'indiquerai de ce théorème la démonstration suivante, qui m'a été communiquée par M. Simart. Supposons que le groupe alterné possède un sous-groupe invariant Γ. On peut mettre le Tableau des substitutions du groupe symétrique G sous la forme

$$\begin{array}{ccccc} S_1, & S_2, & \ldots, & S_\mu, & \ldots, & S_{\frac{N}{2}}, \\ TS_1, & TS_2, & \ldots, & TS_\mu, & \ldots, & TS_{\frac{N}{2}}. \end{array}$$

La première ligne représente le groupe alterné G_1 et T désigne une substitution arbitraire de G n'appartenant pas à G_1, par exemple la transposition $(x_1 \, x_2)$.

Soient $S_1, S_2, \ldots, S_\mu$ l'ensemble des substitutions formant dans G_1 le groupe invariant Γ. Le groupe transformé de Γ par T, soit Γ', appartient à G_1 et est un groupe invariant de G_1. En effet, en désignant par Σ une substitution quelconque de G_1, on remarque d'abord que $\Sigma T = T \Sigma'$, puisque ΣT est une substitution de G n'appartenant

pas à G_1, et l'on en déduit

$$\Sigma T S_\beta T^{-1} \Sigma^{-1} = (\Sigma T) S_\beta (\Sigma T)^{-1} = T \Sigma' S_\beta \Sigma'^{-1} T^{-1} = T S_\alpha T^{-1},$$

S_α, S_β désignant des substitutions du groupe Γ.

Supposons que ces deux groupes Γ et Γ' aient des substitutions communes : elles forment un nouveau groupe Γ'' invariant de G_1, dont la transformée par T est identique à Γ'', car la transformée de Γ' est Γ, comme on le voit immédiatement. On en conclut que Γ'' est un invariant du groupe symétrique. Mais il résulte du théorème précédent que, pour $n > 4$, le groupe G symétrique n'a pas d'autre invariant que le groupe alterné G_1. Donc les groupes Γ et Γ' n'ont, en dehors de la substitution *un*, aucune substitution commune. D'ailleurs, Γ et Γ' sont deux groupes invariants de G_1, permutables. Appliquant le lemme du paragraphe **26**, on pourra former avec ces deux groupes un groupe Δ d'ordre μ^2, invariant de G_1, dont le terme général sera

$$T S_\beta T^{-1} S_\alpha \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1.2\ldots\mu \\ \beta = 1.2\ldots\mu \end{pmatrix},$$

et ce groupe Δ sera aussi un invariant du groupe symétrique G : on a, en effet,

$$(\Sigma T) T S_\beta T^{-1} S_\alpha (\Sigma T)^{-1} = \Sigma S_\beta T^{-1} S_\alpha T S_\beta^{-1} S_\beta \Sigma^{-1} = \Sigma T S_\gamma T^{-1} S_\beta \Sigma^{-1}.$$

Par suite, le groupe Δ doit, dans le cas général, coïncider avec le groupe alterné G_1, ce qui entraînerait l'égalité $\mu^2 = \frac{1.2\ldots n}{2}$, qui est impossible, comme on le voit facilement en s'appuyant sur ce théorème : *entre a et $2a-2$ il y a au moins un nombre premier.*

La proposition est donc établie.

La conclusion précédente ne s'applique pas à $n=4$; le groupe symétrique G contient alors d'autres groupes invariants que le groupe alterné G_1; il nous suffira d'en indiquer un. Nous avons considéré (§ 7) le groupe Γ, d'ordre *huit*, laissant invariable la fonction

$$\varphi_1 = x_1 x_2 + x_3 x_4,$$

et ce groupe Γ nous a conduit aux trois fonctions φ_1, φ_2, φ_3 en posant

$$\varphi_2 = x_1 x_3 + x_2 x_4,$$
$$\varphi_3 = x_1 x_4 + x_2 x_3.$$

D'après ce que nous avons vu (§ 22), le groupe H, laissant invariables φ_1, φ_2, φ_3, sera un groupe invariant dans G. Or, ce groupe H contient d'autres substitutions que la substitution *un;* il est formé des quatre substitutions

$$S_1 = 1, \quad S_2 = (x_1x_2)(x_3x_4), \quad S_3 = (x_1x_3)(x_2x_4), \quad S_4 = (x_1x_4)(x_2x_3),$$

qui laissent toutes quatre invariables les fonctions φ. Le groupe H est aussi un sous-groupe invariant du groupe alterné G_1, et si, enfin, nous considérons le groupe H' formé par les deux substitutions

$$\Sigma_1 = 1, \quad \Sigma_2 = (x_1x_2)(x_3x_4),$$

ce groupe est un sous-groupe de H, et il en est manifestement un sous-groupe invariant; car la transformée de Σ_2 par une substitution de H, par exemple S_3, est égal à Σ_2.

Il résulte de là que, si nous considérons la suite des groupes

$$G, \quad G_1, \quad H, \quad H', \quad 1,$$

chaque groupe est un sous-groupe invariant du précédent, et les ordres de ces groupes sont respectivement

$$24, \quad 12, \quad 4, \quad 2, \quad 1.$$

Cette suite joue un rôle important dans la résolution de l'équation du quatrième degré, comme nous le verrons au paragraphe **40**.

VI. — Réduction du groupe d'une équation algébrique.

30. Les propriétés du groupe d'une équation sont extrêmement importantes pour l'étude de cette équation. Nous partons toujours d'un domaine donné de rationalité; nous considérons une équation dont les coefficients appartiennent à ce domaine, et nous commençons par quelques théorèmes et remarques préliminaires. Démontrons d'abord que *toute équation irréductible a son groupe transitif et réciproquement.*

Je suppose, en effet, que le groupe G de l'équation

$$f(x) = 0$$

de degré n ne soit pas transitif; il existera alors au moins un groupe

de racines $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$ en nombre inférieur à n, tel que toutes les substitutions de G les laissent invariables ou les permutent entre elles, mais non avec les autres. Les substitutions de G n'altèrent donc pas les fonctions symétriques de $x_1, \ldots, x_\alpha$; donc ces fonctions sont rationnelles et $f(x)$ admet le diviseur de degré $\alpha < n$

$$(x - x_1)\ldots(x - x_\alpha),$$

dont les coefficients appartiennent au domaine de rationalité, et l'équation est réductible.

Réciproquement, supposons G transitif : je dis que l'équation est irréductible. En effet, si elle ne l'était pas, nous aurions pour $f(x)$ un diviseur rationnel

$$\varphi(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_\alpha) \qquad (\alpha < n).$$

Or soit $x_{\alpha+1}$ une racine de $f(x)$ autre que $x_1, \ldots, x_\alpha$; G contient une substitution S qui remplace x_1 par $x_{\alpha+1}$. Cette substitution transformera donc $\varphi(x)$ en un autre produit différent de celui-là, puisqu'il contient le facteur $x - x_{\alpha+1}$. Donnons à x une valeur arbitraire du domaine de rationalité : dans ces conditions, $\varphi(x)$ devrait être rationnellement exprimable, mais cela sera impossible parce qu'alors il devrait rester invariable par les substitutions de G, ce qui n'a pas lieu, puisque, après la substitution S, $\varphi(x)$ se transforme en un autre produit, et les deux produits ne peuvent être égaux pour toute valeur de x du domaine de rationalité, car cela entraînerait leur égalité manifestement impossible pour toute valeur de x.

31. Nous avons rencontré plus haut des équations irréductibles dont les racines sont fonctions rationnelles d'une d'entre elles. Considérons d'une manière générale une équation de cette nature et montrons que *l'ordre de son groupe est égal à son degré*.

Soient, en effet, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de l'équation irréductible

$$f(x) = 0$$

et la fonction V considérée dans la théorie de Galois

$$V = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n.$$

Puisque $x_2, \ldots, x_n$ sont des fonctions rationnelles de x_1, on pourra exprimer V en fonction rationnelle de x_1; soit

$$V = R(x_1).$$

L'ordre du groupe de l'équation f est le degré de l'équation irréductible dont V est racine; il ne peut donc être supérieur à n, car $R(x_1)$ ne peut avoir plus de n valeurs. Mais, puisque ce groupe est transitif, il faut qu'il contienne au moins n substitutions pour que x_1 puisse être remplacé par lui-même et chacune des autres lettres $x_2, \ldots, x_n$. *L'ordre du groupe est donc égal à n.*

La réciproque de ce théorème est donc exacte, c'est-à-dire que, *si le groupe d'une équation est transitif et si son ordre est égal à son degré, toutes les racines de l'équation sont fonctions rationnelles d'une quelconque d'entre elles.* En effet, d'abord l'équation est irréductible, puisque son groupe est transitif. Ensuite, considérons une des racines x_1 et adjoignons-la au domaine primitif de rationalité. Le groupe de l'équation se réduira, après cette adjonction, aux substitutions laissant x_1 invariable; mais, puisque le nombre des substitutions est égal à n, il n'y a d'autre substitution que la substitution unité laissant x_1 invariable, car, s'il y en avait ρ, l'ordre du groupe serait égal au moins à ρn. Donc le groupe se réduit à la substitution unité. L'équation irréductible $\psi(V) = 0$ de Galois est donc du premier degré et, par suite, l'équation est résolue. Donc $x_2, \ldots, x_n$ sont fonctions rationnelles de x_1.

Le cas où le nombre n est premier est particulièrement simple. Prenons une des substitutions du groupe qui ne soit pas la substitution unité; ses diverses puissances forment un sous-groupe du groupe considéré, dont l'ordre doit être un diviseur de n. Ce sous-groupe est par suite d'ordre n; il forme donc le groupe total qui est alors formé des puissances d'une même substitution. Celle-ci doit se réduire à une substitution circulaire, car, si elle se composait de plusieurs cycles, l'ensemble de ces puissances formerait un groupe dont l'ordre serait le plus petit multiple commun des nombres de lettres des différents cycles et, par suite, n ne serait pas premier. Il est aisé de montrer que *l'équation peut être résolue par radicaux.* Soit, en effet, α une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité; on voit immédiatement qu'en adjoignant α au domaine de rationalité l'expression

$$(x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \alpha^{n-1} x_n)^n$$

est rationnellement exprimable, car elle reste invariable quand on effectue sur $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une permutation circulaire. Il en résulte

que les n expressions

$$x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \alpha^{n-1} x_n,$$

où l'on donne à α les n valeurs racines de l'équation $x^n = 1$, peuvent s'exprimer par des racines $n^{\text{ièmes}}$ de quantités connues, et l'équation est par suite soluble par radicaux. En dehors des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, il suffit d'introduire dans cette résolution un seul radical; je dis, en effet, que si β et α désignent deux racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité distinctes de l'unité, on pourra exprimer

$$V_\beta = x_1 + \beta x_2 + \ldots + \beta^{n-1} x_h$$

rationnellement au moyen de

$$V_\alpha = x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \alpha^{n-1} x_n.$$

On sait, en effet, que β peut se mettre sous la forme α^q, q étant un entier ; considérons alors le produit

$$(x_1 + \alpha^q x_2 + \ldots + \alpha^{q(n-1)} x_n) \times (x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \alpha^{n-1} x_n)^{-q}.$$

Il ne change pas quand on fait la permutation circulaire $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, comme on le reconnaît de suite. Ce produit s'exprime donc rationnellement et, par suite, V_β s'exprime rationnellement à l'aide de V_α; nous n'avons donc qu'un seul radical $n^{\text{ième}}$ dans l'expression des racines, indépendamment des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

32. Nous avons montré, au paragraphe **18**, que l'on pouvait prendre une fonction rationnelle des racines d'une équation sous une forme ou sous une autre, du moment que les substitutions à effectuer appartiennent au groupe de l'équation; c'est une remarque qui nous permet, sous la condition indiquée, de raisonner sur les fonctions rationnelles des racines comme si ces racines étaient des variables indépendantes ; soit une fonction rationnelle

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

des racines de l'équation $f(x) = 0$, et supposons que, pour l'ensemble des substitutions du groupe G de cette équation, la fonction φ prenne ρ valeurs numériques [1] distinctes que nous désignerons

---

[1] Il ne s'agira plus, par la suite, que des valeurs *numériques* des fonctions des racines, et, quand nous parlerons d'une fonction transformée en une autre par une substitution, il sera toujours question de la valeur numérique de la fonction.

par

$$\varphi_1, \ \varphi_2, \ \ldots, \ \varphi_\rho.$$

Si ρ est moindre que l'ordre ν du groupe G, il y aura un certain nombre r de substitutions transformant φ_1 en lui-même. En raisonnant alors comme nous l'avons fait au paragraphe **20**, on mettra l'ensemble des substitutions de G sous la forme

$$\begin{array}{cccc} S_1, & S_2, & \ldots, & S_r, \\ T_1\ S_1, & T_1\ S_2, & \ldots, & T_1\ S_r, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ T_{\rho-1} S_1, & T_{\rho-1} S_2, & \ldots, & T_{\rho-1} S_r. \end{array}$$

Les substitutions de la première ligne forment un groupe qui transforme φ_1 en elle-même. Le groupe de substitutions

$$T_1 S_\lambda T_1^{-1} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, r)$$

transformera φ_2 en elle-même ; tous les raisonnements sont les mêmes qu'aux paragraphes **20**, **21**, **22**, **23**, et les mêmes considérations trouvent leur place, *quoiqu'il s'agisse ici de valeurs numériques des fonctions, tandis qu'on considérait plus haut des fonctions variables indépendantes.*

Nous avons déjà dit que $\varphi_1, \ \varphi_2, \ \ldots, \ \varphi_\alpha$ satisfont à une équation d'ordre ρ à coefficients rationnellement exprimables. *Cette équation est irréductible,* car autrement on aurait un facteur

$$(y - \varphi_1)(y - \varphi_2)\ldots(y - \varphi_k) \qquad (k < \rho),$$

qui serait rationnel, en prenant pour y une quantité quelconque du domaine de rationalité. Ce facteur devrait rester invariable pour toute substitution du groupe, ce qui est impossible puisque, par une substitution du groupe, on peut changer φ_1 par exemple en $\varphi_{k'}$, k' étant supérieur à k. Nous désignerons par

$$S(\varphi) = 0$$

l'équation ayant pour racines $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$. On peut dire que *son degré est égal au quotient de l'ordre du groupe* G *par l'ordre du groupe laissant* φ_1 *invariable.*

33. Ces remarques faites, arrivons au problème de la *réduction du groupe d'une équation.*

Quand on a formé la résolvante de Galois

$$\Psi(V) = 0$$

et, pour un domaine donné de rationalité, pris un facteur irréductible

$$\psi(V) = 0,$$

la série des opérations effectuables est terminée. Les opérations ne pourront être poussées plus loin que si *l'adjonction* de certaines grandeurs non rationnellement exprimables dans le domaine primitif rend réductible le polynome $\psi(V)$.

Supposons d'abord que l'on adjoigne une fonction rationnelle

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

des racines. On remarque tout d'abord que les substitutions de G, n'altérant pas la valeur numérique de φ_1, forment évidemment un groupe Γ, et l'on va montrer que *l'adjonction de la valeur de* φ_1 *réduira le groupe de l'équation précédente à* Γ.

En effet, après l'adjonction de φ_1, le groupe de l'équation ne peut contenir que des substitutions du groupe initial n'altérant pas φ_1; donc ce groupe ne peut être que Γ ou un groupe contenu dans Γ. Mais il est facile de voir que toutes les substitutions de Γ feront partie du groupe cherché; car toute fonction des racines exprimable rationnellement après l'adjonction de φ_1 sera de la forme

$$P(\varphi_1),$$

P étant rationnelle.

Elle restera donc invariable pour toutes les substitutions qui laissent φ_1 invariable. Inversement, toutes les fonctions des x invariables par les substitutions de Γ s'expriment rationnellement à l'aide de φ_1, d'après le théorème de Lagrange étendu aux valeurs numériques (§ 18). Le théorème est donc établi.

Plus généralement, *si l'on adjoint plusieurs fonctions des racines, le groupe de l'équation sera réduit au groupe des substitutions contenues dans* G *et n'altérant pas les différentes fonctions*.

34. Supposons maintenant que l'on adjoigne au domaine primitif de rationalité les racines de l'équation considérée ci-dessus

$$S(\varphi) = 0,$$

ou, ce qui revient au même, les valeurs des ρ fonctions rationnelles $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$. Le groupe de l'équation se réduira au groupe des substitutions contenues dans G et n'altérant pas ces différentes fonctions.

Ceci posé, les sous-groupes correspondant aux différentes fonctions φ, considérés au paragraphe 32, peuvent n'avoir d'autre substitution commune que la substitution unité. Le groupe H, considéré à la fin du paragraphe 22 et qui représente le plus grand sous-groupe laissant invariables $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$, se réduit alors à la substitution unité, et par suite l'adjonction des racines de l'équation S réduit alors à l'unité le groupe de l'équation. Celle-ci se trouve par conséquent résolue, et l'on est assuré de pouvoir exprimer les racines de l'équation $f(x) = 0$ rationnellement au moyen des racines de l'équation S. On n'aura d'ailleurs aucune difficulté à reconnaître si l'on se trouve dans le cas qui nous occupe, car on pourra, comme on sait, chercher d'une manière régulière le groupe de l'équation en adjoignant $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$, et l'on pourra constater si ce groupe se réduit à la substitution unité, c'est-à-dire si la résolvante de Galois admet un facteur rationnel en V du premier degré. Le cas que nous venons d'étudier n'amène en définitive aucune simplification dans la résolution de l'équation; la résolution des équations $f(x)$ et $S(\varphi)$ sont alors deux problèmes absolument identiques. On remarquera que ce cas se présentera toujours quand le groupe G est simple.

Il en est tout autrement si le groupe H ne se réduit pas à la substitution unité. Après l'adjonction de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ le groupe de l'équation ne se trouve pas réduit à la substitution unité, puisqu'il se réduit à H. Soient m l'ordre de G et m_1 l'ordre de H. Cherchons l'ordre du groupe de l'équation

$$S(\varphi) = 0.$$

On trouvera le groupe de S en posant

$$W = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + \ldots + u_\rho\varphi_\rho,$$

les u étant des constantes arbitraires appartenant au domaine de rationalité; le degré d'un facteur irréductible de l'équation donnant W sera l'ordre du groupe de S. Mais, d'autre part, W peut être regardé comme une fonction rationnelle des racines de l'équation $f(x) = 0$, laquelle fonction, non altérée par les substitutions de H, l'est évidem-

ment par toute autre substitution de G. Elle dépend donc, d'après le paragraphe 32, d'une équation dont le degré est égal au rapport des ordres de G et de H. Nous pouvons donc dire que *l'équation* S *a un groupe d'ordre* $\frac{m}{m_1}$; nous savons d'ailleurs (§ 22) que H *est un sous-groupe invariant de* G.

Ainsi, par l'adjonction des racines de l'équation auxiliaire S, dont le groupe est d'ordre $\frac{m}{m_1}$, nous abaissons l'ordre du groupe de l'équation donnée f à m_1; *le problème de la résolution de l'équation f est donc ramené à deux problèmes d'un caractère plus simple, puisque les ordres des groupes des équations qu'on a maintenant à considérer sont moindres que m.*

35. Nous avons déjà considéré, au paragraphe 23, le groupe de l'équation S; les notations étaient seulement un peu différentes. Ce groupe, relatif aux φ, y était désigné par la lettre g; nous avons vu en particulier que, si H est un sous-groupe invariant maximum, le groupe g est simple. Par suite, le groupe relatif à l'équation S sera, dans ce cas, un groupe simple.

Ceci nous suggère une marche à suivre, pour réduire à des problèmes plus simples la question de la résolution d'une équation $f(x) = 0$. Désignons toujours par G le groupe de cette équation pour un domaine donné de rationalité; nous avons dit, au paragraphe précédent, que la considération d'une équation résolvante comme S ne simplifie rien quand G est un groupe simple, car les résolutions des équations f et S constituent deux problèmes identiques. Mais supposons que le groupe G soit composé, et désignons par G_1 un sous-groupe invariant maximum de G; on peut former une fonction rationnelle φ des racines de f restant invariable par les substitutions de G et par ces substitutions seulement. Cette fonction dépendra d'une équation dont le degré sera le quotient $\frac{m}{m_1}$, en désignant par m l'ordre de G et par m_1 l'ordre de G_1; soit

$$\Sigma_1(\varphi) = 0$$

cette équation. Son ordre sera égal à son degré, d'après la règle du paragraphe précédent, et son groupe sera simple. L'adjonction des racines de cette équation réduit à G_1 le groupe de l'équation f.

Nous pouvons continuer de la même manière en partant de G_1, si ce groupe n'est pas simple. Reprenons donc la suite des groupes

$$G, \quad G_1, \quad G_2, \quad \ldots, \quad G_p, \quad 1,$$

considérée au paragraphe 25, et soient

$$m, \quad m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_p, \quad 1$$

les ordres respectifs de ces groupes; nous sommes alors conduit au théorème suivant :

La résolution de l'équation proposée dépendra de la résolution d'équations successives

$$\Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \ldots, \quad \Sigma_{p+1}.$$

Chacune de ces équations est irréductible dans le domaine primitif auquel on adjoint les racines des équations précédentes et son groupe est simple; l'ordre de ce groupe est égal à son degré, et ces degrés sont respectivement

$$\frac{m}{m_1}, \quad \frac{m_1}{m_2}, \quad \ldots, \quad m_p.$$

Le groupe de l'équation primitive f, après adjonction des racines des équations Σ, se réduit successivement à

$$G_1, \quad G_2, \quad \ldots, \quad G_p, \quad 1.$$

On voit l'importance que prend alors le théorème de M. Jordan, démontré dans la Section V. Les degrés des équations que nous venons de signaler sont indépendants de la façon dont on formera *la suite de composition*. Le théorème de M. Hölder (§ 28) nous montre de plus que non seulement les ordres des groupes auxiliaires, mais ces groupes eux-mêmes, restent les mêmes, à l'ordre près,

36. Nous avons supposé jusqu'à présent qu'on adjoignait une fonction rationnelle des racines de l'équation. Galois suppose d'abord dans son Mémoire que l'on adjoigne une racine r d'une équation auxiliaire irréductible $F(r) = 0$. Il est aisé de montrer que le point de vue auquel nous nous sommes placé est, au fond, identique à celui de Galois.

Cherchons d'abord la nature des modifications que pourra amener l'adjonction de r. Le facteur irréductible $\psi(V)$ peut alors devenir réductible; s'il en est ainsi, on aura un facteur

$$\chi(V, r).$$

Il n'y a pas, dans cette réduction, à distinguer une racine d'une autre pour l'équation donnant r, et l'on aura ainsi dans $\psi(V)$ un nombre de facteurs égal à p, si p désigne le degré de l'équation en r.

D'après cela, si l'on représente par $r_1, r_2, \ldots, r_p$ les racines de l'équation $F(r) = 0$, le polynome $\psi(V)$ sera divisible par chacune des fonctions

$$(\sigma) \qquad \chi(V, r_1), \quad \chi(V, r_2), \quad \ldots, \quad \chi(V, r_p).$$

Le produit de ces fonctions est une fonction entière de V dont les coefficients appartiennent au domaine primitif de rationalité; désignons-le par $\Pi(V)$. Les racines de l'équation

$$\Pi(V) = 0$$

appartiennent toutes à ψ, et elles lui appartiennent nécessairement avec le même degré de multiplicité puisque $\psi(V)$ est irréductible. On aura donc nécessairement

$$\Pi(V) = [\psi(V)]^q,$$

en supposant, comme il est évidemment permis, que, dans χ et ψ, le premier coefficient est égal à l'unité.

Les racines de l'équation ψ sont toutes exprimables en fonctions rationnelles d'une d'entre elles. Soient V_α une racine de l'équation

$$\chi(V, r_1) = 0$$

et $\theta(V_\alpha)$ une seconde racine de la même équation, θ étant rationnelle. Je dis que, si V_β est une racine de

$$\chi(V, r_2) = 0,$$

il en sera de même de $\theta(V_\beta)$. En effet, l'équation

$$\chi[\theta(V), r_1] = 0$$

est satisfaite par la racine V_α de l'équation $\chi(V, r_1) = 0$; elle admettra donc toutes les racines de cette dernière. Ainsi donc

$$\chi[\theta(V), r_1],$$

mise sous forme entière, est divisible par $\chi(V, r_1)$; la division se faisant exactement, le dernier reste, qui est un polynome en V dont les coefficients sont fonctions rationnelles de r_1, sera nul identiquement. Ces coefficients, étant nuls pour r_1, devront s'annuler aussi pour r_2 et les autres racines de $F(r)$, qui est irréductible; ce qui établit la remarque énoncée.

Il en résulte que, si deux polynomes de la suite (σ) ont une racine commune, ils ont toutes leurs racines communes; par suite, d'après l'identité

$$\Pi(V) = [\psi(V)]^q,$$

il y aura seulement $\frac{p}{q}$ facteurs distincts dans la suite (σ). A l'adjonction de chacune des racines de l'équation F correspondra pour l'équation un groupe provenant du facteur de la suite (σ) se rapportant à cette racine. Le nombre de ces groupes ne sera pas égal à p, mais seulement à $\frac{p}{q}$, et leur ordre sera égal au quotient par $\frac{p}{q}$ de l'ordre du groupe initial. Puisque toutes les racines de l'équation ψ sont fonctions rationnelles d'une d'entre elles, ces groupes sont manifestement les transformés de l'un d'eux par une substitution rationnelle. Si le degré p est un nombre premier et que l'ordre du groupe soit abaissé, on remarquera que q est nécessairement égal à un; les polynomes de la suite (σ) seront alors distincts, et l'ordre du groupe de l'équation sera divisé par p, quand on adjoint une racine.

Dans le cas où l'on adjoindra toutes les racines de l'équation en r, le groupe de l'équation proposée se réduit aux substitutions communes aux $\frac{p}{q}$ groupes dont nous venons de parler.

Supposons que l'adjonction d'une racine r_1 d'une équation irréductible $F(r) = 0$ réduise le groupe d'une équation $f(x) = 0$ de G à G'_1; je dis qu'on peut opérer une réduction identique en se donnant la valeur d'une fonction rationnelle convenable des racines. On peut, en effet, former une fonction rationnelle des racines dont la valeur numérique reste invariable pour les substitutions de G'_1 et pour celles-là seulement. Cette fonction rationnelle $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sera racine d'une équation irréductible d'un certain degré ρ, soit

$$S(\varphi) = 0,$$

qui aura pour racines $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$. L'adjonction de la racine φ_1 de

l'équation S produit sur le groupe G le même effet que celle de la racine r_1 ; elle ramène le groupe de G à G'_1.

On peut aller plus loin et montrer que *l'adjonction des différentes racines de* $F(r) = 0$ *peut être remplacée par l'adjonction des différentes racines de* $S(\varphi) = 0$. Tout d'abord φ_1, restant invariable par les substitutions de G'_1, s'exprimera rationnellement à l'aide de r_1 ; écrivons donc

$$\varphi_1 = \theta(r_1).$$

L'équation

$$S[\theta(r)] = 0,$$

admettant la racine r_1, admettra les racines

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_p$$

de l'équation irréductible F. Les quantités

$$\theta(r_1), \quad \theta(r_2), \quad \ldots, \quad \theta(r_p)$$

sont donc contenues dans la suite

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_\rho.$$

Or l'équation ayant pour racines $\varphi = \theta(r_i)$ est à coefficients rationnellement exprimables dans le domaine initial de rationalité; désignons-la par

$$P(\varphi) = 0.$$

Toutes ses racines appartiennent à l'équation irréductible

$$S(\varphi) = 0.$$

Il faut donc qu'elle les ait toutes et avec le même degré de multiplicité, et, par suite,

$$P(\varphi) = [S(\varphi)]^\mu.$$

Le nombre p sera donc un multiple de ρ; μ des valeurs $\theta(r_i)$ sont égales à φ_1, μ autres à φ_2, et ainsi de suite.

Ceci posé, soit $\theta(r_\alpha) = \varphi_\alpha$, et désignons par G'_α et G''_α les groupes auxquels se réduit le groupe de l'équation, lorsqu'on adjoint respectivement r_α et φ_α. Si G'_1 désigne, comme plus haut, le groupe correspondant à l'adjonction de r_1, nous avons dit que G'_1 et G'_α sont de même ordre. Il en est de même de G''_α et de G''_1. Comme φ_α est rationnellement exprimable après l'adjonction de r_α, le groupe G''_α

contient toutes les substitutions de G'_α et, par suite, ces groupes sont identiques.

Le théorème est donc démontré. Le nombre μ est égal à l'entier q rencontré dans la première partie de ce paragraphe.

37. D'après ce qui précède, l'adjonction des racines de l'équation $F(r) = 0$ ramène le groupe de l'équation au groupe commun aux groupes

$$G'_1, \quad G'_2, \quad \ldots, \quad G'_\rho,$$

qui correspondent respectivement aux fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$. Le degré p de l'équation F, qui est égal à $\mu\rho$, est un multiple de ρ, et les racines de cette équation se partagent en ρ groupes de μ racines, comme il a été indiqué plus haut.

Arrêtons-nous sur un cas particulier très important pour la suite. Je suppose l'équation F telle qu'une quelconque de ses racines s'exprime rationnellement à l'aide d'une d'entre elles. Quand on adjoindra cette racine, il se trouvera alors qu'on adjoindra toutes les autres; il en résulte que les groupes $G'_1, G'_2, \ldots, G'_\rho$, correspondant à l'adjonction des diverses racines, coïncident. Le groupe G de l'équation, après adjonction des racines de F, se trouve donc ramené au groupe G'_1; le groupe G d'ordre m a donc été abaissé à un groupe d'ordre $\frac{m}{\rho}$. Il est clair que G'_1 est un sous-groupe invariant de G.

Particularisons davantage encore en supposant de plus que p soit un nombre premier et que l'ordre du groupe soit abaissé. Puisque $p = \mu\rho$, il faudra nécessairement que $\mu = 1$ et, par suite, *l'ordre du groupe de l'équation sera abaissé de m à $\frac{m}{p}$.*

VII. — Des équations résolubles algébriquement.

38. Les généralités qui précèdent sur la réduction du groupe d'une équation sont, à la forme près, entièrement dues à Galois, en faisant seulement exception pour l'importante remarque qui découle des théorèmes de M. Jordan et de M. Hölder. La plus belle application qu'ait faite Galois de sa théorie est relative aux équations résolubles algébriquement. On dit qu'une équation est résoluble algébriquement

ou par radicaux, quand on peut y satisfaire en substituant à x une expression formée au moyen des éléments appartenant au domaine de rationalité et des signes des opérations suivantes de l'Algèbre : addition, soustraction, multiplication, division, élévation à une puissance entière, extraction de racines d'indice entier, ces opérations étant en nombre limité.

Suivons toujours Galois. Pour résoudre une équation, il faut successivement abaisser son groupe, jusqu'à le réduire à la seule substitution unité. Dans le cas d'une équation résoluble algébriquement, la réduction se fera par l'adjonction successive des racines d'équations binomes que l'on peut supposer de degré premier. Envisageons une telle équation

$$f(x) = 0$$

avec un certain domaine de rationalité, et soit alors G son groupe. Soit p le plus petit nombre premier tel que l'adjonction des racines de l'équation

$$r^p = A$$

réduise le groupe de l'équation ; A est supposé appartenir au domaine initial, auquel on a pu adjoindre des racines d'équations de la forme

$$r^{q_1} = B_1, \quad r^{q_2} = B_2, \quad \ldots, \quad r^{q_i} = B_i, \quad \ldots, \quad r^{q_\lambda} = B_\lambda,$$

les q étant inférieurs à p, et B_i appartenant au domaine initial, auquel on a pu adjoindre les racines des équations correspondant aux indices $1, 2, \ldots, i-1$ précédents.

On peut, par conséquent, supposer que, parmi les quantités précédemment adjointes, se trouve une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité, car cette expression s'obtient par des extractions de racines de degré inférieur à p, et son adjonction n'altérera pas le groupe de l'équation [1], d'après l'hypothèse faite sur p.

L'équation $r^p = A$ va jouer le rôle de l'équation F du paragraphe précédent, et nous nous trouvons dans le cas particulier où les racines de F s'expriment rationnellement à l'aide de l'une d'elles. Donc l'adjonction des racines de notre équation binome réduit le

---

[1] Nous nous appuyons ici sur cette proposition de Gauss : *La résolution de l'equation binome $x^p - 1 = 0$ (p premier) peut être effectuée à l'aide de radicaux dont l'indice est un diviseur de $p-1$.*

groupe G d'ordre m à un groupe G_1 d'ordre $\frac{m}{p}$, et ce groupe G_1 est un sous-groupe invariant de G.

Cet ordre ayant été abaissé une première fois par l'adjonction des racines d'une équation binome, on peut raisonner sur le nouveau groupe comme sur le précédent ; une nouvelle réduction sera opérée par l'adjonction des racines d'une nouvelle équation binome, et finalement *on aura une succession de groupes*

$$G, \quad G_1, \quad \ldots, \quad 1,$$

chaque groupe étant un sous-groupe invariant du groupe précédent, et le quotient des ordres de chaque groupe et du groupe suivant étant un nombre premier.

Ce premier résultat suffit déjà à nous faire voir que l'équation générale de degré $n (n > 4)$ n'est pas résoluble par radicaux. En effet, le groupe G est ici le groupe symétrique qui ne renferme qu'un seul sous-groupe invariant, le groupe alterné G_1 (*voir* § 29). La suite précédente ne pourra donc être que

$$G, \quad G_1, \quad 1.$$

Or G est d'ordre $1.2\ldots n$ et G_1 d'ordre $\frac{1.2\ldots n}{2}$; le quotient des ordres des deux premiers groupes est égal à *deux*, qui est bien un nombre premier, mais le quotient des ordres des deux autres est $\frac{1.2\ldots n}{2}$, qui n'est pas premier. Nous en concluons que *l'équation générale d'ordre $n (n > 4)$ n'est pas résoluble algébriquement ;* c'est le théorème démontré, en 1828, par Abel, qui se plaçait, bien entendu, à un tout autre point de vue que Galois [1].

39. Nous avons vu que, si une équation est résoluble algébriquement, on aura une succession de groupes

$$G, \quad G_1, \quad \ldots, \quad G_s, \quad 1,$$

chaque groupe étant un sous-groupe invariant du précédent, et le

---

[1] On sait aujourd'hui que ce théorème avait été établi, en 1799, par le géomètre italien Ruffini (1765-1822). Quelques-uns des résultats fondamentaux sur la théorie des substitutions, attribués à Cauchy et à Galois, étaient connus de Ruffini, dont on va prochainement publier les Œuvres en Italie.

quotient des ordres de chaque groupe et du groupe suivant étant un nombre premier. *Cette condition, nécessaire pour la résolubilité algébrique de l'équation, est aussi suffisante,* comme nous allons l'établir.

Il suffira de montrer qu'on peut réduire le groupe de l'équation de G à G_1 par l'adjonction des racines d'une équation résoluble par radicaux. Soient m l'ordre du groupe G et m_1 l'ordre de G_1, le quotient $\frac{m}{m_1}$ étant un nombre premier p. En désignant par φ_1 une fonction des racines correspondant au groupe G_1, nous formons l'équation désignée par

$$S(\varphi) = 0$$

dans un paragraphe précédent, et sur laquelle nous nous sommes longtemps arrêté. Cette équation est de degré $\frac{m}{m_1}$ ou p, et l'ordre de son groupe sera (§ 34) égal aussi à p, puisqu'ici le groupe H est égal à G_1, ce dernier étant un sous-groupe invariant de G. L'équation S est donc une équation irréductible de degré premier, et l'ordre de son groupe est égal à son degré; or nous avons vu, à la fin du paragraphe 31, qu'une équation satisfaisant à ces conditions est résoluble par radicaux. D'autre part, l'adjonction des racines de S ramène le groupe de l'équation proposée de G à G_1; par suite, cette réduction peut se faire par l'adjonction de radicaux, et, en continuant ainsi de proche en proche, on voit que le groupe de l'équation peut être réduit à l'unité et l'équation, par suite, sera résolue en adjoignant successivement des radicaux, ce qui démontre la proposition énoncée.

40. Nous pouvons vérifier, à l'aide du théorème précédent, que les équations du troisième et du quatrième degré sont résolubles par radicaux. Pour le cas du troisième degré, la suite

$$G, \quad G_1, \quad 1,$$

G étant le groupe symétrique et G_1 le groupe alterné, est telle que chaque groupe est un sous-groupe invariant du précédent, et, l'ordre de G étant *six* et celui de G_1 *trois,* les quotients des ordres des groupes sont des nombres premiers.

Pour le quatrième degré, prenons la suite

$$G, \quad G_1, \quad H, \quad H', \quad 1,$$

que nous avons considérée au paragraphe 29; les ordres de ces groupes étant respectivement

$$24, \quad 12, \quad 4, \quad 2, \quad 1,$$

les quotients de chaque nombre par le suivant sont des nombres premiers, et l'équation est bien résolue algébriquement.

41. Les applications du théorème général relatif à la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation soit résoluble algébriquement sont particulièrement simples dans le cas où *l'équation est de degré premier*.

Nous terminerons ce Chapitre par l'étude de ce cas, qui a été approfondi par Galois, et nous renverrons, pour les équations de degré composé, aux Mémoires de M. Jordan et de Kronecker.

Commençons par un lemme préliminaire. Soit

$$f(x) = 0$$

une équation irréductible de degré premier n. Je suppose qu'elle devienne réductible par l'adjonction des racines d'une équation irréductible de degré premier p

$$F(r) = 0,$$

telle que ses racines s'expriment rationnellement à l'aide de l'une d'entre elles. En raisonnant sur l'équation $f(x)$, comme nous avons raisonné au paragraphe 36 sur l'équation $\psi(V)$, on montrera que les p racines de l'équation F se partagent en $\frac{p}{q}$ groupes de q racines correspondant à une même valeur d'une certaine fonction rationnelle $\theta(r)$ des racines. Puisque p est premier, on devra avoir $q = 1$, et par suite, en désignant par

$$\chi(x, r)$$

le facteur irréductible correspondant à l'adjonction de r, on aura

$$\chi(x, r_1)\,\chi(x, r_2)\ldots\chi(x, r_p) = f(x).$$

Les facteurs du premier membre sont distincts et du même degré. Donc, puisque le degré n de $f(x)$ est supposé premier, le polynome $\chi(x, r)$ est nécessairement du premier degré, et l'on a

$$p = n.$$

De plus, *l'équation se trouve résolue par l'adjonction des racines de* F. Ainsi, une équation irréductible de degré premier reste irréductible tant que les adjonctions ne réduisent pas son groupe à l'unité. Avant l'adjonction des racines de F, qui va résoudre l'équation, son groupe est d'un ordre ν qu'il est facile de trouver. D'après le paragraphe 37, cette adjonction réduit le groupe à l'ordre $\frac{\nu}{p}$ et, puisque ce groupe est l'unité, on a

$$\nu = p.$$

Nous pouvons donc dire qu'avant la dernière adjonction, l'équation $f(x)$ a son ordre égal à son degré, et par suite, puisque n est premier, son groupe est formé des puissances d'une substitution circulaire (§ 31).

Appliquons ceci à la réduction du groupe d'une équation $f(x) = 0$ de degré premier n, résoluble algébriquement. Après des adjonctions successives de radicaux, nous arriverons à l'avant-dernier groupe G_s (§ 39). Il résulte du lemme précédent que l'équation reste irréductible tant qu'elle n'est pas résolue, et nous pouvons appliquer la conclusion précédente : le groupe G_s est d'ordre n et est formé des puissances d'une substitution circulaire de n lettres. Or, le groupe initial G contient évidemment G_s comme sous-groupe. *Le groupe initial relatif aux n racines de notre équation contient donc une substitution circulaire d'ordre n.*

42. Nous allons rechercher les groupes relatifs à n lettres (*n étant toujours premier*) jouissant de la propriété précédente. Mais il nous faut auparavant dire un mot de la représentation analytique des substitutions.

Désignons par

$$x_0, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_{n-1}$$

n lettres. Si l'on a un polynome $f(z)$ à coefficients entiers, et si pour $z = 0, 1, \ldots, n-1$ ce polynome prend n valeurs non congrues suivant le module n, c'est-à-dire n valeurs telles que la différence de deux quelconques d'entre elles ne soit pas multiple de n, on pourra considérer la substitution

$$[f(z), z]$$

comme définissant une substitution de n lettres, en convenant que

$$x_z \qquad (z = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

est remplacé par

$$x_{f(z)},$$

l'indice $f(z)$ étant pris suivant le module n, c'est-à-dire étant remplacé par le reste que donne sa division par n. Toute substitution

$$\begin{pmatrix} x_a, & x_b, & \ldots, & x_k \\ x_0, & x_1, & \ldots, & x_{n-1} \end{pmatrix}$$

peut être obtenue de cette manière; il suffit de poser

$$f(z) = -a\left|\frac{z^n - z}{z}\right| - b\left|\frac{z^n - z}{z-1}\right| - \ldots - h\left|\frac{z^n - z}{z-\alpha}\right| - \ldots - k\left|\frac{z^n - z}{z-n+1}\right|,$$

en désignant, d'une manière générale, par

$$\left|\frac{z^n - z}{z-\alpha}\right|$$

le quotient de la division de $z^n - z$ par $z - \alpha$. On voit facilement que

$$f(\alpha) \equiv h \qquad (\text{mod. } n).$$

On a, en effet,

$$z^n - z = (z-\alpha)\psi(z) + \alpha^n - \alpha$$

et, par suite,

$$\left|\frac{z^n - z}{z-\alpha}\right| = \psi(z).$$

Soit $\beta \neq \alpha$; on aura

$$\beta^n - \beta = (\beta - \alpha)\psi(\beta) + \alpha^n - \alpha.$$

Or, d'après le théorème de Fermat, $\alpha^n - \alpha$ et $\beta^n - \beta$ sont multiples de n; donc $\psi(\beta)$ sera multiple de n. Par suite, dans $f(z)$, tous les termes, sauf celui qui renferme $z - \alpha$ en dénominateur, seront multiples de n pour $z = \alpha$. Il reste à trouver la valeur de

$$-h\left|\frac{z^n - z}{z-\alpha}\right|$$

pour $z = \alpha$. Or, on a

$$nz^{n-1} - 1 = \psi(z) + (z-\alpha)\psi'(z);$$

donc

$$\psi(\alpha) = n\alpha^{n-1} - 1$$

et la congruence $f(\alpha) \equiv h\,(\text{mod. } n)$ en résulte immédiatement.

On doit à M. Hermite d'importants théorèmes sur la représentation analytique des substitutions (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LVII, et *Œuvres*, t. II, p. 280). Nous y renverrons le lecteur, n'ayant ici besoin que de la notion précédente pour trouver, avec Galois, la forme de la fonction $f(z)$ correspondant à une substitution appartenant au groupe d'une équation résoluble.

43. Nous avons dit que toutes les substitutions du groupe G_s sont les puissances d'une substitution circulaire et, par conséquent, de la forme

$$(z+\beta,\ z);$$

soit donc Σ une telle substitution, β étant un des nombres $1, 2, \ldots, n-1$. Si maintenant T désigne l'une quelconque des substitutions du groupe G_{s-1} précédant immédiatement G_s, la substitution

$$T\Sigma T^{-1} = \Sigma'$$

appartient encore à G_s. A la substitution T correspond une certaine fonction $f(z)$, telle que nous pouvons écrire

$$T = [f(z),\ z],$$

et l'on a de même

$$\Sigma = (z+\beta,\ z), \qquad \Sigma' = (z+a,\ z).$$

Exprimons que

$$T\Sigma = \Sigma' T.$$

Or

$$T\Sigma = [f(z+\beta),\ z] \qquad \text{et} \qquad \Sigma' T = [f(z)+a,\ z].$$

On aura, par conséquent, la congruence suivant le module n

$$f(z+\beta) \equiv f(z) + a,$$

a ne dépendant pas de z; en changeant successivement z en $z+\beta$, $z+2\beta$, ..., $z+\lambda\beta$, on a

$$f(z+\lambda\beta) \equiv f(z) + \lambda a.$$

Si nous prenons $\beta = 1$ et que nous posions $z = 0$, $f(0) = b$, on aura

$$f(\lambda) \equiv b + \lambda a.$$

Ainsi la fonction $f(z)$ est une fonction linéaire $az + b$. Le groupe

G_{s-1} ne peut donc renfermer que des substitutions de la forme

$$(az + b, z),$$

et a sera différent de l'unité, si la substitution T n'appartient pas au groupe G_s. Le groupe G_{s-1} contient des substitutions d'ordre n, à savoir les substitutions de G_s; il est aisé de voir qu'il ne contient pas d'autres substitutions d'ordre n, ce qui revient à dire que la substitution ci-dessus est d'ordre inférieur à n quand a est différent de *un* ou n'est pas congru à *un* (mod. n). En effet, la puissance h de cette substitution est obtenue en remplaçant z par

$$a^h z + b(a^{h-1} + a^{h-2} + \ldots + 1).$$

On aura l'ordre de la substitution en prenant le plus petit entier h, tel que

$$a^h \equiv 1 \quad (\text{mod. } n),$$
$$b(a^{h-1} + \ldots + 1) \equiv 0 \quad (\text{mod. } n),$$

a étant différent de *un*; la seconde condition sera vérifiée quand la première le sera, et ceci arrivera pour $h = n - 1$ ou un de ses diviseurs.

Cherchons maintenant la nature des substitutions du groupe G_{s-2}. Il est clair que G_s est un sous-groupe de G_{s-2}; montrons qu'il en est un sous-groupe invariant. Si T' désigne une substitution de G_{s-2}, et Σ une substitution de G_s, et par suite de G_{s-1}, la transformée de Σ par T' appartiendra à G_{s-1}, puisque G_{s-1} est invariant dans G_{s-2}. Mais, Σ étant d'ordre n, sa transformée par T' est aussi d'ordre n et elle appartient par suite à G_s, ce qui montre bien que G_s est invariant dans G_{s-2}. Par suite, les substitutions de G_{s-2} sont de même forme que celles de G_{s-1}, et l'on continuera ainsi de suite jusqu'à G. Nous avons donc le théorème suivant, dû à Galois :

Quand une équation irréductible de degré premier est résoluble algébriquement, toutes les substitutions de son groupe sont de la forme

$$(az + b, z).$$

44. La réciproque du théorème précédent est exacte, c'est-à-dire que, *si le groupe d'une équation irréductible de degré premier ne renferme, en dehors des substitutions du système circulaire*

$(z, z+1)$, *que des substitutions de la forme*

$$(az+b, z),$$

l'équation est résoluble algébriquement.

Remarquons d'abord que toute substitution du groupe précédent sera le produit d'une puissance de la substitution

$$(\Sigma) \qquad (z+1, z)$$

par une puissance d'une substitution

$$(\Sigma') \qquad (rz, z).$$

Si r est une racine primitive pour le nombre premier n, c'est-à-dire si les puissances

$$r^0, \quad r, \quad r^2, \quad \ldots, \quad r^{n-2}$$

sont congrues dans un ordre quelconque à

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n-1,$$

le groupe formé à l'aide des substitutions (Σ) et (Σ') combinées entre elles de toutes les manières possibles sera formé des $n(n-1)$ substitutions

$$(az+b, z),$$

où l'on donne à a les valeurs $1, 2, \ldots, n-1$ et à b les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Si r n'est pas une racine primitive pour le nombre n, les puissances de r écrites ci-dessus ne représenteront pas les $n-1$ premiers nombres, mais seulement un nombre d de nombres congrus différents, suivant le module n, et le groupe sera seulement alors d'ordre nd.

Pour plus de simplicité, nous allons supposer que le groupe G de l'équation soit le groupe d'ordre $n(n-1)$, c'est-à-dire que r est racine primitive; mais un raisonnement analogue s'appliquera aux autres cas. Désignons par α une racine de l'équation

$$\frac{x^n-1}{x-1} = 0,$$

et formons les expressions

$$X_1 = (x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \ldots + \alpha^{n-1} x_{n-1})^n,$$
$$X_2 = (x_0 + \alpha x_r + \alpha^2 x_{2r} + \ldots + \alpha^{n-1} x_{(n-1)r})^n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$X_{n-1} = (x_0 + \alpha x_{r^{n-2}} + \alpha^2 x_{2r^{n-2}} + \ldots + \alpha^{n-1} x_{(n-1)r^{n-2}})^n.$$

Les quantités X se permutent évidemment circulairement quand on fait la substitution Σ'. On peut, d'autre part, les écrire sous une autre forme ; prenons par exemple $X_{\mu+1}$,

$$X_{\mu+1} = (x_0 + \alpha x_{r^\mu} + \alpha^2 x_{2r^\mu} + \ldots + \alpha^h x_{hr^\mu} + \ldots + \alpha^{n-1} x_{(n-1)r^\mu})^n.$$

Si l'on pose

$$hr^\mu \equiv k \pmod{n}, \qquad 0 < k \leqq n-1,$$

on aura

$$hr^\mu \equiv kr^{n-1}, \qquad \text{d'où} \qquad h \equiv kr^{n-1-\mu}.$$

Nous pourrons alors écrire

$$X_{\mu+1} = (x_0 + \ldots + \alpha^{kr^{n-1-\mu}} x_k + \ldots)^n.$$

Or, $\alpha^{r^{n-1-\mu}}$ représente une certaine racine β de l'équation $x^n = 1$, et, par suite, $X_{\mu+1}$ a la forme

$$X_{\mu+1} = (x_0 + \beta x_1 + \ldots + \beta^k x_k + \ldots)^n.$$

Après cette transformation, il est facile de voir que les fonctions X ne changent pas par la substitution Σ, c'est-à-dire quand on fait sur les x une substitution circulaire

$$(x_0\, x_1 \ldots x_{n-1}).$$

Ainsi les fonctions

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3, \quad \ldots, \quad X_{n-1}$$

sont invariables par la substitution de Σ, et elles sont déplacées circulairement par la substitution Σ'.

Les fonctions X sont les $n-1$ valeurs que prend une fonction rationnelle des racines pour les substitutions du groupe G ; elles satisfont donc à une équation d'ordre $n-1$ dont les coefficients sont rationnels dans le domaine primitif. Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité ne figurent pas dans ces coefficients, puisque toute fonction symétrique des X est symétrique par rapport aux $n-1$ racines de

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0.$$

Soit

$$F(X) = 0$$

cette équation ; son groupe est formé des $n-1$ puissances de la substitution circulaire effectuée sur les X. Une telle équation est réso-

luble par radicaux, car, si nous désignons par

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_{n-1}$$

les racines de F, l'expression

$$(X_1 + \lambda X_2 + \ldots + \lambda^{n-2} X_{n-1})^{n-1},$$

où λ désigne une racine $n - 1^{\text{ième}}$ de l'unité, restant invariable par les substitutions du groupe, s'exprime rationnellement à l'aide de λ qu'on doit supposer adjoint. En donnant à λ ses $n - 1$ valeurs, on aura donc les X pour radicaux, et enfin

$$x_0 + \alpha x_1 + \ldots + \alpha^{n-1} x_n$$

s'exprimera par suite aussi au moyen de radicaux. En donnant à α ses $n - 1$ valeurs et en prenant la somme des racines, *on aura n équations donnant $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ exprimés algébriquement;* c'est le théorème que nous voulions établir.

45. Dans les deux paragraphes précédents, nous avons trouvé la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation irréductible de degré premier soit résoluble par radicaux, à savoir que le groupe de l'équation ne doit contenir que des substitutions de la forme

$$(az + b, \; z).$$

Galois a encore donné une autre forme à cette condition; nous terminerons ce Chapitre en montrant que *la condition nécessaire et suffisante est que les racines soient toutes exprimables en fonction rationnelle de deux quelconques d'entre elles.*

D'abord la condition est nécessaire, car, si l'équation est résoluble par radicaux, toutes les substitutions de son groupe sont de la forme ci-dessus. Or une telle substitution, qui ne se réduit pas à l'unité, déplace les n indices si $a = 1$, et elle déplace $n - 1$ indices si a est différent de *un*. Il résulte de là que, si l'on adjoint *deux* racines x_α et x_β, le groupe de l'équation ne contiendra plus que la substitution unité, car, x_α et x_β devant rester invariables par les substitutions du groupe, celles-ci ne peuvent déplacer x_α et x_β. Donc toutes les racines sont fonctions rationnelles de x_α et x_β.

Passons à la réciproque ([1]). Nous supposons que toutes les racines d'une équation irréductible de degré premier s'expriment rationnellement à l'aide de deux quelconques d'entre elles; il faut montrer que l'équation est résoluble par radicaux. Soient G le groupe de l'équation et μ son ordre; quand on adjoint une racine x_α de l'équation elle-même, le groupe G se réduit à un groupe Γ_α dont l'ordre est $\frac{\mu}{n}$ (§ 36). A chaque racine x_α correspond un groupe Γ_α, et, d'après les théorèmes généraux étudiés précédemment, les substitutions du groupe G se décomposent en un Tableau de n lignes dont la première sera, si l'on veut, le groupe Γ_0, et les autres lignes seront les produits des substitutions de Γ_0 par des substitutions

$$T_1, \quad T_2, \quad \ldots, \quad T_{n-1}.$$

Les groupes Γ_α sont les transformés de Γ_0 par les substitutions précédentes; on doit remarquer que deux groupes Γ n'ont d'autre substitution commune que la substitution unité, car autrement il y aurait une substitution laissant deux racines invariables. Après avoir adjoint x_α et réduit le groupe à Γ_α, adjoignons maintenant x_β, c'est-à-dire une racine de

$$\frac{f(x)}{x - x_\alpha} = 0$$

ou d'un diviseur rationnel de ce quotient, s'il n'est pas irréductible. Le groupe Γ_α de l'équation deviendra un nouveau groupe dont l'ordre est égal au quotient de l'ordre de Γ_α par un diviseur du degré de l'équation précédente. L'ordre du groupe après l'adjonction de x_α et de x_β sera donc

$$\frac{\mu}{n.m} \qquad (m \leqq n - 1).$$

et, puisque l'équation est résolue, on a

$$\mu = m.n.$$

Évaluons le nombre des substitutions de G qui déplacent tous les

([1]) La démonstration de cette réciproque est seulement indiquée très succinctement dans le Mémoire de Galois; nous suivons ici le commentaire qu'en donne Serret dans son *Algèbre supérieure*. On trouvera aussi dans cet Ouvrage une analyse de M. Hermite donnant une démonstration directe du même théorème.

indices. En ne comptant pas la substitution unité, les groupes Γ renferment

$$(m-1)n$$

substitutions; le nombre des substitutions qui ne déplacent pas *toutes* les lettres n est donc

$$(m-1)n+1.$$

Il y a donc dans G

$$mn-(m-1)n-1 \quad \text{ou} \quad n-1$$

substitutions qui déplacent tous les indices; nous allons voir aisément que ces $n-1$ substitutions sont circulaires et puissances les unes des autres. Soit T une telle substitution; décomposons-la en cycles; aucun de ces cycles ne sera formé d'une seule lettre, et ils ne contiendront pas tous le même nombre de lettres, puisque n est premier. Si la substitution ne se composait pas d'un seul cycle, il y aurait un cycle d'ordre minimum δ, et la substitution T^δ laisserait δ lettres en place ($\delta > 1$) sans se réduire à la substitution unité; or, le groupe G de l'équation ne peut manifestement contenir une telle substitution, puisque par l'adjonction de δ racines le groupe ne serait pas réduit à l'unité. Les $n-1$ substitutions trouvées plus haut sont donc les $n-1$ premières puissances d'une substitution circulaire.

Cela étant, distribuons les indices dans les racines de manière que les $n-1$ substitutions de G, qui déplacent tous les indices, soient les puissances de la substitution circulaire

$$T=(z+1,\ z)$$

et soit S une substitution quelconque, que nous représentons par

$$S=[f(z),\ z].$$

La transformée de T par S est encore une substitution circulaire et déplace, par suite, tous les indices; elle doit donc être une puissance de T :

$$T'=(z+a,\ z).$$

En écrivant que

$$STS^{-1}=T' \quad \text{ou} \quad ST=T'S,$$

on aura, en raisonnant comme au paragraphe 43,

$$f(z)=\alpha z+\beta,$$

α et β étant des entiers, et, par suite, le groupe ne renfermant que des substitutions linéaires, *l'équation est résoluble par radicaux.*

Nous ne nous étendrons pas davantage sur ces questions; le lecteur, désireux d'approfondir ces théories, pourra consulter le *Traité* de M. Jordan et les travaux de Kronecker. Une partie de ceux-ci sont très bien exposés dans le Livre de M. Vogt (*voir,* en particulier, le Chapitre XII). On lira aussi avec grand intérêt, dans l'Ouvrage de MM. Borel et Drach, le Chapitre VI, sur les groupes résolubles.

CHAPITRE XVII.

ANALOGIES ENTRE LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ET LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

I. — Généralités sur les groupes continus [1].

1. Bien que nous ne puissions faire ici une exposition complète des résultats fondamentaux de M. Sophus Lie dans la théorie des groupes continus de transformation, il est indispensable cependant que nous fassions quelques remarques générales sur cette notion de *groupes continus*, qui joue un si grand rôle dans la Science de notre époque. Considérons les n équations

$$(1)\qquad \begin{cases} y'_1 = f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n, a_1, a_2, \ldots, a_r), \\ y'_2 = f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n, a_1, a_2, \ldots, a_r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y'_n = f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n, a_1, a_2, \ldots, a_r), \end{cases}$$

les f dépendant de r paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Ces n équations définissent une transformation entre les y et les y', et l'on suppose, bien entendu, que le déterminant fonctionnel des f par rapport aux y n'est pas identiquement nul. De plus, on suppose que les r paramètres a ont été réduits au moindre nombre, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de trouver r' fonctions

$$A_1, A_2, \ldots, A_{r'} \qquad (r' < r)$$

[1] Pour ces généralités on se reportera aux trois Volumes de M. Sophus Lie, *Sur les groupes de transformations*; on trouvera aussi une exposition très condensée et très nette des théorèmes fondamentaux dans les *Leçons* de M. Lie, rédigées par M. Scheffers (1893), aux pages 366 et suivantes. On doit aussi recommander les leçons de M. Bianchi sur la *Théorie des groupes continus finis de transformations* (Pise, 1903), et les *Leçons* de M. Vivanti, traduites par M. Boulanger (Gauthier-Villars, 1904).

de $a_1, a_2, \ldots, a_r$, telles qu'on ait

$$f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n, a_1, a_2, \ldots, a_r) = F_i(y_1, y_2, \ldots, y_n, A_1, A_2, \ldots A_{r'}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

circonstance qui amènerait la réduction du nombre des paramètres. Si cette circonstance se produisait, on aurait évidemment une relation de la forme

$$(\alpha) \left\{ \begin{array}{r} \chi_1(a_1, a_2, \ldots, a_r)\dfrac{\partial f_i}{\partial a_1} + \chi_2(a_1, a_2, \ldots, a_r)\dfrac{\partial f_i}{\partial a_2} + \ldots \\ + \chi_r(a_1, a_2, \ldots, a_r)\dfrac{\partial f_i}{\partial a_r} = 0 \end{array} \right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et la réciproque est immédiate, c'est-à-dire que, si les f satisfont tous à une relation de cette forme, il y aura au plus $r - 1$ paramètres distincts.

Ceci posé, *les équations* (1) *définissent un groupe de transformations à r paramètres si, ayant successivement*

$$\left. \begin{array}{l} y'_i = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n, a_1, a_2, \ldots, a_r) \\ y''_i = f_i(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n, b_1, b_2, \ldots, b_r) \end{array} \right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les a et b étant des constantes arbitraires, on a

$$y''_i = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n, c_1, c_2, \ldots, c_r),$$

les c ne dépendant que des a et des b. On a donc

$$c_k = \psi_k(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Faisons de suite la remarque que les c considérés comme fonctions des b, par exemple, seront des fonctions indépendantes. On a, en effet,

$$f_i(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n, b_1, b_2, \ldots, b_r) = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r).$$

En différentiant par rapport aux b successivement, on voit qu'on aurait, si le déterminant fonctionnel des ψ par rapport aux b était nul, une relation de la forme

$$\lambda_1(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r)\frac{\partial f_i}{\partial b_1} + \ldots + \lambda_r(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r)\frac{\partial f_i}{\partial b_r} = 0,$$

quel que soit i, et, en donnant aux a des valeurs fixes arbitrairement

choisies, on aurait une relation de la forme (α), et, par suite, les paramètres ne seraient pas réduits au moindre nombre.

Nous n'allons considérer que les groupes de transformations comprenant la substitution identique. Nous supposons donc que, pour certaines valeurs $a_1^0, \ldots, a_r^0$ de $a_1, \ldots, a_r$, on a

$$x'_1 = x_1, \qquad x'_2 = x_2, \qquad \ldots, \qquad x'_n = x_n.$$

2. Dans le cas où il n'y a qu'un seul paramètre, le problème de la recherche des groupes est extrêmement simple. Il nous suffira de prendre deux variables; la recherche serait la même pour un nombre quelconque de variables. Considérons donc le groupe à un paramètre a

$$x' = f(x, y, a),$$
$$y' = \varphi(x, y, a).$$

D'après la notion même de groupe, nous aurons

$$(2) \qquad \begin{cases} f(x', y', b) = f(x, y, c), \\ \varphi(x', y', b) = \varphi(x, y, c), \end{cases}$$

c étant une fonction de a et b, soit

$$c = \psi(a, b).$$

Des lettres a, b, c, deux sont indépendantes, et la troisième est fonction des deux premières. Nous allons, pour un moment, regarder b comme fonction de a et c. En différentiant par rapport à a les deux membres des équations (2), on a

$$\frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a} = 0.$$

On tire de là, en résolvant ces deux équations par rapport à $\frac{\partial x'}{\partial a}$ et $\frac{\partial y'}{\partial a}$,

$$\frac{\partial x'}{\partial a} = F(x', y', b)\frac{\partial b}{\partial a},$$

$$\frac{\partial y'}{\partial a} = \Phi(x', y', b)\frac{\partial b}{\partial a}.$$

Or, de l'équation $c = \psi(a, b)$ on tire la valeur de $\frac{\partial b}{\partial a}$, soit $\chi(a, b)$.

Nous avons donc

$$\frac{\partial x'}{\partial a} = F(x', y', b)\chi(a, b),$$

$$\frac{\partial y'}{\partial a} = \Phi(x', y', b)\chi(a, b).$$

Les équations étant écrites sous cette forme, nous pouvons regarder a et b comme indépendants, et nous avons un système d'équations auxquelles satisfont x' et y' considérées comme fonctions de a. Donnons à b une valeur fixe, d'ailleurs arbitrairement choisie ; les deux équations pourront s'écrire

$$\frac{\partial x'}{\partial a} = \theta(a)\xi(x', y'),$$

$$\frac{\partial y'}{\partial a} = \theta(a)\eta(x', y').$$

Si l'on fait enfin un changement de paramètre, en introduisant au lieu de a un paramètre t lié à a par la relation

$$\theta(a)\,da = dt,$$

nous aurons le système

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = \xi(x', y'),$$

$$\frac{\partial y'}{\partial t} = \eta(x', y'),$$

et, pour une certaine valeur de a, on a, par hypothèse,

$$x' = x, \qquad y' = y.$$

On peut supposer que cela a lieu pour $t = 0$. Donc notre groupe s'obtiendra en considérant le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx'}{dt} = \xi(x', y'),$$

$$\frac{dy'}{dt} = \eta(x', y'),$$

et en cherchant la solution (x', y') se réduisant à (x, y) pour $t = 0$. *Cette solution donnera les deux fonctions*

$$x' = f(x, y, t),$$
$$y' = \varphi(x, y, t),$$

qui correspondront au groupe cherché.

La réciproque est exacte, c'est-à-dire que deux équations

$$\frac{dx'}{dt} = \xi(x', y'),$$
$$\frac{dy'}{dt} = \eta(x', y'),$$

prises arbitrairement, peuvent être regardées comme définissant un groupe à *un* paramètre. Ceci résulte de ce que ξ et η ne dépendent que de x' et y'. Concevons, en effet, qu'on ait trouvé l'intégrale de ce système telle que $x' = x$, $y' = y$ pour $t = 0$, et soit

$$x' = f(x, y, t),$$
$$y' = \varphi(x, y, t)$$

cette intégrale; *je dis que ces équations définissent un groupe.*

Écrivons

$$x' = f(x, y, t_1),$$
$$y' = \varphi(x, y, t_1).$$

Les expressions précédentes se réduisent à x et y pour $t_1 = 0$. D'autre part, les équations

$$x'' = f(x', y', t - t_1),$$
$$y'' = \varphi(x', y', t - t_1)$$

définissent les intégrales x'' et y'' se réduisant à x', y' pour $t = t_1$. Il en résulte que x'', y'' représentent les intégrales se réduisant à (x, y) pour $t = 0$. Donc

$$x'' = f(x, y, t),$$
$$y'' = \varphi(x, y, t),$$

ce qui revient à dire que, des égalités

$$x' = f(x, y, t_1), \qquad x'' = f(x', y', t_2),$$
$$y' = \varphi(x, y, t_1), \qquad y'' = \varphi(x', y', t_2)$$

on déduit

$$x'' = f(x, y, t_1 + t_2),$$
$$y'' = \varphi(x, y, t_1 + t_2),$$

et l'on a donc bien un groupe.

Pour un accroissement infiniment petit δt, donné à t à partir de $t = 0$, x' et y' prennent à partir de x et y des accroissements dont

les parties principales δx et δy sont évidemment

$$\delta x = \xi(x, y)\,\delta t,$$
$$\delta y = \eta(x, y)\,\delta t;$$

aussi appelle-t-on

$$\xi\,\delta t \quad \text{et} \quad \eta\,\delta t$$

la *transformation infinitésimale* du groupe, et, d'après ce qui précède, un groupe à un paramètre est défini par une transformation infinitésimale.

Nous avons considéré le cas de deux lettres; il est clair qu'un groupe à un paramètre pour n lettres peut être défini par le système

$$\frac{dx_1}{dt} = \xi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \xi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dx_n}{dt} = \xi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

où les ξ sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, d'ailleurs quelconques.

3. Considérons maintenant le cas d'un nombre quelconque de paramètres. En nous bornant d'abord uniquement, pour avoir des notations plus simples, à deux variables, nous envisageons le groupe

$$x' = f(x, y, a_1, \ldots, a_r),$$
$$y' = \varphi(x, y, a_1, \ldots, a_r),$$

à r paramètres. Écrivons, comme plus haut,

$$(3) \qquad f(x', y', b_1, \ldots, b_r) = f(x, y, c_1, \ldots, c_r),$$

où l'on a

$$c_k = \psi_k(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r) \qquad (k = 1, 2, \ldots, \ )$$

avec l'identité de même forme pour φ.

Nous considérons encore les c et les a comme des arbitraires, les b étant des fonctions de ces quantités. En différentiant l'identité (3) par rapport à a_h, il vient

$$\frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial a_h} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial a_h} + \frac{\partial f}{\partial b_1}\frac{\partial b_1}{\partial a_h} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial b_r}\frac{\partial b_r}{\partial a_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, r);$$

et pareillement

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial a_h}+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial a_h}+\frac{\partial\varphi}{\partial b_1}\frac{\partial b_1}{\partial a_h}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial b_r}\frac{\partial b_r}{\partial a_h}=0 \qquad (h=1,2,\ldots,r).$$

On tire de ces deux équations, en calculant les dérivées partielles des b par rapport aux a, au moyen des relations $c_k=\psi_k$,

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial a_h}=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=r}\lambda_{kh}(a_1,\ldots,a_r,b_1,\ldots,b_r)\,P_k(x',y',b_1,\ldots,b_r), \\ \dfrac{\partial y'}{\partial a_h}=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=r}\lambda_{kh}(a_1,\ldots,a_r,b_1,\ldots,b_r)\,Q_k(x',y',b_1,\ldots,b_r) \\ \qquad (h=1,2,\ldots,r). \end{cases}$$

Le déterminant formé par les λ_{kh} n'est pas identiquement nul, car autrement on aurait une relation de la forme

$$\sum\chi_h(a_1,\ldots,a_r,b_1,\ldots,b_r)\frac{\partial x'}{\partial a_h}=0,$$

et la même relation pour y'; par suite, les paramètres ne seraient pas réduits au moindre nombre. Comme les c ne figurent pas dans les identités (4), celles-ci sont vérifiées quels que soient a et b. Donnons aux b des valeurs arbitraires mais fixes; les équations précédentes deviendront

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial a_h}=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=r}\theta_{kh}(a_1,\ldots,a_r)\,\xi_k(x',y') \\ \dfrac{\partial y'}{\partial a_h}=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=r}\theta_{kh}(a_1,\ldots,a_r)\,\eta_k(x',y') \end{cases} \qquad (h=1,2,\ldots,r).$$

Nous avons là un système de $2r$ relations auxquelles satisfont x' et y' considérés comme fonctions de $a_1,\ldots,a_r$.

Nous avons déjà dit que le déterminant $|\theta_{kh}|$ n'était pas identiquement nul; il en résulte qu'on pourra écrire

$$\xi_k(x',y')=\sum_{h=1}^{h=r}\alpha_{kh}(a_1,\ldots,a_r)\frac{\partial x'}{\partial a_h},$$

$$\eta_k(x',y')=\sum_{h=1}^{h=r}\alpha_{kh}(a_1,\ldots,a_r)\frac{\partial y'}{\partial a_h},$$

et le déterminant $|\alpha_{kh}|$ ne sera pas identiquement nul. Nous pouvons conclure de là que les deux relations

$$\sum_{k=1}^{k=r} e_k \xi_k(x', y') = 0, \qquad \sum_{k=1}^{k=r} e_k \eta_k(x', y') = 0,$$

où les e seraient des constantes qui ne sont pas toutes nulles, ne peuvent avoir lieu simultanément. Elles entraîneraient, en effet, les relations

$$\sum_{k=1}^{k=r} \sum_{h=1}^{h=r} e_k \alpha_{kh} \frac{\partial x'}{\partial a_h} = 0$$

et la relation analogue en remplaçant x' par y'. Mais, les paramètres étant réduits au moindre nombre, ceci ne peut avoir lieu que si

$$\sum_{k=1}^{k=r} e_k \alpha_{kh} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, r),$$

d'où l'on conclut que le déterminant $|\alpha_{kh}|$ devrait être nul.

4. Les équations (5) jouent, dans la théorie des groupes, un rôle extrêmement important. M. Lie démontre à leur sujet un théorème réciproque, que nous nous contenterons d'énoncer.

Supposons qu'on ait un *ensemble* de transformations à r paramètres (je ne dis pas *un groupe*)

$$x' = f(x, y, a_1, \ldots, a_r),$$
$$y' = \varphi(x, y, a_1, \ldots, a_r),$$

tel que, pour certaines valeurs des paramètres, on ait $x' = x$, $y' = y$, et que les x' et y' considérés comme fonctions des a satisfassent à un système de la forme (5), avec les conditions indiquées plus haut relatives à certains déterminants différents de zéro. Dans ces conditions, on peut affirmer que *l'ensemble des transformations précédentes formera un groupe* : c'est la réciproque du théorème du paragraphe précédent.

Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de cette réciproque, et nous allons montrer immédiatement ce qu'on entend par transformations infinitésimales d'un groupe.

Nous avons dit que, pour certaines valeurs des a, soit

$$a_1 = a_1^0, \qquad a_2 = a_2^0, \qquad a_r = a_r^0,$$

on a $x' = x$, $y' = y$. Donnons aux a des accroissements infiniment petits δa à partir de a^0. Les parties principales $\delta x'$ et $\delta y'$ des accroissements de x' et y' seront

$$\delta x' = \left(\frac{\partial x'}{\partial a_1}\right)_0 \delta a_1 + \ldots + \left(\frac{\partial x'}{\partial a_r}\right)_0 \delta a_r,$$
$$\delta y' = \left(\frac{\partial y'}{\partial a_1}\right)_0 \delta a_1 + \ldots + \left(\frac{\partial y'}{\partial a_r}\right)_0 \delta a_r,$$

et, par suite, en désignant par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ des quantités infiniment petites qui sont des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients constants de $\delta a_1, \delta a_2, \ldots, \delta a_r$, on aura

$$\delta x' = \varepsilon_1 \xi_1(x, y) + \ldots + \varepsilon_r \xi_r(x, y),$$
$$\delta y' = \varepsilon_1 \eta_1(x, y) + \ldots + \varepsilon_r \eta_r(x, y),$$

en calculant, à l'aide des équations (5), les valeurs des dérivées $\left(\frac{\partial x'}{\partial a_i}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial y'}{\partial a_i}\right)_0$.

On dit alors que *le groupe admet r transformations infinitésimales*, dont l'ensemble représente la partie principale de l'accroissement des x' et y' à partir de x et y, pour des accroissements arbitraires des a à partir des a^0. Ces r transformations infinitésimales sont

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_i \xi_i(x, y) \\ \varepsilon_i \eta_i(x, y)\end{array}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Elles sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire que, pour des valeurs convenables des constantes e, on ne peut avoir

$$\sum_{k=1}^{k=r} e_k \xi_k(x, y) = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{k=r} e_k \eta_k(x, y) = 0,$$

comme nous l'avons vu plus haut.

5. Les équations (5) vont nous permettre d'obtenir les sous-

groupes à un paramètre contenus dans le groupe donné. Cherchons à cet effet comment nous devons déterminer $a_1, \ldots, a_r$ en fonction d'un paramètre t, pour que l'ensemble des transformations correspondantes forme un groupe à *un* paramètre. D'après ce que nous avons vu au paragraphe **2**, le paramètre t peut être choisi de telle manière que le groupe soit défini par des équations de la forme

$$\frac{dx'}{dt} = P(x', y'), \qquad \frac{dy'}{dt} = Q(x', y').$$

D'autre part, les équations (5) nous donnent

$$\frac{dx'}{dt} = \sum_{h=1}^{h=r} \frac{\partial x'}{\partial a_h} \frac{da_h}{dt} = \sum_{h=1}^{h=r} \sum_{k=1}^{k=r} \theta_{kh}(a_1, \ldots, a_r)\, \xi_k(x', y') \frac{da_h}{dt}.$$

Il résulte de là que le second membre ne dépendra pas de t. Les coefficients de $\xi_k(x', y')$ sont donc des constantes, et l'on aura, par suite,

$$\sum_{h=1}^{h=r} \theta_{kh}(a_1, \ldots, a_r) \frac{da_h}{dt} = \lambda_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

les λ étant des constantes. D'ailleurs, bien évidemment, en prenant pour les λ des constantes quelconques, et en prenant pour les a des fonctions satisfaisant au système précédent d'équations différentielles, on obtiendra un groupe à un paramètre contenu dans le groupe donné, et défini par les équations

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = \lambda_1 \xi_1(x', y') + \ldots + \lambda_r \xi_r(x', y'), \\ \dfrac{dy'}{dt} = \lambda_1 \eta_1(x', y') + \ldots + \lambda_r \eta_r(x', y'). \end{cases}$$

Pour trouver ce groupe, on doit intégrer ces équations en prenant les conditions initiales

$$x' = x, \qquad y' = y \qquad (\text{pour } t = 0).$$

On voit que ces intégrales se présenteront sous la forme

$$(7) \qquad \begin{cases} x' = F(x, y, \lambda_1 t, \lambda_2 t, \ldots, \lambda_r t), \\ y' = \Phi(x, y, \lambda_1 t, \lambda_2 t, \ldots, \lambda_r t), \end{cases}$$

comme le montre le développement de x', y' suivant les puissances de t.

En même temps que la réciproque admise au paragraphe précédent (5), M. Lie démontre que, du groupe à *un* paramètre que nous venons d'obtenir, on peut déduire le groupe général, défini par les équations (5), en remplaçant $\lambda_1 t$, $\lambda_2 t$, ..., $\lambda_r t$ par r arbitraires a_1, a_2, ..., a_r, qui ne représenteront pas en général les mêmes quantités que les a primitifs.

Le groupe donné pourra donc s'écrire

$$x' = F(x, y, a_1, \ldots, a_r),$$
$$y' = \Phi(x, y, a_1, \ldots, a_r),$$

la substitution identique correspondant à $a_1 = \ldots = a_r = 0$, et l'on aura le développement

$$(\sigma) \quad \begin{cases} x' = x + a_1 \xi_1(x, y) + \ldots + a_r \xi_r(x, y) + \ldots, \\ y' = y + a_1 \eta_1(x, y) + \ldots + a_r \eta_r(x, y) + \ldots, \end{cases}$$

les termes non écrits étant de degrés supérieurs au premier par rapport aux a.

6. Il est important de remarquer que les ξ et les η ne peuvent être pris arbitrairement, c'est-à-dire que, si l'on prend dans le système (6) les ξ et les η arbitrairement, les équations (7) qu'on en déduit ne définiront pas un groupe aux r paramètres $\lambda_1 t$, $\lambda_2 t$, ..., $\lambda_r t$. Un point capital de cette théorie consiste donc à trouver les conditions nécessaires et suffisantes qui doivent exister entre les ξ et η, pour qu'on soit conduit à un groupe de transformations en opérant comme ci-dessus.

Il est aisé de trouver des conditions nécessaires; c'est ce que nous montrerons de la manière suivante :

Prenons le groupe à un paramètre défini par les équations

$$\frac{dx'}{dt} = \xi_1(x', y'), \qquad \frac{dy'}{dt} = \eta_1(x', y'),$$

obtenues en faisant, dans les équations (6), $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$. Il pourra être représenté par le développement

$$x' = x + t\xi_1(x, y) + \frac{t^2}{1.2} A_1(\xi_1) + \frac{t^3}{1.2.3} A_1[A_1(\xi_1)] + \ldots,$$
$$y' = y + t\eta_1(x, y) + \frac{t^2}{1.2} A_1(\eta_1) + \frac{t^3}{1.2.3} A_1[A_1(\eta_1)] + \ldots,$$

en posant

$$A_1(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y}$$

et en regardant $A_1(f)$ comme un symbole d'opération à effectuer sur une fonction f. De même un second groupe à un paramètre correspondant aux équations

$$\frac{dx'}{dt} = \xi_2(x', y'), \qquad \frac{dy'}{dt} = \eta_2(x', y')$$

sera représenté par le développement

$$x' = x + t' \xi_2(x, y) + \frac{t'^2}{1.2} A_2(\xi_2) + \ldots,$$

$$y' = y + t' \eta_2(x, y) + \frac{t'^2}{1.2} A_2(\eta_2) + \ldots,$$

en posant

$$A_2(f) = \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Désignons par S^t la première substitution et par $S^{t'}$ la seconde, et faisons successivement sur (x, y) les substitutions

$$S^t, \quad S^{t'}, \quad S^{-t}, \quad S^{-t'}.$$

Un calcul un peu long, mais très simple, nous donne le résultat suivant :

$$(\sigma') \qquad \begin{cases} x + tt'[A_2(\xi_1) - A_1(\xi_2)] + \ldots, \\ y + tt'[A_2(\eta_1) - A_1(\eta_2)] + \ldots, \end{cases}$$

les termes non écrits étant de degrés supérieurs au second en t et t'. Cette substitution doit être comprise dans le groupe (σ) du paragraphe précédent, en prenant pour les a des séries entières ordonnées suivant les puissances de t et t'. Ces séries devront nécessairement commencer par des termes du second degré en t et t', car, s'il y avait des termes du premier degré, leur ensemble devrait être identiquement nul et les r transformations infinitésimales ne seraient pas linéairement indépendantes (§ 4). En identifiant (σ) et (σ'), on voit donc que les développements de $a_1, \ldots, a_r$ doivent commencer par des termes du second degré et sont nécessairement de la forme

$$a_1 = c_1 tt' + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_r = c_r tt' + \ldots,$$

les c étant des constantes, et l'on a, par suite,

$$A_2(\xi_1) - A_1(\xi_2) = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_r\xi_r,$$
$$A_2(\eta_1) - A_1(\eta_2) = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \ldots + c_r\eta_r.$$

On peut écrire ces deux identités sous une forme plus condensée. On a, quelle que soit la fonction f,

$$A_2[A_1(f)] - A_1[A_2(f)] = [A_2(\xi_1) - A_1(\xi_2)]\frac{\partial f}{\partial x} + [A_2(\eta_1) - A_1(\eta_2)]\frac{\partial f}{\partial y}.$$

On aura donc, quelle que soit la fonction f, la relation

$$A_2[A_1(f)] - A_1[A_2(f)] = c_1 A_1(f) + c_2 A_2(f) + \ldots + c_r A_r(f),$$

qui revient aux deux égalités ci-dessus. La combinaison qui figure dans le premier membre se présente dans de nombreuses questions d'Analyse, notamment dans la théorie des équations linéaires simultanées aux dérivées partielles. On l'appelle le *crochet* de A_1 et A_2, et on la désigne souvent par la parenthèse (A_2A_1); c'est un symbole d'opération à effectuer sur une fonction f.

Nous avons raisonné sur $A_1(f)$ et $A_2(f)$; en considérant d'une manière générale

$$A_i(f) = \xi_i\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i\frac{\partial f}{\partial y},$$
$$A_k(f) = \xi_k\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k\frac{\partial f}{\partial y},$$

les crochets

$$(A_i A_k)$$

devront être des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients constants des r expressions

$$A_1(f),\quad A_2(f),\quad \ldots,\quad A_r(f).$$

Nous trouvons donc ainsi un ensemble de conditions nécessaires pour que les r couples de fonctions (ξ, η) correspondent à un groupe de transformations.

7. *Ces conditions nécessaires sont en même temps suffisantes.* La démonstration de ce théorème fondamental de M. Lie nous entraînerait trop loin, et nous nous contenterons de cette affirmation. Aussi

bien, il suffira souvent de savoir l'énoncé de ce théorème pour pouvoir faire des applications de la théorie.

Nous avons supposé qu'il n'y avait que deux variables. Dans le cas de n variables $x, y, \ldots, z$ et d'un groupe à r paramètres, ce groupe sera défini par r transformations infinitésimales qui correspondent aux r expressions

$$\begin{aligned} A_1(f) &= \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + \tau_1 \frac{\partial f}{\partial z}, \\ A_2(f) &= \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + \tau_2 \frac{\partial f}{\partial z}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_r(f) &= \xi_r \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_r \frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + \tau_r \frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned}$$

les $\xi, \eta, \ldots, \tau$ étant des fonctions de $x, y, \ldots, z$.

Ces r transformations infinitésimales définiront un groupe si tous les crochets

$$(A_i A_k)$$

sont des combinaisons linéaires et homogènes de $A_1, \ldots, A_r$.

Pour obtenir ce groupe, on considérera les équations différentielles ordinaires

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \ldots + \lambda_r \xi_r, \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \ldots + \lambda_r \eta_r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dz}{dt} &= \lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2 + \ldots + \lambda_r \tau_r, \end{aligned}$$

où les λ sont des constantes arbitraires. On intégrera ce système en prenant comme conditions initiales

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad \ldots, \quad z = z_0 \qquad (\text{pour } t = 0).$$

L'intégrale générale sera de la forme

$$\begin{aligned} x &= f_1(x_0, y_0, \ldots, z_0, \lambda_1 t, \lambda_2 t, \ldots, \lambda_r t), \\ y &= f_2(x_0, y_0, \ldots, z_0, \lambda_1 t, \lambda_2 t, \ldots, \lambda_r t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z &= f_n(x_0, y_0, \ldots, z_0, \lambda_1 t, \lambda_2 t, \ldots, \lambda_r t). \end{aligned}$$

En mettant à la place de $\lambda_1 t, \lambda_2 t, \ldots, \lambda_r t$ des constantes

$a_1, a_2, \ldots, a_r$, nous aurons un groupe à r paramètres entre $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ et $(x, y, \ldots, z)$. Rappelons que les $A(f)$ ont été supposés linéairement indépendants, c'est-à-dire qu'il n'y a pas entre eux de relation de la forme

$$e_1 A_1(f) + \ldots + e_r A_r(f) = 0,$$

les e étant des constantes qui ne sont pas toutes nulles.

8. Faisons encore une remarque applicable à tous les groupes de transformations dépendant d'un nombre fini de paramètres arbitraires. Soit le groupe G à r paramètres

$$Y_i = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n, a_1, a_2, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Considérons une fonction $F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$; il arrivera, en général, si l'on forme l'expression

$$F(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n),$$

qu'elle dépendra réellement de r paramètres, c'est-à-dire ne pourra pas être considérée comme une fonction dépendant d'un nombre moindre de paramètres. Nous voulons examiner le cas où il en serait autrement, c'est-à-dire où l'on aurait

$$F(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n, A_1, A_2, \ldots, A_\rho),$$

les A dépendant des a et ρ étant *moindre* que r. Désignons par $A_1^0, \ldots, A_\rho^0$ les valeurs des A pour $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_n^0$ (valeurs de paramètres correspondant à la substitution identique); si l'on pose

$$A_1 = A_1^0, \qquad A_2 = A_2^0, \qquad \ldots, \qquad A_\rho = A_\rho^0,$$

on établira entre les a des relations qui en laisseront au moins $r - \rho$ arbitraires. Pour ces relations entre les a, on aura, d'après l'identité ci-dessus,

$$F(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = F(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Il existera donc un sous-groupe du groupe donné, dépendant d'*au moins* $r - \rho$ paramètres, qui laissera invariable la fonction F.

Traitons maintenant la question inverse, et supposons qu'il y ait dans le groupe G un sous-groupe Γ à $r - \rho$ paramètres, qui laisse invariable la fonction F; je dis que la fonction

$$F(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n),$$

où les Y correspondent à la substitution générale du groupe G, dépend *au plus* de ρ paramètres.

Le sous-groupe Γ correspondra à des valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ des paramètres a, liées par ρ relations convenables, de telle sorte qu'il y ait seulement parmi les α un nombre d'arbitraires égal à $r - \rho$. En effectuant successivement sur les y une substitution du groupe G et une substitution du groupe Γ, on obtiendra des expressions

$$Y'_i = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n, B_1, B_2, \ldots, B_r),$$

où les B dépendent des a et des α. Pour des valeurs fixes, d'ailleurs arbitraires, données aux a, on pourra choisir les α de telle sorte qu'au moins $r - \rho$ des B puissent prendre des valeurs arbitrairement données, car, dans le cas contraire, le groupe Γ ne serait pas à $r - \rho$ paramètres. Ceci posé, dans

$$F(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n),$$

effectuons sur les Y une substitution du groupe Γ, en posant

$$Y'_i = f_i(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n, B_1, B_2, \ldots, B_r);$$

on aura

$$F(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = F(Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_n),$$

d'après la propriété du sous-groupe Γ. Mais, d'après ce que nous avons dit plus haut, on peut, pour des valeurs arbitraires des a, donner dans les Y' à $r - \rho$ des B au moins telles valeurs fixes qu'on voudra. Il en résulte que la fonction $F(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ dépend au plus de ρ paramètres.

En rapprochant les deux remarques que nous venons de faire, on peut énoncer le théorème suivant ([1]) :

Étant donné le groupe G *à r paramètres, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction*

$$F(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$

dépende seulement de ρ paramètres ($\rho > r$) est que la fonction $F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *reste invariable pour les substitutions d'un sous-groupe* Γ *de* G, *à $r - \rho$ paramètres.*

([1]) On trouvera dans la Thèse de M. Vessiot (*Annales de l'École Normale*, 1891) une autre démonstration de ce théorème.

Ce théorème peut être regardé comme l'analogue de celui que nous avons établi au paragraphe 20 du Chapitre précédent. Nous avions là une fonction prenant n valeurs pour les substitutions d'un groupe G d'ordre m; il y avait alors un groupe Γ, sous-groupe de G et d'ordre $\frac{m}{n}$, laissant la fonction invariable. Dans la question actuelle, *c'est la différence* $r-\rho$ *qui remplace le quotient* $\frac{m}{n}$; c'est ce qui arrivera généralement par la suite, où nous trouverons des *différences* au lieu de *quotients* dans des énoncés par ailleurs de même forme.

II. — Des groupes de transformations homogènes et linéaires, et des fonctions symétriques dans la théorie des équations linéaires.

9. Une classe très spéciale de groupes de transformations sera pour nous particulièrement intéressante : ce sont les groupes de transformations linéaires et homogènes et, de plus, renfermant algébriquement les paramètres. Considérons donc la substitution linéaire

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 + \ldots + a_{1n}\,y_n, \\ Y_2 &= a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + \ldots + a_{2n}\,y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_n &= a_{n1}\,y_1 + a_{n2}\,y_2 + \ldots + a_{nn}\,y_n. \end{aligned}$$

Si tous les a sont arbitraires, ces équations définiront évidemment un groupe continu de transformations à n^2 paramètres.

En considérant les y comme des fonctions arbitraires d'une variable x, nous allons étudier d'abord les fonctions rationnelles des y et de leurs dérivées, qui restent invariables quand on effectue sur les y et en même temps sur leurs dérivées des différents ordres la transformation du groupe précédent. Nous les appellerons par analogie *fonctions symétriques* des y et de leurs dérivées.

Il est tout d'abord facile de former des fonctions de cette nature. Étant données n fonctions arbitraires

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n$$

de x, on peut former l'équation linéaire d'ordre n dont ces fonctions

seraient un système fondamental. Soit

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0$$

cette équation. Les p sont des fonctions rationnelles de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre n, et il est évident qu'elles restent invariables quand on effectue sur les $y_1, y_2, \ldots, y_n$ une substitution linéaire quelconque. Ces fonctions jouent le même rôle que les fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique; nous allons en effet établir le théorème suivant :

Toute fonction rationnelle des y et de leurs dérivées, invariable par les substitutions du groupe linéaire général, s'exprime rationnellement à l'aide des fonctions p et de leurs dérivées.

Remarquons d'abord que, dans la fonction considérée, on peut toujours ramener l'ordre de dérivation des y à ne pas dépasser $n - 1$. Il suffit pour cela de se servir de l'équation différentielle linéaire écrite ci-dessus. Après cette réduction, nous avons donc une fonction rationnelle

$$R(y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n, \ldots, y_1^{(n-1)}, \ldots, y_n^{(n-1)}),$$

dont les coefficients sont eux-mêmes fonctions rationnelles des p et de leurs dérivées. Nous allons montrer que, *sous cette forme*, R ne peut dépendre des y. On a, en effet,

$$\begin{aligned} &R(y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n, \ldots, y_1^{(n-1)}, \ldots, y_n^{(n-1)}) \\ &\quad = R(Y_1, \ldots, Y_n, Y'_1, \ldots, Y'_n, \ldots, Y_1^{(n-1)}, \ldots, Y_n^{(n-1)}), \end{aligned}$$

les p et leurs dérivées, dans les coefficients de R, n'ayant pas changé. Or, pour une valeur donnée d'ailleurs arbitraire de x, nous pouvons choisir les constantes a de manière que

$$Y_1, \quad \ldots, \quad Y_n, \quad Y'_1, \quad \ldots, \quad Y'_n, \quad \ldots, \quad Y_1^{(n-1)}, \quad \ldots, \quad Y_n^{(n-1)}$$

prennent telles valeurs que l'on voudra. Si donc R dépend d'une des lettres précédentes, l'égalité ci-dessus est impossible, puisque le premier membre est indépendant des a, tandis que le second a une valeur variable avec ces paramètres.

Il résulte de là que R ne dépend pas de $y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y_n^{(n-1)}$,

et la fonction se réduit, par suite, à une fonction rationnelle des p et de leurs dérivées ([1]). C'est le théorème que nous voulions établir.

10. Parmi les fonctions symétriques élémentaires, que nous avons désignées par p, il en est une qui est particulièrement intéressante : c'est la première, p_1. En posant

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \dots & \frac{dy_n}{dx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} & \dots & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \dots & \frac{dy_n}{dx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} & \frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}} & \dots & \frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}} \\ \frac{d^n y_1}{dx^n} & \frac{d^n y_2}{dx^n} & \dots & \frac{d^n y_n}{dx^n} \end{vmatrix},$$

on a

$$-p_1 = \frac{D_1}{D};$$

or D_1 est précisément la dérivée de D par rapport à x. Admettons, en effet, que ce fait soit exact pour $n-1$ fonctions ; on va voir immédiatement qu'il est encore exact quand on passe de $n-1$ à n. Concevons D développé suivant les termes de la dernière ligne, et écrivons

$$D = A_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \dots + A_n \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}},$$

les A étant des déterminants analogues à D, mais relatifs seulement à $n = 1$ fonctions ; on aura alors

$$\frac{dD}{dx} = A_1 \frac{d^n y_1}{dx^n} + A_2 \frac{d^n y_2}{dx^n} + \dots + A_n \frac{d^n y^n}{dx^n},$$

les autres termes disparaissant, car, d'après ce qui a été supposé au sujet des déterminants d'ordre $n-1$, ces termes forment le déterminant D, où l'avant-dernière ligne aurait été remplacée par la dernière, de telle sorte que les deux dernières lignes s'y trouvent identiques.

([1]) Les fonctions de cette nature ont été étudiées particulièrement par M. Appell dans son Mémoire *Sur les équations différentielles linéaires* (*Annales de l'École Normale*, 2ᵉ série, t. IX).

On a donc bien

$$D_1 = \frac{dD}{dx},$$

comme nous l'avons énoncé. On conclut de là

$$D = e^{-\int p_1(x)\,dx}.$$

La valeur du déterminant

$$D_\lambda = \begin{vmatrix} \frac{d^\nu y_1}{dx^\nu} & \frac{d^\nu y_2}{dx^\nu} & \cdots & \frac{d^\nu y_n}{dx^\nu} \end{vmatrix}_{\nu=0,1,\ldots,n-\lambda-1,n-\lambda+1,\ldots,n}$$

est maintenant facile à calculer en fonction des p. La résolution des n équations du premier degré en $p_1, p_2, \ldots, p_n$ donne

$$p_\lambda(x) = (-1)^\lambda \frac{D_\lambda}{D},$$

et l'on aura par suite

$$D_\lambda = (-1)^\lambda p(x) e^{-\int p_1(x)\,dx}.$$

D'une manière plus générale, considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{d^\nu y_1}{dx^\nu} & \frac{d^\nu y_2}{dx^\nu} & \cdots & \frac{d^\nu y_n}{dx^\nu} \end{vmatrix}_{\nu=a_1,a_2,\ldots,a_n},$$

les a étant n entiers distincts quelconques; il résulte immédiatement de ce qui précède que ce déterminant est égal à une fonction entière des p et de leurs dérivées multipliée par $e^{-\int p_1 dx}$.

On trouvera dans le Mémoire cité de M. Appell des applications intéressantes de cette théorie des fonctions symétriques des intégrales d'une équation linéaire, particulièrement à la transformation d'une telle équation.

Soit

$$z = f\left(y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right)$$

une fonction rationnelle entière z des intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ formant un système fondamental, et de leurs dérivées jusqu'à un ordre d'ailleurs quelconque. Le problème général de la transformation est de former l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la fonction z. Tout d'abord, pour voir quel est l'ordre de l'équation différentielle en z, on remplacera $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par les

éléments d'un autre système fondamental, c'est-à-dire en remplaçant y_i par

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

L'ordre de l'équation différentielle en z est égal au nombre des termes linéairement indépendants qui entrent dans l'expression de z ainsi transformée. Le développement de f donne un certain nombre de termes monomes de la forme

$$y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^{\beta_1} \ldots.$$

Soit, après la réduction à l'ordre $n-1$, au plus, de l'ordre maximum de dérivation des y, q le nombre des termes algébriquement indépendants. On pourra former l'équation différentielle d'ordre q admettant ces q solutions; les coefficients de cette équation se présenteront manifestement sous la forme de fonctions symétriques de $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Dans certains cas particuliers, il pourra arriver cependant que les termes algébriquement distincts ne soient pas linéairement indépendants; on s'en apercevra à ce que tous les coefficients de l'équation formée sont identiquement nuls, et l'on cherchera alors à former une équation d'ordre $q-1$: on arrivera ainsi forcément à l'équation cherchée au bout d'un certain nombre de tentatives.

Soit, par exemple, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{dy}{dx} + by.$$

Posons

$$z = y_1^2;$$

l'expression générale de z sera

$$(a_1 y_1 + a_2 y_2)^2.$$

Nous avons ici les trois termes

$$y_1^2, \quad y_1 y_2, \quad y_2^2,$$

et l'équation donnant z sera en général du troisième ordre.

11. Après avoir considéré les fonctions rationnelles de n fonctions arbitraires de x et de leurs dérivées, que nous avons appelées *fonc-*

tions symétriques, il est naturel de considérer des fonctions rationnelles quelconques. Prenons donc une fonction rationnelle de y_1, y_2, ..., y_n et de leurs dérivées jusqu'à un ordre d'ailleurs quelconque, en désignant toujours par y_1, y_2, ..., y_n des fonctions *arbitraires* de x, et désignons-la pour abréger par

$$R(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

sans marquer explicitement les dérivées qui peuvent figurer dans R.

Reprenons la substitution linéaire générale

$$(8)\qquad \begin{cases} Y_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ Y_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n, \end{cases}$$

et écrivons la relation

$$(9)\qquad R(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = R(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

On peut chercher à déterminer les constantes a, de manière que cette relation soit identiquement vérifiée, quelles que soient les fonctions y_1, y_2, ..., y_n de x. En général, il n'y aura pas d'autres solutions que

$$a_{ik} = 0 \quad (i \neq k), \qquad a_{ii} = 1;$$

mais, pour certaines fonctions R, il y aura d'autres déterminations possibles des a. Supposons que l'identité précédente entraîne seulement

$$n^2 - \rho$$

relations entre les a, qui seront d'ailleurs évidemment algébriques; on pourra exprimer $n^2 - \rho$ des a en fonction des ρ restants. Dans ces conditions, les équations (8) définissent un ensemble de transformations dépendant de ρ paramètres arbitraires. *Cet ensemble de transformations forme un groupe linéaire, homogène et algébrique de transformations;* il est clair, en effet, que le produit de deux substitutions de l'ensemble appartient encore au même ensemble, puisque pour ces deux substitutions la fonction R reste invariable, d'après l'identité (9).

Prenons, comme exemple, l'expression

$$\frac{1}{y_1}\left(y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx}\right).$$

En écrivant l'identité (9), on trouve

$$Y_1 = a y_1,$$
$$Y_2 = b y_1 + y_2.$$

On a ainsi un groupe de transformations à deux paramètres a et b.

Il pourra arriver que l'identité (9) ne définisse pas un seul groupe, mais plusieurs. Les $n^2 - \rho$ relations entre les a, dont nous avons parlé plus haut, peuvent ne pas former un système irréductible et se partager alors en plusieurs systèmes irréductibles de $n^2 - \rho$ relations. Le groupe dérivé de la fonction R est dit, dans ce cas, *un groupe complexe*. Prenons, par exemple, pour R, la fonction

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

Le groupe linéaire, laissant invariable cette expression, correspond à l'ensemble des transformations de coordonnées rectangulaires. Cet ensemble se partage en deux groupes distincts; pour l'un d'eux, le déterminant des coefficients de la substitution est égal à $+1$ et pour l'autre à -1.

Une question inverse se pose maintenant : étant donné un groupe linéaire homogène et algébrique, existe-t-il toujours une ou plusieurs fonctions rationnelles des y considérés comme fonctions arbitraires d'une variable x et de leurs dérivées, que laissent invariables les substitutions du groupe. On répondra immédiatement à cette question en se reportant à un théorème général de M. Lie, que je ne fais qu'énoncer [1]. Reprenons un groupe quelconque

$$Y_i = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n, a_1, a_2, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En regardant les y comme fonctions arbitraires de x, différentions ces équations un nombre suffisant de fois pour qu'elles soient en nombre supérieur à r.

En éliminant alors les a entre les équations ainsi obtenues, nous obtenons des relations que M. Lie démontre être nécessairement de la forme

$$R\left(Y_1, \ldots, Y_n, \frac{dY_1}{dx}, \ldots\right) = R\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right).$$

---

[1] S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, p. 215 et 524.

En particulier, si nous avons un groupe linéaire homogène et algébrique, les relations précédentes seront nécessairement algébriques, et, en prenant des combinaisons symétriques de ces relations, on obtiendra une ou plusieurs fonctions *rationnelles* des y et de leurs dérivées que laisseront invariables les substitutions du groupe. Parmi ces fonctions rationnelles, on pourra en trouver qui ne restent pas invariables pour les substitutions d'un autre groupe à un plus grand nombre de paramètres.

12. Les théorèmes établis dans la première Section de ce Chapitre nous permettent de faire quelques remarques générales sur les groupes *linéaires, homogènes et algébriques*.

Commençons par un groupe à *un* paramètre. On obtiendra un tel groupe en prenant un système d'équations linéaires à coefficients constants

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n.$$

On calculera l'intégrale générale, et il suffira de choisir les n constantes arbitraires de manière que, pour $t = 0$, on ait

$$x_1 = x_1^0, \quad \ldots, \quad x_n = x_n^0.$$

On aura ainsi un groupe de transformations avec le paramètre t, entre les x et les x_0. Si nous voulons que ce groupe soit *algébrique*, il faudra que dans les expressions linéaires des x en fonction des x_0 deux coefficients quelconques des x_0 soient liés par une relation algébrique. Si nous désignons par $r_1, r_2, \ldots, r_k$ les racines différentes de zéro et distinctes de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-r & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-r \end{vmatrix} = 0,$$

chaque coefficient sera de la forme

$$P_1(t)e^{r_1 t} + P_2(t)e^{r_2 t} + \ldots + P_k e^{r_k t} + P_{k+1}(t),$$

les P étant rationnels.

Nous avons vu, en étudiant les équations à coefficients constants, que, si les μ représentent des nombres distincts et différents de zéro, une identité de la forme

$$(\alpha) \qquad B(t) + \Sigma A_i(t) e^{\mu_i t} = 0,$$

où B et les A sont rationnels, entraîne nécessairement $B = 0$, $A_i = 0$. Ceci posé, une relation algébrique entre deux coefficients entraînera une relation algébrique (E) entre

$$(\beta) \qquad t, \quad e^{r_1 t}, \quad \ldots, \quad e^{r_k t}.$$

Il pourrait arriver que cette relation fût vérifiée quels que soient t, $e^{r_1 t}$, $\ldots$, $e^{r_k t}$ considérés comme étant $k+1$ grandeurs indépendantes; alors les deux coefficients pourraient être regardés comme fonctions rationnelles d'une de ces lettres, les autres prenant telles valeurs numériques qu'on voudra, et, si cette circonstance se présentait pour tout groupe de deux coefficients, *tous ces coefficients seraient fonctions rationnelles d'une arbitraire*. Dans le cas contraire, (E) donnerait réellement une relation entre les quantités (β); mais, d'après ce que nous avons dit des identités de la forme (α), il faudrait qu'il y eût au moins deux termes avec la même exponentielle, pour qu'ils puissent se détruire. On aurait donc nécessairement au moins une relation

$$n_1 r_1 + n_2 r_2 + \ldots + n_k r_k = 0,$$

les n étant des entiers positifs ou négatifs qui ne sont pas tous nuls.

Soit n_k différent de zéro; nous remplacerons t par $n_k \theta$; nous pouvons alors considérer les coefficients comme des fonctions entières de

$$(\gamma) \qquad \theta, \quad e^{r_1 \theta}, \quad \ldots, \quad e^{r_{k-1} \theta},$$

et nous pouvons raisonner comme précédemment. La relation algébrique entre deux coefficients entraîne une relation (E′) entre les termes de la suite (γ); il pourrait arriver que (E′) fût vérifiée, quels que soient θ, $e^{r_1 \theta}$, $\ldots$, $e^{r_{k-1} \theta}$ considérés comme étant k grandeurs indépendantes, et, dans le cas où il en serait ainsi pour tout groupe de deux coefficients, il est clair que *tous ces coefficients seraient fonctions rationnelles d'une arbitraire*. Dans le cas contraire, nous

serons conduit à une relation

$$n'_1 r_1 + n'_2 r_2 + \ldots + n_{k-1} r_{k-1} = 0,$$

les n' étant des entiers qui ne sont pas tous nuls.

On continuera ainsi de proche en proche, et l'on arrivera à la conclusion suivante : ou bien les coefficients peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide d'une arbitraire, ou bien les r sont commensurables entre eux. Dans ce dernier cas, on pourra alors exprimer tous les coefficients en fonctions entières de

$$\theta \quad \text{et} \quad e^{a\theta} \qquad (a \neq 0).$$

Une relation algébrique entre deux coefficients amènera une relation algébrique entre θ et $e^{a\theta}$, qui ne peut être qu'une identité, et, par suite, tous les coefficients sont encore fonctions rationnelles d'une arbitraire. Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Dans un groupe linéaire, homogène et algébrique à un *paramètre, on peut choisir le paramètre de telle manière que tous les coefficients de la transformation soient des fonctions rationnelles de ce paramètre.*

Un théorème analogue s'étend aux groupes à un nombre quelconque r de paramètres. Pour définir un tel groupe, il faut se donner r transformations infinitésimales satisfaisant aux conditions relatives au crochet. Il sera suffisant de prendre $r = 2$. Nous aurons alors les équations

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda\xi_1 + \mu\xi_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \lambda\eta_1 + \mu\eta_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = \lambda\tau_1 + \mu\tau_2,$$

les ξ, η, ..., τ étant des fonctions données linéaires et homogènes des x, satisfaisant aux conditions relatives au crochet (*voir* § 7); λ et μ sont des constantes arbitraires.

Puisque ce groupe peut s'obtenir en combinant les substitutions du groupe à un paramètre correspondant à $\mu = 0$, et celles d'un second groupe à un paramètre correspondant à $\lambda = 0$, tous les coefficients de la transformation seront des fonctions rationnelles de

$$\lambda t, \quad \mu t, \quad e^{r_1\lambda t}, \quad e^{r_2\lambda t}, \quad \ldots, \quad e^{r_k\lambda t}, \quad e^{r'_1\mu t}, \quad \ldots, \quad e^{r'_k\mu t},$$

$r_1, r_2, \ldots, r_n$ étant les racines de l'équation caractéristique correspondant aux n fonctions linéaires

$$\xi_1, \quad \eta_1, \quad \ldots, \quad \tau_1,$$

racines distinctes et différentes de zéro; pareillement $r'_1, r'_2, \ldots, r'_k$ sont les racines, distinctes et différentes de zéro, de l'équation caractéristique correspondant aux n fonctions linéaires

$$\xi_2, \quad \eta_2, \quad \ldots, \quad \tau_2.$$

Tous les coefficients sont ainsi des fonctions de λt et de μt, et l'on peut regarder les coefficients comme fonctions rationnelles de

$$\theta, \quad \theta', \quad e^{r_1\theta}, \quad \ldots, \quad e^{r_k\theta}, \quad e^{r'\theta'}, \quad \ldots, \quad e^{r'_{k'}\theta'}.$$

En raisonnant absolument comme plus haut, si ce n'est que la relation algébrique est entre trois coefficients au lieu de deux, on établit que : ou bien les coefficients s'expriment rationnellement à l'aide de deux arbitraires, ou bien

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_k$$

sont entre eux dans des rapports commensurables, ainsi que

$$r'_1, \quad r'_2, \quad \ldots, \quad r'_{k'},$$

et l'on retombe alors encore sur la même possibilité d'exprimer les coefficients d'une manière rationnelle à l'aide de deux arbitraires. Nous avons donc le théorème général suivant :

Dans un groupe linéaire homogène et algébrique à un nombre quelconque de paramètres, on peut choisir ceux-ci de manière que les coefficients de la transformation soient fonctions rationnelles de ces paramètres.

13. Terminons ces généralités par un théorème qui est l'analogue du théorème de Lagrange en Algèbre (Chapitre précédent, § 6). Soit une fonction rationnelle des y et de leurs dérivées jusqu'à un ordre d'ailleurs quelconque, que nous représentons, pour abréger, par

$$R(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

et considérons le groupe linéaire et homogène général à n^2 para-

mètres

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{aligned}$$

On suppose qu'à la fonction R corresponde un groupe linéaire et homogène G à ρ paramètres. Dans ces conditions, je prends pour les y des fonctions arbitraires d'une variable x, et j'envisage l'expression

$$u = \mathrm{R}(\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \ldots, \mathrm{Y}_n).$$

C'est une fonction de x, dépendant, d'après le théorème du paragraphe 8, de $n^2 - \rho$ constantes arbitraires, c'est-à-dire qu'on a

$$\mathrm{R}(\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \ldots, \mathrm{Y}_n) = \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n; \mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_{n^2-\rho}),$$

les B dépendant des a. Elle satisfera donc à une équation différentielle d'ordre $n^2 - \rho$, qu'on pourra obtenir par des calculs algébriques d'élimination. Les coefficients de cette équation différentielle seront visiblement des fonctions rationnelles de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et de leurs dérivées. L'un de ces coefficients peut être rendu égal à l'unité et les autres sont alors des fonctions des y et de leurs dérivées, qui rentrent dans la catégorie des fonctions que nous avons appelées *symétriques*, et ils s'exprimeront par suite rationnellement à l'aide des fonctions élémentaires désignées par p (§ 9). En effet, si dans l'expression de Φ on effectue les substitutions du groupe linéaire général, on obtient la même fonction Φ, les coefficients B ayant seulement d'autres valeurs.

L'équation différentielle d'ordre $n^2 - \rho$, à laquelle satisfait u, est l'analogue de l'équation algébrique à laquelle satisfaisait une fonction non symétrique de plusieurs lettres (Chap. XVI, § 5).

Ceci posé, désignons par $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$, n fonctions arbitrairement choisies de x, et soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$, n fonctions linéaires et homogènes quelconques de $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$. Nous considérons une autre fonction rationnelle

$$\mathrm{S}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

des fonctions y et de leurs dérivées jusqu'à un ordre quelconque, admettant le groupe G, c'est-à-dire ne changeant pas quand on effectue sur les y les substitutions de ce groupe. Cherchons s'il est

possible d'exprimer S à l'aide de la fonction u. La fonction S satisfera à une équation différentielle dont l'ordre sera au plus égal à $n^2 - \rho$, et que nous pouvons obtenir en procédant comme nous l'avons fait pour R ; soit

$$\varphi(S) = 0$$

cette équation, dont les coefficients sont fonctions rationnelles des p^0 et de leurs dérivées. Posons

$$V = a\,R(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) + S(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

a étant une fonction rationnelle arbitraire de x, et $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ désignant les fonctions particulières de x arbitrairement choisies plus haut. On aura

$$(\alpha) \qquad \varphi[V - a\,R(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)] = 0.$$

Posons, d'autre part,

$$W = a\,R(y_1, y_2, \ldots, y_n) + S(y_1, y_2, \ldots, y_n);$$

la fonction W satisfait à une équation différentielle d'ordre $n^2 - \rho$ que nous pouvons former et dont les coefficients sont fonctions rationnelles des p^0 et de leurs dérivées, ainsi que de a et de ses dérivées ; désignons-la par

$$(\beta) \qquad \psi(W) = 0.$$

Les deux équations différentielles (α) et (β) en V et W ont une solution commune immédiate qui est

$$a\,R(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) + S(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0).$$

Nous allons voir que cette solution commune est unique ; en effet, pour que V = W, il faut

$$\begin{aligned} &a\,R(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) + S(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \\ &\quad = a\,R(y_1, y_2, \ldots, y_n) + S(y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned}$$

les Y étant nécessairement comme les y des combinaisons linéaires à coefficients constants des y_0. Puisque ceux-ci représentent des fonctions arbitraires de x, et que a est une fonction rationnelle arbitraire de x, l'identité précédente entraîne

$$\begin{aligned} R(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) &= R(y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ S(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) &= S(y_1, y_2, \ldots, y_n); \end{aligned}$$

la première égalité montre que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ se déduisent de y_1^0, $y_2^0, \ldots, y_n^0$ au moyen des transformations du groupe G; on aura donc aussi

$$S(y_1, y_2, \ldots, y_n) = S(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0),$$

et, par suite, il n'y a pas d'autre solution commune aux équations (α) et (β) que

$$a R(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) + S(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0).$$

Des calculs algébriques d'élimination feront connaître la solution commune aux équations (α) et (β), en opérant comme nous le verrons dans la Section suivante (§ 15). On trouve ainsi une relation algébrique

$$F\left(V_0, R_0, \frac{dR_0}{dx}, \ldots, p_1^0, \frac{dp_1^0}{dx}, \ldots\right) = 0,$$

et l'on exprime par suite V_0, c'est-à-dire

$$a R(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) + S(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0),$$

algébriquement à l'aide de la fonction R_0 et de ses dérivées, des p^0 et de leurs dérivées. Cette fonction algébrique doit d'ailleurs être rationnelle, car, si $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ sont uniformes, il en sera de même de V_0. La conclusion est que

$$S(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

s'exprime rationnellement à l'aide de $R(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *et de ses dérivées, et des p et de leurs dérivées.* Ce théorème est bien l'analogue du théorème de Lagrange ([1]).

III. — Intégrales communes à plusieurs équations et réductibilité des équations linéaires.

14. Nous avons, dans la Section précédente, étudié les fonctions rationnelles de n fonctions arbitraires d'une variable et de leurs dérivées, et les groupes de transformations linéaires qui s'y rapportent; cette étude était l'analogue de l'étude purement algébrique faite au

([1]) Cette extension du théorème de Lagrange a été donnée par M. Vessiot dans son intéressante Thèse (déjà citée p. 539) *Sur les équations différentielles linéaires;* nous aurons à revenir sur ce travail dans la dernière Section de ce Chapitre.

début du Chapitre précédent. Revenons maintenant aux équations différentielles linéaires et traitons tout d'abord de quelques problèmes qui se présentent d'eux-mêmes quand on cherche à comparer la théorie des équations différentielles linéaires avec celle des équations algébriques.

Une première question très élémentaire est la recherche des intégrales communes à deux équations linéaires. Soient

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m y = 0,$$
$$\frac{d^n y}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + q_n y = 0$$

deux équations linéaires dont, pour abréger, nous désignerons les premiers nombres par P et Q.

La méthode suivante, donnée autrefois par M. Brassinne, conduit de la manière la plus élégante à la formation de l'équation différentielle linéaire dont les intégrales sont les intégrales communes aux équations précédentes. Soit $m \geqq n$ et posons $m - n = \mu$. On peut déterminer des fonctions $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$ de x, telles que la différence

$$P - (Q^{(\mu)} + r_1 Q^{(\mu-1)} + \ldots + r_\mu Q),$$

où $Q^{(\mu)}$ désigne la dérivée d'ordre μ de Q, et où y est pour le moment une fonction arbitraire de x, ne contienne plus de dérivées de y d'ordre égal ou supérieur à n. Ces coefficients r s'obtiennent manifestement de proche en proche.

Nous pouvons donc écrire l'identité

$$P = Q^{(\mu)} + r_1 Q^{(\mu-1)} + \ldots + r_\mu Q + r_{\mu+1} R,$$

R désignant une expression différentielle analogue à P et à Q, où le premier coefficient est l'unité, mais renfermant au plus la dérivée d'ordre $n - 1$.

Les solutions communes à

$$P = 0, \qquad Q = 0$$

sont communes à

$$Q = 0, \qquad R = 0,$$

et inversement. On continuera ainsi, de proche en proche, par ce même procédé qui rappelle la recherche du plus grand commun di-

viseur, et, quand le reste sera nul, la dernière expression employée sera l'équation différentielle donnant les solutions communes aux deux équations proposées.

On pourrait encore suivre une méthode qui rappelle la méthode suivie en Algèbre et basée sur la théorie des fonctions symétriques. Soit

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_m$$

un système d'intégrales fondamentales de l'équation P. On devra avoir, pour des valeurs convenables des constantes C,

$$Q(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_m y_m) = 0,$$

c'est-à-dire

$$C_1 Q(y_1) + C_2 Q(y_2) + \ldots + C_m Q(y_m) = 0,$$

et, par suite, on aura

$$\begin{vmatrix} Q(y_1) & Q(y_2) & \ldots & Q(y_m) \\ \frac{dQ(y_1)}{dx} & \frac{dQ(y_2)}{dx} & \ldots & \frac{dQ(y_m)}{dx} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{d^{m-1}Q(y_1)}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-1}Q(y_2)}{dx^{m-1}} & \ldots & \frac{d^{m-1}Q(y_m)}{dx^{m-1}} \end{vmatrix} = 0.$$

Or, cette expression est une somme de déterminants de la forme de ceux que nous avons considérés au paragraphe 2. L'expression précédente est donc égale à une fonction entière des p, des q et de leurs dérivées, multipliée par $e^{-\int p_1 dx}$, et nous obtenons donc ainsi la condition cherchée.

15. Arrivons maintenant à la notion importante de la *réductibilité* d'une équation différentielle linéaire. M. Frobenius a, le premier, appelé l'attention sur cette notion [1]; considérant une équation différentielle linéaire à coefficients uniformes, l'éminent géomètre définit son *irréductibilité* en disant qu'elle n'a de solution commune avec aucune équation linéaire de même nature, mais d'ordre moindre, en faisant abstraction de la solution $y = 0$, et il donne à ce sujet divers théorèmes d'un grand intérêt.

---

[1] FROBENIUS, *Ueber den Begriff der Irreductibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen* (*Journal de Crelle*, t. 76).

Cette notion d'irréductibilité n'est pas bornée, d'ailleurs, à une équation linéaire. Envisageons une équation différentielle algébrique

$$f\left[(x), y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^m y}{dx^m}\right] = 0,$$

où f est un polynome par rapport à y et ses dérivées, les coefficients étant des fonctions uniformes de x dans tout le plan. L'équation précédente sera dite *irréductible,* si elle est algébriquement irréductible par rapport à $\frac{d^m y}{dx^m}$, c'est-à-dire si f n'a pas de diviseurs de moindre degré en $\frac{d^m y}{dx^m}$ avec des coefficients rationnels par rapport à

$$y, \ldots, \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}$$

et uniformes en x, et si, de plus, elle n'a aucune intégrale commune avec une équation différentielle de même forme et d'ordre moindre.

Quelques remarques générales se déduisent immédiatement de cette définition. Je suppose qu'une équation ne soit pas irréductible; l'équation a alors par définition au moins une intégrale commune avec une équation

$$\varphi\left[(x), y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^h y}{dx^h}\right] = 0 \qquad (h < m)$$

qu'on peut supposer algébriquement irréductible par rapport à $\frac{d^h y}{dx^h}$.

Des équations f et φ, on peut tirer une nouvelle équation ψ d'ordre $h-1$ au plus, à laquelle satisferont les solutions communes à f et φ; il suffit de se servir de l'équation φ pour faire disparaître dans f toutes les dérivées d'ordre supérieur à $h-1$. Si l'équation ψ n'est pas une identité quel que soit y, on raisonnera sur φ et ψ, comme on a raisonné sur f et φ, et finalement on arrivera à une équation différentielle χ telle que toutes les solutions de χ appartiendront à f; il peut arriver d'ailleurs que l'équation différentielle $\chi = 0$ soit d'ordre *zéro,* c'est-à-dire se réduise à une équation algébrique en y. Nous voyons donc que, *quand une équation n'est pas irréductible, il existe toujours une équation différentielle d'ordre moindre dont elle admet toutes les intégrales.*

Le même mode de raisonnement permet d'établir de suite une proposition analogue à un théorème de la théorie des équations : *Si une équation différentielle a une intégrale commune avec une équation différentielle irréductible, elle admettra toutes les intégrales de cette dernière.*

16. Nous renverrons, pour le développement des considérations précédentes, au Mémoire cité de M. Frobenius ; on peut se placer à un point de vue plus restreint, mais qui se rapproche davantage du point de vue algébrique. Prenons d'abord, avec Kœnigsberger [1], une équation différentielle algébrique

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0,$$

où f est un polynome en x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\ldots$, $\frac{d^m y}{dx^m}$. Une telle équation sera dite *irréductible* si elle est algébriquement irréductible quand on regarde $\frac{d^m y}{dx^m}$ comme fonction des autres lettres qui figurent dans l'équation, et si celle-ci n'a aucune intégrale commune avec une équation différentielle de même forme et d'ordre moindre.

Si l'équation $f = 0$ est linéaire et homogène à coefficients algébriques de x, on peut prendre la définition que nous venons d'indiquer, et cette manière d'envisager la réductibilité des équations linéaires est importante dans plusieurs questions. On peut aussi, se plaçant à un point de vue plus restreint, exiger que la seconde équation différentielle soit également linéaire et homogène. Ainsi, nous restreignant d'abord aux équations linéaires à coefficients rationnels, nous dirons qu'une telle équation est réductible quand elle a une intégrale commune, en dehors de $y = 0$, avec une équation linéaire d'ordre moindre et à coefficients rationnels ; nous savons que dans ce cas elle possédera toutes les intégrales d'une équation d'ordre moindre et de même forme, comme il résulte des remarques générales du paragraphe précédent.

En se bornant aux équations que nous venons de considérer en dernier lieu, il est possible de reconnaître si une équation linéaire

(1) Kœnigsberger, *Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unhabhängigen Variabeln*, p. 155.

à coefficients rationnels est réductible ; c'est ce que nous allons montrer [1].

Nous ferons voir d'abord que tout revient à reconnaître si une équation linéaire à coefficients rationnels admet une intégrale dont la dérivée logarithmique soit rationnelle. Supposons, en effet, que l'équation soit d'ordre n, et que q de ses intégrales linéairement indépendantes ($q < n$) satisfassent à une équation linéaire d'ordre q à coefficients rationnels. On considère le déterminant

$$\Delta_0 = \left| \frac{d^\nu y_1}{dx^\nu} \quad \frac{d^\nu y_2}{dx^\nu} \quad \cdots \quad \frac{d^\nu y_q}{dx^\nu} \right|_{\nu=0,1,\ldots,q-1}$$

et les déterminants en nombre q

$$\Delta_\lambda = \left| \frac{d^\nu y_1}{dx^\nu} \quad \frac{d^\nu y_2}{dx^\nu} \quad \cdots \quad \frac{d^\nu y_q}{dx^\nu} \right|_{\nu=0,1,\ldots,q-\lambda-1,q-\lambda+1,\ldots,q}$$

correspondant à $\lambda = 1, 2, \ldots, q$. Si $y_1, y_2, \ldots, y_q$ satisfont à une équation d'ordre q à coefficients rationnels, les rapports $\frac{\Delta_\lambda}{\Delta_0}$ seront rationnels (§ 10 de ce Chapitre), et Δ_0 est de la forme $e^{\int r(x)\,dx}$, la fonction $r(x)$ étant rationnelle; il s'ensuit que les Δ_λ seront de même forme. Or nous pouvons former une équation linéaire E_λ à laquelle satisfait

$$\Delta_\lambda$$

en regardant ce déterminant comme une fonction des intégrales de l'équation initiale d'ordre n; l'équation E_λ devra admettre une intégrale dont la dérivée logarithmique sera rationnelle. Ainsi, les $q+1$ équations, faciles à former,

$$E_0, \quad E_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, q)$$

admettront chacune une intégrale à dérivée logarithmique rationnelle.

Quand on aura vérifié ce point, on aura, avec les intégrales trouvées des équations E_0 et E_λ, la ou les valeurs possibles de Δ_0 et de Δ_λ et par suite de leurs quotients. On devra pouvoir les associer de

---

[1] Outre le Mémoire de M. Frobenius, je citerai encore, relativement à cette question de la réductibilité des équations linéaires, un Mémoire de M. Ivar Bendixson, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Stockholm* (février 1892) et un article de M. E. Beke (*Math. Annalen*, t. XLV).

manière que les quotients

$$\frac{\Delta_\lambda}{\Delta_0}$$

soient rationnels; pour chacune des équations linéaires d'ordre q que l'on aura ainsi formée, il restera à reconnaître si son intégrale générale satisfait à l'équation donnée, opération que nous savons effectuer.

On voit donc que nous sommes ramené à reconnaître si une équation linéaire donnée, à coefficients rationnels, admet une intégrale dont la dérivée logarithmique est rationnelle : c'est le problème que nous allons traiter.

17. Il suffira de prendre l'équation du troisième ordre

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + P_1 \frac{d^2 y}{dx^2} + P_2 \frac{dy}{dx} + P_3 y = 0,$$

les P étant des fonctions rationnelles de x. On peut d'abord s'arranger, par un changement linéaire de variables, de façon que le point à l'infini soit un point ordinaire pour les intégrales. En posant ensuite

$$u = \frac{y'}{y},$$

on a pour u l'équation du second ordre

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + (3u + P_1)\frac{du}{dx} + u^3 + P_1 u^2 + P_2 u + P_3 = 0.$$

u pourra avoir comme pôles les points singuliers de l'équation différentielle et aussi d'autres points du plan. L'ordre de multiplicité k de tout pôle de u est limité, car il faut que l'ordre de multiplicité $3k$ d'un pôle de u^3 ne dépasse pas l'ordre de multiplicité d'au moins un des autres termes; ce qui donne pour k une limite supérieure. Décomposons u en fractions simples. Les pôles autres que les points singuliers de l'équation différentielle sont nécessairement des pôles simples, leur résidu étant égal à *un* ou *deux*, suivant qu'ils correspondent à une racine simple ou double de y, une racine triple n'étant pas possible en un point non singulier. Désignons par $R(x)$ la partie de la fraction rationnelle relative aux points singuliers de l'équation; nous aurons

$$u = R(x) + \sum \frac{m}{x-a} \qquad (m = 1, 2),$$

les a n'étant pas des points singuliers de l'équation différentielle. On a pour $R(x)$

$$R(x) = \sum \frac{B_k}{(x-b)^k} + \frac{B_{k-1}}{(x-b)^{k-1}} + \ldots + \frac{B_1}{x-b}.$$

I n'y a pas dans u de partie entière, d'après l'hypothèse faite sur le point à l'infini. Les degrés k de multiplicité sont limités et les B peuvent donc être calculés de proche en proche par substitution dans l'équation donnant u. On peut poser

$$y = e^{\int R(x)\,dx} v,$$

v désignant un polynome. En faisant cette substitution dans l'équation linéaire, on aura à reconnaître si l'équation linéaire en v ainsi obtenue admet un polynome pour intégrale, ce qui ne présente aucune difficulté.

18. Prenons, comme exemple particulier, l'équation différentielle hypergéométrique, et cherchons dans quel cas elle est réductible. Soit donc l'équation

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0.$$

Si elle est réductible, il y aura une intégrale y telle que le quotient $\frac{y'}{y}$ sera rationnel. Pour simplifier les calculs ultérieurs, désignons par u, non pas $\frac{y'}{y}$, mais l'expression

$$u = \frac{y'}{y} + \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)x}{2x(1-x)}.$$

On forme immédiatement l'équation de Riccati, donnant u,

$$\frac{du}{dx} + u^2 + \frac{h_1}{x} + \frac{h_2}{x^2} + \frac{k_1}{1-x} + \frac{k_2}{(1-x)^2} = 0,$$

où l'on a posé

$$h_1 = k_1 = -\alpha\beta - \tfrac{1}{2}\gamma(\gamma-\alpha-\beta-1),$$
$$h_2 = -\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \frac{\gamma}{2},$$
$$k_2 = -\left(\frac{\gamma-\alpha-\beta-1}{2}\right)^2 - \frac{\gamma-\alpha-\beta-1}{2}.$$

Si la fonction rationnelle u a un pôle distinct de *zéro* et *un*, ce pôle sera nécessairement du premier ordre. Il en est ainsi de même des pôles o et 1, et l'on a nécessairement

$$u = \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{1-x} + \frac{g'(x)}{g(x)},$$

$g(x)$ étant un polynome; il n'y a pas dans u de partie entière, car u doit s'annuler pour $x = \infty$ d'après la forme de l'équation. La substitution donne

$$\alpha_1^2 - \alpha_1 = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \frac{\gamma}{2},$$

$$\alpha_2^2 + \alpha_2 = \left(\frac{\gamma-\alpha-\beta-1}{2}\right)^2 + \frac{\gamma-\alpha-\beta-1}{2}.$$

Nous obtenons donc pour α_1 deux systèmes de valeurs, et aussi pour α_2

$$\alpha_1' = \frac{\gamma}{2}, \qquad \alpha_1'' = 1 - \frac{\gamma}{2},$$

$$\alpha_2' = \frac{\gamma-\alpha-\beta-1}{2}, \qquad \alpha_2'' = -1 - \frac{\gamma-\alpha-\beta-1}{2}.$$

En substituant dans l'équation hypergéométrique, nous avons, pour déterminer le polynome $g(x)$, l'équation

$$x(1-x)g'' + 2[\alpha_1(1-x) + \alpha_2 x]g' + (2\alpha_1\alpha_2 + h_1)g = 0.$$

Si n désigne le degré de $g(x)$, on aura

$$-n(n-1) + 2n(\alpha_2 - \alpha_1) + 2\alpha_1\alpha_2 - \alpha\beta - \tfrac{1}{2}\gamma(\gamma-\alpha-\beta-1) = 0.$$

Nous pouvons adopter pour α_1 et α_2 quatre combinaisons; ce qui nous conduit pour n aux *huit* valeurs

$$-\alpha, \quad -\alpha+1, \quad \alpha-\gamma, \quad \alpha-\gamma+1,$$
$$-\beta, \quad -\beta+1, \quad \beta-\gamma, \quad \beta-\gamma+1.$$

Donc, *la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation différentielle hypergéométrique soit réductible est qu'une des quatre grandeurs*

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma-\alpha, \quad \gamma-\beta$$

soit un entier négatif.

19. Nous nous sommes borné jusqu'ici aux équations à coefficients rationnels. On peut définir, d'une manière plus générale, *un domaine de rationalité*. Dans la première édition de cet Ouvrage, comme dans mes travaux sur ce sujet, je m'étais placé au point de vue suivant.

Soit un certain nombre de fonctions

$$a_1(x), \quad a_2(x), \quad \ldots, \quad a_p(x),$$

telles qu'aucune d'elles ne puisse s'exprimer par une fonction rationnelle de x, des autres fonctions et de leurs dérivées; nous considérons, comme faisant partie d'un domaine de rationalité, l'ensemble des fonctions rationnelles de x, des $a(x)$ et de leurs dérivées. Dans ces conditions, la définition de la réductibilité se posera comme plus haut et, ici encore, l'on pourra se placer à deux points de vue, suivant que l'on demandera ou non que l'équation ait une intégrale commune avec une équation d'ordre moindre, *linéaire* ou *non linéaire*, les coefficients des dérivées étant d'ailleurs dans les deux cas, pour les équations différentielles considérées, des fonctions de x appartenant au domaine de rationalité. Il est clair que nous ne pouvons songer, sans particulariser les fonctions $a(x)$, à résoudre le problème traité dans les paragraphes précédents pour le cas où le domaine de rationalité se réduisait aux fonctions rationnelles de x. Une étude spéciale sera à faire dans chaque cas.

M. Lœwy et M. Landau ont généralisé le point de vue un peu étroit auquel nous venons de nous placer. Pour eux, le champ de rationalité Σ (Rationalitätsbereich) comprend toutes les constantes réelles ou imaginaires (ce qui était sous-entendu ci-dessus); il est ensuite formé de fonctions analytiques dans un certain domaine du plan de la variable x; de plus, si f et g appartiennent à Σ, il en est de même de

$$f+g, \quad f-g, \quad fg, \quad \frac{f}{g}, \quad f' \quad \text{et} \quad g',$$

en désignant par f' la dérivée de f. Cette nouvelle définition n'amènera aucune modification dans la théorie qui va être développée.

IV. — Groupe de transformations d'une équation différentielle linéaire.

20. Nous allons voir maintenant comment on peut étendre aux équations différentielles linéaires le théorème fondamental de Galois, relatif aux équations algébriques, que nous avons exposé dans la Section III du Chapitre précédent ([1]).

Prenons d'abord, pour plus de simplicité, le cas d'une équation linéaire à coefficients rationnels

$$(10) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m y = 0,$$

et désignons par $y_1, y_2, \ldots, y_m$ un système fondamental d'intégrales. Soit l'expression

$$V = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_m y_m,$$

où les u sont des fonctions rationnelles arbitrairement choisies de x. Cette fonction satisfait à une équation linéaire d'ordre m^2 à coefficients rationnels, équation qui se forme immédiatement en exprimant

$$V, \quad \frac{dV}{dx}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{m^2} V}{dx^{m^2}}$$

([1]) J'ai montré pour la première fois comment on pouvait étendre aux équations différentielles linéaires la théorie de Galois dans une Note des *Comptes rendus* (*Sur les groupes de transformations des équations linéaires*; avril 1883). *Voir* aussi un Mémoire plus développé (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1887); je suis revenu sur cette question dans les *Comptes rendus* du 8 octobre 1894 et du 2 décembre 1895. Je ne change rien ici au texte publié dans la première édition de cet Ouvrage, et qui reproduisait mes *Leçons* de 1895, celles-ci n'ayant pas été publiées ailleurs et donnant le développement des Notes indiquées ci-dessus, où je m'efforçais de faire la transposition à ce nouveau domaine des idées de Galois.

Depuis cette époque, ces extensions devenues classiques ont été présentées de bien des manières. Je signalerai particulièrement le Mémoire récent de M. A. Lœwy, *Die rationalitäts Gruppe einer linearen homogenen Differentialgleichung* (*Math. Annalen*, Bd. LXV, 1908). Dans un ordre d'idées beaucoup plus étendu, l'extension des idées de Galois à la théorie générale des équations différentielles a fait l'objet d'un très important Mémoire de M. Drach (*Annales de l'École Normale*, 1898). Le théorème fondamental de M. Drach a été précisé et complété par M. Vessiot dans des travaux définitifs sur ce sujet (*Annales de l'École Normale*, 1903 et 1904, et *Acta mathematica*, 1904).

à l'aide des dérivées des y jusqu'à l'ordre $m-1$. Entre les m^2+1 équations ainsi obtenues, il suffira d'éliminer les y et leurs dérivées pour avoir l'équation cherchée, que nous désignerons par (E) :

$$(E) \qquad \frac{d^{m^2}V}{dx^{m^2}} + P_1 \frac{d^{m^2-1}V}{dx^{m^2-1}} + \ldots + P_{m^2}V = 0.$$

Cette équation a pour intégrales les fonctions

$$u_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Si les u sont pris arbitrairement, ces m^2 dernières fonctions sont bien linéairement indépendantes ([1]); il suffit, pour le faire voir, de prendre un cas particulier. Supposons que $x=0$ ne soit pas un point singulier de l'équation différentielle; nous prendrons

$$u_i = \alpha_i x^{(i-1)m},$$

les α étant des constantes arbitrairement choisies. S'il y avait une relation linéaire et homogène à coefficients constants entre les $u_i y_k$, nous aurions

$$\sum_{i=1}^{i=m} \alpha_i x^{(i-1)m}(\lambda_{i1}y_1 + \lambda_{i2}y_2 + \ldots + \lambda_{im}y_m) = 0,$$

les m^2 constantes λ n'étant pas toutes nulles. Or, en égalant à zéro dans ce développement les coefficients de

$$x^0, \quad x, \quad x^2, \quad \ldots, \quad x^{m-1},$$

nous obtenons m équations homogènes entre

$$\lambda_{11}, \quad \lambda_{12}, \quad \ldots, \quad \lambda_{1m}.$$

Leur déterminant est la valeur du déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \ldots & \frac{dy_m}{dx} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}} & \ldots & \frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}} \end{vmatrix}$$

([1]) J'avais regardé ce point comme évident; la démonstration si simple du texte a été donnée par M. Beke dans une Note des *Math. Annalen* (t. XLVI).

pour $x = 0$; or cette valeur est différente de zéro, puisque le système des y est un système fondamental et que l'origine n'est pas un point singulier de l'équation différentielle. On en conclut que

$$\lambda_{11} = \lambda_{12} = \ldots = \lambda_{1m} = 0.$$

En passant ensuite aux puissances $x^m, \ldots, x^{2m-1}$, on démontrera que

$$\lambda_{21} = \lambda_{22} = \ldots = \lambda_{2m} = 0$$

et, d'une manière générale, l'on arrive à la conclusion que tous les λ sont nuls, ce qui est absurde.

De ce que les $u_i y_k$ sont linéairement indépendants, on conclut qu'au moyen des expressions de

$$V, \quad \frac{dV}{dx}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{m^2-1}V}{dx^{m^2-1}}$$

en fonction linéaire des y et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$, on peut tirer, par la résolution d'équations du premier degré, les valeurs des y et de leurs dérivées en fonction de V et de ses dérivées ci-dessus; car, dans le cas contraire, on pourrait former pour V une équation linéaire d'ordre m^2-1 au plus, et entre les m^2 quantités

$$u_i y_k$$

existerait donc une relation homogène et linéaire à coefficients constants, contrairement à ce que nous avons établi.

Nous aurons donc en particulier, pour $y_1, y_2, \ldots, y_m$, des expressions

$$\begin{aligned}
y_1 &= \alpha_1 V + \alpha_2 \frac{dV}{dx} + \ldots + \alpha_{m^2} \frac{d^{m^2-1}V}{dx^{m^2-1}},\\
y_2 &= \beta_1 V + \beta_2 \frac{dV}{dx} + \ldots + \beta_{m^2} \frac{d^{m^2-1}V}{dx^{m^2-1}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
y_m &= \lambda_1 V + \lambda_2 \frac{dV}{dx} + \ldots + \lambda_{m^2} \frac{d^{m^2-1}V}{dx^{m^2-1}},
\end{aligned}$$

où les $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont rationnels en x.

A toute intégrale de l'équation (E) correspond un système d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de l'équation proposée (10); ce système pourra n'être pas fondamental. Cela arrivera si le déterminant des y et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$ est nul; en écrivant ceci, on

obtiendra une certaine équation en V

$$(\varphi) \qquad \varphi\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^kV}{dx^k}\right) = 0,$$

k étant au plus égal à $m^2 - 1$. On aura donc un système fondamental

$$y_1, \ y_2, \ \ldots, \ y_m,$$

si l'on prend pour V une intégrale de l'équation (E) *ne satisfaisant pas à l'équation* (φ).

Ceci posé, il arrivera, en général, c'est-à-dire si l'équation (10) est prise arbitrairement, que l'équation (E) n'aura aucune solution commune avec une équation différentielle (linéaire ou non linéaire) à coefficients rationnels, d'ordre inférieur à m^2, *si l'on fait abstraction des solutions qui satisfont à l'équation* φ.

Mais il pourra, dans certains cas, en être autrement; supposons donc que l'équation différentielle d'ordre p

$$(f) \qquad f\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^pV}{dx^p}\right) = 0$$

remplisse cette condition, f étant un polynome. Parmi toutes ces équations, considérons celles qui sont *d'ordre moindre*, et prenons l'une d'elles que nous continuerons à désigner par la lettre f. Nous pouvons supposer l'équation f algébriquement irréductible par rapport à $\frac{d^pV}{dx^p}$; il est clair alors que toute solution de f qui n'appartient pas à φ satisfait à E, car, dans le cas contraire, on pourrait déduire (par un procédé dont nous avons bien des fois fait usage), des équations (E) et (f), une équation d'ordre moindre, qui ne serait pas certainement une identité, et à laquelle satisferait la solution commune à (E) et à (f).

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_m$ le système fondamental correspondant à une certaine solution de l'équation f (solution n'appartenant pas à φ), et $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ le système correspondant à la solution générale de la même équation; on aura

$$(S) \qquad \begin{cases} Y_1 = a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 + \ldots + a_{1m}\,y_m, \\ Y_2 = a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + \ldots + a_{2m}\,y_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_m = a_{m1}\,y_1 + a_{m2}\,y_2 + \ldots + a_{mm}\,y_m. \end{cases}$$

Les coefficients a dépendent seulement de p paramètres arbitraires, et nous allons voir facilement qu'on peut les considérer comme des fonctions *algébriques* de p paramètres arbitraires. En effet, considérons l'intégrale générale de l'équation

$$f\left(x, \mathrm{V}, \frac{d\mathrm{V}}{dx}, \ldots, \frac{d^p\mathrm{V}}{dx^p}\right) = 0;$$

cette intégrale générale sera nécessairement de la forme

$$\mathrm{V} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{m^2} v_{m^2},$$

les v étant m^2 solutions linéairement indépendantes de l'équation E. En écrivant que cette expression de V satisfait à l'équation f, nous obtiendrons des relations nécessairement algébriques entre les constantes α, et, comme il doit rester p arbitraires, les α seront des fonctions algébriques de p constantes arbitraires. Donc dans

$$\mathrm{Y}_1, \quad \mathrm{Y}_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{Y}_m$$

figureront *algébriquement* p constantes, et, par suite, si $y_1, y_2, \ldots, y_m$ forment un système fondamental correspondant à une solution particulière de f, les coefficients de la substitution, désignés plus haut par a, *dépendront d'une manière algébrique de p paramètres arbitraires* que nous appellerons les paramètres λ. Les relations algébriques ainsi obtenues entre les a expriment que, si les y correspondent à une solution arbitraire de f, les Y déduits de (S) correspondront aussi à une solution de f. Dans ces conditions, il est évident que si l'on considère deux substitutions, telles que (S), correspondant à deux systèmes distincts de valeurs des paramètres λ, le produit de ces deux substitutions sera une substitution de même forme, les paramètres λ étant représentés par un troisième système de valeurs. *Les substitutions* (S) *forment donc un groupe continu de transformations;* nous désignerons par G ce groupe continu et algébrique de transformations linéaires, et nous l'appellerons *le groupe de transformations* (¹) relatif à l'équation linéaire. Dans les deux paragraphes

(¹) Comme cas très particulier, il peut arriver que l'équation f soit d'ordre zéro, c'est-à-dire que V soit une fonction algébrique de x; l'intégrale générale de l'équation linéaire sera algébrique, et le groupe de transformations est alors un groupe *fini* qui ne dépend d'aucun arbitraire.

suivants nous représenterons par $y_1, y_2, \ldots, y_m$ un système fondamental correspondant à une solution de f.

Faisons encore la remarque très importante, dont la démonstration est immédiate, que *l'intégrale générale de l'équation* (f) *peut s'exprimer linéairement en fonction d'une intégrale particulière et de ses dérivées,* les coefficients de cette expression linéaire étant des fonctions rationnelles de x dépendant de p constantes arbitraires.

21. On peut établir, à l'égard de ce groupe, la proposition suivante, qui rappelle le théorème fondamental de Galois dans la théorie des équations algébriques :

Toute fonction rationnelle de x, de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ et de leurs dérivées, s'exprimant rationnellement en fonction de x, reste invariable quand on effectue sur $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les substitutions du groupe G.

En parlant d'une fonction des y restant invariable, nous entendons que cette fonction reste la même fonction de la variable x. Cette invariabilité est donc l'analogue de l'invariabilité *numérique* de la théorie des équations.

Considérons une fonction des y et de leurs dérivées jouissant de la propriété indiquée dans l'énoncé ; en y remplaçant $y_1, y_2, \ldots, y_m$ par leurs valeurs en fonction d'une intégrale V de f, qui n'appartienne pas à φ, et désignant par $R(x)$ la fraction rationnelle de x à laquelle est égale, par hypothèse, notre fonction, on aura l'équation

$$F\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^pV}{dx^p}\right) = R(x), \tag{11}$$

F étant rationnelle. Cette équation se trouvera donc vérifiée pour *une* certaine solution V de f n'appartenant pas à φ. Elle le sera par suite pour *toutes* les solutions de f qui n'appartiennent pas à φ ; en effet, dans le cas contraire on pourrait, de l'équation (11) et de l'équation

$$f\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^pV}{dx^p}\right) = 0,$$

que nous supposons de degré μ par rapport à $\frac{d^pV}{dx^p}$ et algébriquement

irréductible par rapport à cette dérivée, tirer une seconde équation

$$\chi\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^pV}{dx^p}\right) = 0$$

de degré μ au plus, par rapport à $\frac{d^pV}{dx^p}$. La fonction V satisfait à ces deux équations ; si l'équation χ n'est pas une conséquence de l'équation f, on pourra obtenir une équation différentielle algébrique d'ordre moindre que p à laquelle satisfera V, ce qui est contre nos hypothèses sur f. Il faut donc que χ soit une conséquence de f, c'est-à-dire que toute solution de f, ne satisfaisant pas à φ, vérifie la relation (11). Du moment, d'ailleurs, que la solution *générale* de f vérifie (11), il en sera certainement ainsi pour toute solution particulière, et notamment pour celles qui satisfont à φ, s'il en existe. La restriction ne se trouve donc utile que pour le raisonnement.

Dire que la fonction F garde la même valeur $R(x)$ pour toute solution de f revient à énoncer que la fonction rationnelle considérée de x, des y et de leurs dérivées ne change pas quand on effectue sur $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les substitutions du groupe G, et le théorème est alors démontré.

22. A ce théorème on doit joindre une réciproque :

Toute fonction rationnelle de x et d'un système fondamental $y_1, y_2, \ldots, y_m$ et de leurs dérivées, qui reste invariable par les substitutions du groupe G, *est une fonction rationnelle de x.*

Soit $\Phi\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right)$ une fonction satisfaisant aux conditions de l'énoncé ; il faut montrer que, si l'on met à la place de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ un certain système fondamental, la fonction Φ sera une fonction rationnelle de x. Or, remplaçons les y et leurs dérivées par leurs valeurs en fonction de V ; nous aurons

$$\Phi = F\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^pV}{dx^p}\right).$$

Je dis que, si l'on prend pour V une intégrale de f n'appartenant pas à φ, cette expression sera une fonction rationnelle de x. Remarquons d'abord que, d'après l'hypothèse faite sur Φ, la fonction $F(x, V, \ldots)$ représentera la même fonction de x, quelle que soit la

solution V de l'équation f n'appartenant pas à φ, et, par suite, pour l'intégrale générale V de f. Or, soit encore μ le degré de f par rapport à $\frac{d^p V}{dx^p}$; pour des valeurs *arbitraires* données à

$$x, \quad V, \quad \frac{dV}{dx}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{p-1}V}{dx^{p-1}},$$

l'équation $f = 0$ a μ racines distinctes en $\frac{d^p V}{dx^p}$. En se servant de l'équation f, on peut supposer que dans F la dérivée $\frac{d^p V}{dx^p}$ ne figure qu'au degré $\mu - 1$ au plus. Cette substitution faite, F devient une fonction

$$F_1\left(x, V, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}\right),$$

rationnelle par rapport aux lettres dont elle dépend et contenant $\frac{d^p V}{dx^p}$ à la puissance $\mu - 1$ au plus dans son numérateur et son dénominateur. Comme, pour une valeur donnée d'ailleurs quelconque de x, la fonction F_1 prend la même valeur pour toutes les valeurs des constantes arbitraires figurant dans l'intégrale générale de l'équation f, il s'ensuit que, dans les mêmes conditions, la fonction F_1 prend la même valeur pour toutes les valeurs de $V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}$ satisfaisant à la relation

$$f\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}\right) = 0,$$

de degré μ et algébriquement irréductible par rapport à $\frac{d^p V}{dx^p}$; il faut donc que F_1 ne dépende que de x. *La fonction Φ est donc une fonction rationnelle de x,* comme nous voulions l'établir.

23. Les deux théorèmes précédents sont entièrement analogues aux théorèmes fondamentaux de Galois étudiés dans la Section III du Chapitre précédent. On voit que *les groupes de substitutions linéaires et algébriques remplacent dans cette théorie les groupes de substitutions entre n lettres.*

Pour une équation linéaire arbitrairement donnée, l'équation E correspondante n'aura aucune solution commune avec une équation algébrique d'ordre inférieur à m^2, cette solution n'appartenant pas

à l'équation φ. L'équation désignée par f se réduit alors à l'équation E elle-même; le groupe de transformations de l'équation différentielle est alors l'ensemble des substitutions linéaires effectuées sur y_1, $y_2, \ldots, y_m$, c'est un groupe à m^2 paramètres.

Quand le groupe G est un groupe à moins de m^2 paramètres, l'équation est une équation particulière : *elle est caractérisée par ce fait qu'il existe au moins une fonction rationnelle de x, de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ et de leurs dérivées, égale à une fonction rationnelle de x*, cette relation n'ayant pas lieu quel que soit le système fondamental $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Substituons, en effet, dans

$$f\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^pV}{dx^p}\right),$$

à la place de V, l'expression $u_1y_1 + u_2y_2 + \ldots + u_my_m$; nous obtiendrons une fonction rationnelle des y et de leurs dérivées qui ne sera pas identiquement nulle, quels que soient les éléments du système fondamental $y_1, y_2, \ldots, y_m$, et qui, pour certains systèmes fondamentaux, se réduira à zéro et pourra donc être regardée comme une fonction rationnelle de x.

Inversement, supposons qu'entre les éléments d'un certain système fondamental $y_1, y_2, \ldots, y_m$ on ait la relation

$$\chi\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right) = 0$$

qui ne soit pas vérifiée pour un système fondamental quelconque.

En remplaçant les y par leurs valeurs en V, V étant une intégrale de E ne satisfaisant pas à φ, on aura

$$\psi\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^kV}{dx^k}\right) = 0,$$

k étant au plus égal à $m^2 - 1$. Cette relation ne se réduira pas à une identité, car alors la relation χ serait vérifiée quand on fait sur les y une substitution quelconque. On a donc une équation d'ordre moindre que m^2 à laquelle satisfait une solution V de E, n'appartenant pas à φ, et, par suite, *le groupe de l'équation n'est pas le groupe général à m^2 paramètres*. Ces remarques sont entièrement analogues à celles que nous avons faites pour les équations algébriques (Chapitre précédent, § 17).

24. Nous avons donné au groupe que nous venons de trouver le nom de *groupe de transformations,* pour le distinguer du groupe que l'on désigne sous le nom de *groupe de l'équation linéaire* (page 307) et qui est relatif aux substitutions qui correspondent aux différents chemins suivis par la variable. Ce dernier groupe n'est pas un groupe *continu,* je veux dire qu'il ne dépend pas de paramètres arbitraires. Faisons la remarque très simple, mais qui n'est pas sans intérêt, que *le groupe de l'équation est contenu parmi les substitutions du groupe de transformations.* Ceci résulte immédiatement de ce que ce dernier groupe correspond à la substitution d'une intégrale quelconque de l'équation f à une autre également quelconque. Si, en particulier, ces deux intégrales sont deux déterminations différentes d'une même intégrale correspondant à des chemins différents, on aura une substitution du groupe de l'équation, et elle sera bien contenue dans le groupe de transformations.

25. Nous avons dit que, parmi les équations f d'ordre moindre p, on prendrait l'une d'elles ; mais on doit nécessairement se demander quelle conséquence entraînerait, pour le *groupe de transformations* de l'équation différentielle, la substitution d'une équation f à une autre équation, que nous désignerons par f_1. Cherchons les relations qui peuvent exister entre les intégrales de ces deux équations d'ordre p

$$f(V) = 0, \qquad f_1(V_1) = 0.$$

Puisque V_1 est une fonction linéaire des y, et que celles-ci s'expriment aussi linéairement à l'aide des V et de leurs dérivées, nous aurons pour V_1 une expression linéaire par rapport à V et ses dérivées. Si donc nous considérons deux intégrales *déterminées* v et v_1 de ces équations, n'appartenant pas à φ, on aura

$$v_1 = \alpha v + \beta \frac{dv}{dx} + \ldots,$$

α et β étant des fonctions rationnelles de x. Or, considérons d'autre part l'expression

$$\text{(T)} \qquad W = \alpha V + \beta \frac{dV}{dx} + \ldots,$$

V étant l'intégrale générale de f; elle satisfera à une équation

d'ordre p

$$f_2(\mathrm{W}) = 0.$$

Les deux équations f_1 et f_2 ont une intégrale commune, n'appartenant pas à φ, à savoir v_1. Il faudra donc que l'équation $f_2(\mathrm{W})$ coïncide avec l'équation $f_1(\mathrm{V}_1) = 0$, puisque autrement v_1 satisferait à une équation différentielle algébrique d'ordre moindre que p.

On voit donc la dépendance qui existe entre les deux équations f et f_1 ; l'une est simplement la transformée de l'autre. D'autre part, transformer l'équation f au moyen de la substitution (T) considérée ci-dessus, c'est substituer seulement un système fondamental d'intégrales à un autre, et, par suite, le groupe de transformations que nous aurait donné l'équation f_1 *est le transformé de celui que nous a donné l'équation f au moyen d'une substitution linéaire convenable effectuée sur les y*. Les deux groupes doivent être regardés comme identiques.

26. Nous avons examiné uniquement jusqu'ici le cas d'une équation à coefficients rationnels. Nous pouvons supposer que *les coefficients de l'équation différentielle appartiennent à un domaine de rationalité plus étendu*. On peut supposer, comme nous l'avons fait dans l'étude de la réductibilité (Section III), que l'on a un certain nombre de fonctions

$$a_1(x), \quad a_2(x), \quad \ldots, \quad a_p(x)$$

telles qu'aucune d'elles ne puisse s'exprimer par une fonction rationnelle de x, des autres fonctions et de leurs dérivées jusqu'à un ordre quelconque. On considère, comme faisant partie du domaine de rationalité, l'ensemble des fonctions rationnelles de x, des $a(x)$ et de leurs dérivées. Les diverses équations différentielles que l'on aura alors à considérer devront être des équations différentielles algébriques dont les coefficients seront fonctions rationnelles de x, des $a(x)$ et de leurs dérivées. Telle sera en particulier, quand elle existera, l'équation $f(\mathrm{V}) = 0$, qui joue dans la théorie précédente le rôle essentiel ; *au domaine donné de rationalité correspondra un groupe de transformations pour l'équation linéaire*.

27. Nous devons immédiatement faire une remarque qui accuse, malgré bien des analogies, une différence importante au point de vue

des applications entre la théorie que nous venons de développer et la théorie de Galois sur les équations algébriques. Dans cette dernière, la résolvante irréductible pouvait être trouvée par des calculs toujours effectuables, une fois donné le domaine de rationalité. Il en est tout autrement dans la théorie actuelle : nous *concevons* seulement l'existence de cette équation différentielle f, de telle sorte que le groupe de transformations, pour une équation donnée, ne peut pas être obtenu par des opérations susceptibles d'être régulièrement effectuées. Il en résulte qu'en général on devra, au point de vue pratique, commencer par chercher tous les types de groupes algébriques de transformations linéaires et homogènes pour un nombre de variables égal à l'ordre de l'équation différentielle ; d'après ce que nous avons dit plus haut sur les groupes en général, on se rend compte que l'on possède des principes sûrs pour effectuer cette recherche, si pénibles et longs que doivent être les calculs à faire. Il reste alors à reconnaître si un groupe déterminé est le groupe de transformations de l'équation différentielle.

Soit G un tel groupe ; d'après ce que nous avons vu (§ 11), nous pouvons former une fonction rationnelle

$$R\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right)$$

restant invariable quand on effectue sur les y les substitutions du groupe G, mais qui n'est pas un invariant pour un groupe d'un plus grand nombre de paramètres. Nous avons vu, d'autre part (§ 13), que cette fonction satisfaisait à une équation différentielle algébrique E d'ordre $n^2 - \rho$, en désignant par ρ le nombre de paramètres du groupe G, les coefficients de cette équation étant des fonctions symétriques des y. A l'endroit cité, les y étaient des fonctions arbitraires ; ici ce sont des intégrales de l'équation linéaire donnée ; mais, si l'on prend *au hasard* une fonction R jouissant de la propriété d'invariance indiquée, on peut encore affirmer qu'elle ne sera pas invariante pour un groupe d'un plus grand nombre de paramètres, les y formant un système fondamental de l'équation linéaire. Ceci dit, supposons que l'équation donnée soit à coefficients rationnels ; ayant pris le groupe G et la fonction correspondante R, nous formons l'équation E, qui est aussi à coefficients rationnels. Si G est le groupe de transformations de l'équation linéaire donnée, la fonction ration-

nelle R, qui reste invariable par les substitutions de G, devra être une fonction rationnelle de x, pour un système convenable d'intégrales fondamentales, à savoir pour celles qui correspondent à l'équation f en V de notre théorie générale. Il résulte alors du second théorème fondamental que *l'équation* E *admettra une intégrale rationnelle*. Nous sommes donc conduit à rechercher si une équation différentielle algébrique admet pour solution une fonction rationnelle; c'est un problème que l'on ne sait pas actuellement résoudre dans toute sa généralité, mais, dans bien des cas, la méthode des coefficients indéterminés permet, avec des considérations spéciales à la forme de l'équation, de trouver la solution (¹).

Quoi qu'il en soit, en se plaçant à ce point de vue, on commencera les essais en prenant d'abord les groupes algébriques à un paramètre (²); puis, s'il n'existe pas d'intégrales rationnelles pour les équations E correspondantes, on passera aux groupes ayant, après les groupes à un paramètre, le moindre nombre de paramètres, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive, pour un certain groupe G à r paramètres, à une équation E ayant une solution rationnelle, tandis que pour tous les groupes à un moindre nombre de paramètres cette condition ne s'était pas trouvée réalisée. Le groupe Γ de l'équation dépendra de r paramètres, car, s'il dépendait de moins de r paramètres, nous aurions trouvé dans les essais précédents une équation E à intégrales rationnelles; d'autre part, il ne peut dépendre de plus de r paramètres, car dans le cas contraire une fonction rationnelle des y, invariante pour les substitutions de G et prise au hasard, n'étant pas invariante pour les substitutions du groupe Γ qui aurait plus de r paramètres, ne pourrait s'exprimer rationnellement. Il résulte de là, ou bien que Γ coïncide avec le groupe G, ou bien que Γ est un groupe *complexe* à r paramètres contenant le groupe G. En

(¹) En dehors des équations linéaires, nous citerons l'équation aux dérivées logarithmiques des intégrales d'une équation linéaire, qui a été étudiée à ce point de vue par Liouville. Dans son Mémoire couronné, *Sur les équations différentielles du premier ordre* (*Annales de l'École Normale*, 1892), M. Painlevé a montré comment on pouvait résoudre le problème proposé pour toutes les équations du premier ordre et du premier degré.

(²) Nous ne nous occupons pas du cas où le groupe de transformations ne serait pas un groupe continu, c'est-à-dire un groupe dépendant d'un ou de plusieurs paramètres arbitraires. Dans ce cas, l'équation aurait son intégrale générale algébrique, comme nous l'avons déjà dit dans une note du § 20.

étudiant de la même manière chacun des types de groupes à r paramètres, on déterminera ainsi le groupe Γ, qui pourra être un groupe non complexe ou un groupe complexe formé de plusieurs groupes G à r paramètres.

La méthode que nous venons de suivre dans ce paragraphe, pour obtenir le groupe d'une équation linéaire, est, à très peu près, celle qu'a suivie M. Vessiot dans sa Thèse, déjà citée, sur les équations linéaires. Le savant géomètre se sert même de ces considérations pour arriver à la notion de groupe; mais cette marche très naturelle et très intéressante pour obtenir le groupe, quand on a acquis cette notion, laisse subsister des difficultés sérieuses pour arriver aux deux théorèmes fondamentaux. Aussi me paraît-il préférable, pour poser les bases de cette théorie, de suivre la voie que j'avais antérieurement indiquée et qui présente une analogie si complète avec la marche suivie par Galois dans la théorie des équations algébriques.

Remarquons, en terminant, qu'il ne faut pas s'exagérer l'importance des difficultés pratiques relatives à la recherche du groupe de transformations d'une équation linéaire. Il en est ici comme en Algèbre; les théories de cette nature ont surtout pour objet *d'établir des classifications* et d'indiquer des types pour les différentes circonstances qui peuvent se présenter. Il arrivera généralement, dans les applications, que les considérations qui ont conduit à une équation donneront des renseignements sur son groupe; c'est ce qui arrive, par exemple, quand on étudie, au point de vue algébrique, les équations modulaires de la théorie des fonctions elliptiques.

V. — Étude de quelques cas particuliers.

28. Arrêtons-nous sur quelques exemples, et commençons par l'étude des équations différentielles linéaires du *second ordre* à coefficients rationnels. Le groupe d'une équation arbitraire est le groupe linéaire et homogène d'ordre quatre. Les cas particuliers correspondront aux groupes à *un, deux* ou *trois* paramètres, sans parler du cas où l'intégrale générale de l'équation serait algébrique, et que nous laisserons de côté.

Considérons d'abord un groupe linéaire à un paramètre; supposons d'abord que les deux racines de l'équation caractéristique

correspondant à la substitution infinitésimale sont distinctes : dans ces conditions, en effectuant une combinaison linéaire convenable, les équations définissant le groupe sont

$$\frac{dy_1}{dt} = ay_1,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = by_2,$$

et l'on a alors le groupe défini par les deux équations

$$Y_1 = y_1 e^{at},$$
$$Y_2 = y_2 e^{bt}.$$

Il sera algébrique si $\frac{a}{b}$ est commensurable, et l'on a, par suite, le groupe

$$Y_1 = y_1 . \theta^m,$$
$$Y_2 = y_2 . \theta^n,$$

m et n étant des entiers. Si une équation linéaire du second ordre, à coefficients rationnels, admet ce groupe comme groupe de transformations, on aura évidemment comme invariants du groupe

$$\frac{\frac{dy_1}{dx}}{y_1}, \quad \frac{\frac{dy_2}{dx}}{y_2}, \quad \frac{y_2^m}{y_1^n}.$$

Il existera donc un système fondamental (y_1, y_2) pour lequel ces trois expressions seront des fonctions rationnelles de x. Il en résulte, en particulier, que l'équation de Riccati, admettant une intégrale $\frac{y'}{y}$, admet *deux* intégrales rationnelles; ces intégrales étant obtenues, ce qu'on peut toujours faire quand elles existent, on aura y_1 et y_2 par des quadratures, et il n'y aura même en fait qu'une seule quadrature distincte, puisque la troisième des expressions ci-dessus doit être rationnelle.

Dans le cas particulier, où nous ne pourrions avoir la forme réduite qui précède, nous aurions, conformément à la théorie de la réduction des expressions linéaires, les deux équations suivantes, pour définir le groupe,

$$\frac{dy_1}{dt} = ay_1,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1 + ay_2,$$

et l'intégration de ces équations nous conduit au groupe

$$Y_1 = y_1 e^{at},$$
$$Y_2 = y_1 t e^{at} + y_2 e^{at}.$$

Si a n'est pas nul, ce groupe ne sera pas algébrique; le seul cas qui nous intéresse est donc celui de $a = 0$, qui donne le groupe

$$Y_1 = y_1,$$
$$Y_2 = y_1 t + y_2.$$

Puisque y_1 est une fonction invariante, y_1 est une intégrale rationnelle. Un second invariant sera fourni par

$$y_2 \frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dy_2}{dx}.$$

Cette expression sera donc une fonction rationnelle, et l'on obtiendra par suite y_2 à l'aide d'une seule quadrature portant sur une fonction rationnelle. Telles sont les circonstances extrêmement simples qui se présentent quand le groupe de l'équation est à *un* paramètre.

29. Passons au cas d'une équation linéaire du second ordre dont le groupe serait à *deux* paramètres. Il faut commencer par énumérer les types de groupes linéaires et homogènes à deux paramètres. Nous avons deux substitutions infinitésimales, réduisons l'une d'elles à sa forme canonique; si aucune circonstance particulière ne se présente dans cette réduction, nous pouvons prendre, en nous reportant aux notations du § 7,

$$A_1(f) = a y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + b y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} \qquad (a \neq b),$$

qui représente la première transformation infinitésimale, la seconde étant

$$A_2(f) = (\alpha y_1 + \beta y_2) \frac{\partial f}{\partial y_1} + (\gamma y_1 + \delta y_2) \frac{\partial f}{\partial y_2}.$$

Mais nous devons écrire que le crochet

$$(A_1 A_2)$$

est une combinaison linéaire $\lambda A_1(f) + \mu A_2(f)$. En calculant ce cro-

chet, on trouve de suite

$$(b-a)\beta y_2 \frac{\partial f}{\partial y_1} + (a-b)\gamma y_1 \frac{\partial f}{\partial y_2}.$$

On doit donc avoir identiquement

$$(b-a)\beta y_2 = \lambda a y_1 + \mu(\alpha y_1 + \beta y_2),$$
$$(a-b)\gamma y_1 = \lambda b y_2 + \mu(\gamma y_1 + \delta y_2),$$

λ et μ désignant des constantes. Ces équations donnent

$$\lambda a + \mu\alpha = 0, \qquad (b-a)\beta = \mu\beta,$$
$$(a-b)\gamma = \mu\gamma, \qquad \lambda b + \mu\delta = 0.$$

Puisque $a - b \neq 0$, il faut que β ou que γ soit nul; mais ces deux hypothèses rentrent évidemment dans le même type, en permutant entre elles les lettres y_1 et y_2; faisons donc $\beta = 0$, et nous aurons les deux expressions

$$A_1(f) = a y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + b y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2},$$
$$A_2(f) = \alpha y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + (\gamma y_1 + \delta y_2) \frac{\partial f}{\partial y_2},$$

qui définiront un groupe à deux paramètres si l'on a la relation, résultant immédiatement des équations ci-dessus,

$$a\delta - b\alpha = 0,$$

et nous poserons

$$\frac{b}{a} = \frac{\delta}{\alpha} = s.$$

Pour obtenir le groupe, il faut, conformément à la théorie générale indiquée dans la première Section de ce Chapitre, considérer les deux équations

$$\frac{dy_1}{dt} = (\lambda_1 a + \lambda_2 \alpha) y_1,$$
$$\frac{dy_2}{dt} = \lambda_1 b y_2 + \lambda_2(\gamma y_1 + \delta y_2),$$

et les intégrer en choisissant les constantes de manière que, pour $t = 0$, on ait $y_1 = y_1^0$, $y_2 = y_2^0$. On trouve ainsi le groupe à deux paramètres entre (y_1, y_2) et (y_1^0, y_2^0), les deux paramètres étant $\lambda_1 t$

et $\lambda_2 t$. On obtient ainsi, en changeant seulement de paramètres, le groupe

$$Y_1 = \sigma_1 y_1,$$
$$Y_2 = \sigma_2 y_1 + \sigma_1^s y_2,$$

σ_1 et σ_2 étant les deux paramètres du groupe qui sera algébrique si s est rationnel. On voit que

$$\frac{\frac{dy_1}{dx}}{y_1}$$

sera un invariant du groupe, et par suite, si une équation linéaire du second ordre admet le groupe précédent comme groupe de transformations, l'équation de Riccati donnant

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y}$$

aura une intégrale rationnelle. Mais on peut trouver autrement y_1, car, en éliminant σ_1 et σ_2 entre les équations du groupe et les équations dérivées, on trouve un autre invariant

$$\frac{y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx}}{y_1^{s+1}}.$$

Pour le mettre sous forme entière, posons $s = \frac{p}{q}$; nous aurons alors l'invariant

$$\frac{\left(y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx}\right)^q}{y_1^{p+q}}.$$

Cette expression devra être une fonction rationnelle, et, par suite, le numérateur étant connu par une quadrature, on obtiendra y_1 par une extraction de racine.

Nous nous sommes placé, pour obtenir les équations du groupe, dans le cas général où, pour l'une au moins des deux substitutions infinitésimales, les deux racines de l'équation caractéristique correspondante étaient distinctes. Il n'y a aucune difficulté à examiner tous les cas particuliers possibles; nous laissons au lecteur le soin de faire cette discussion et de montrer que, *dans tous les cas, l'équation*

s'intégrera par quadratures, quand son groupe de transformations est à deux paramètres.

30. Si nous voulions maintenant passer aux groupes à trois paramètres, nous aurions à faire une assez longue énumération. Je ne m'y arrêterai pas, et je remarquerai seulement que l'on ne doit pas s'attendre à ce que le fait d'avoir un groupe de transformations à *trois* paramètres diminue toujours la difficulté de l'intégration d'une équation du second ordre. Il suffit, en effet, pour s'en rendre compte, de prendre l'équation linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_2(x)y = 0,$$

où $p_2(x)$ est une fonction rationnelle arbitraire de x. On voit de suite que le groupe de transformations de cette équation est un groupe à trois paramètres; on a, en effet,

$$y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx} = \text{const.}$$

Le groupe de transformations sera donc le groupe à trois paramètres

$$Y_1 = ay_1 + by_2,$$
$$Y_2 = cy_1 + dy_2,$$

avec la relation

$$ad - bc = 1,$$

et nous n'avons pas ici, comme dans les cas précédents, une équation intégrable par quadratures.

31. Pour faire une application d'une autre nature, considérons une équation linéaire du troisième ordre

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^3y}{dx^3} + p_1\frac{d^2y}{dx^2} + p_2\frac{dy}{dx} + p_3y = 0$$

à coefficients rationnels, dont tous les points singuliers sont réguliers, et supposons qu'entre trois solutions y_1, y_2, y_3 formant un système fondamental, il existe une relation algébrique

$$F(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

homogène et d'un degré nécessairement supérieur à l'unité ([1]), la courbe algébrique représentée par l'équation précédente en coordonnées homogènes étant irréductible. Envisageons le groupe G de l'équation (E). On peut évidemment supposer que le système fondamental y_1, y_2, y_3 correspond à une solution de l'équation en V désignée par f dans la théorie générale de la Section précédente. Ceci posé, la fonction

$$F(y_1, y_2, y_3)$$

ayant la valeur zéro est exprimable rationnellement, et, par suite, elle reste invariable par les substitutions du groupe G.

En désignant par Y_1, Y_2, Y_3 les expressions linéaires en y_1, y_2, y_3 correspondant au groupe de transformations de l'équation, on aura

$$F(Y_1, Y_2, Y_3) = 0,$$

puisque

$$F(y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Ces deux relations entre y_1, y_2, y_3 ne peuvent être distinctes, puisqu'il ne peut manifestement exister deux relations homogènes distinctes entre les intégrales d'un système fondamental d'une équation du troisième ordre. La substitution faite correspond donc à une transformation de la courbe en elle-même.

Or, supposons d'abord que *la courbe* F *soit de genre supérieur à un;* elle ne pourra alors être transformée en elle-même que pour un nombre fini de transformations birationnelles (t. II, p. 436). Si donc on pose

$$\frac{y_2}{y_1} = u, \quad \frac{y_3}{y_1} = v,$$

l'équation de la courbe devenant

$$F(1, u, v) = 0,$$

il résulte du théorème rappelé que les substitutions de G conduisent, pour u et v, à un groupe fini de substitutions linéaires fractionnaires.

([1]) Ce problème a été étudié par M. Fuchs dans un Mémoire inséré au Tome I des *Acta mathematica* (*Ueber lineare homogene Differentialgleichungen, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen*). M. Fuchs ne se place pas au point de vue de la théorie des groupes de transformations des équations linéaires, qui n'était pas encore créée; on va voir combien celle-ci se présente naturellement dans cette question.

Or, le *groupe* de l'équation linéaire étant contenu dans *son groupe de transformations* (§ 24), le groupe des substitutions linéaires fractionnaires relatives aux diverses déterminations de u et v sera contenu dans le groupe G' des transformations linéaires fractionnaires, relatives à u et v, qui se déduisent du groupe de transformations de l'équation. D'après ce que nous venons de dire, le groupe G' ne contient qu'un nombre fini de substitutions; donc u et v n'ont qu'un nombre limité de déterminations. Nous arrivons donc d'abord à la conclusion que les deux quotients

$$\frac{y_2}{y_1} \quad \text{et} \quad \frac{y_3}{y_1}$$

sont des fonctions algébriques de x, que nous désignerons par u et v. Or on a

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \frac{dy_3}{dx} \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} & \frac{d^2y_2}{dx^2} & \frac{d^2y_3}{dx^2} \end{vmatrix} = e^{-\int p_1 dx}.$$

On en conclut, en remplaçant y_2 et y_3 par uy_1 et vy_1,

$$(\lambda) \qquad y_1^3\left(\frac{du}{dx}\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{dv}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}\right) = e^{-\int p_1 dx},$$

et, par conséquent, y_1 s'exprime par une quadrature et il en est de même pour y_2 et y_3. Si les racines des équations fondamentales déterminantes pour tous les points singuliers de E sont *commensurables*, l'exponentielle qui figure dans le second membre sera nécessairement une fonction algébrique, et l'intégrale générale de l'équation sera alors algébrique. Ainsi l'étude de la nature des intégrales de l'équation (E) est très facile quand le genre de la relation F est supérieur à l'unité.

Nous sommes dans des circonstances moins simples si le genre de la relation F ne dépasse pas l'unité. La courbe $F(1, u, v) = 0$ doit être alors une courbe qui se transforme en elle-même pour un groupe de transformations *projectives*. Or MM. Klein et Lie ont déterminé toutes ces courbes (*Comptes rendus*, 1870) et voici le résultat auquel ils sont parvenus; ces courbes, pour un choix convenable de

coordonnées, se ramènent à une des formes

$$x - y^{\alpha} = 0, \qquad x = e^{y}, \qquad Ax^2 + By = 0.$$

Sans entrer dans le détail de cette recherche, il ne sera pas long d'en indiquer le principe. Le groupe projectif qui, par hypothèse, transforme la courbe en elle-même admettra au moins un sous-groupe à un paramètre ; soient

$$\frac{dx}{dt} = \xi(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = \eta(x, y)$$

les équations définissant ce groupe Γ à un paramètre. Supposons que

$$f(x, y) = 0$$

soit l'équation d'une courbe que Γ transforme en elle-même. On aura nécessairement alors, pour tout point de la courbe,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta = 0,$$

et, comme

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0,$$

il en résulte que la courbe satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta}.$$

La courbe cherchée sera donc une courbe intégrale de cette équation différentielle. On conçoit alors comment, après avoir fait la recherche de tous les groupes projectifs, on peut, par l'intégration d'une équation différentielle, arriver aux courbes cherchées. MM. Klein et Lie démontrent de plus que, pour les deux premiers types, en supposant que le premier ne se réduise pas à l'équation d'une conique, il n'y aura pas d'autre groupe projectif transformant la courbe en elle-même que le groupe à un paramètre

$$X = ax, \qquad Y = by \qquad (a = b^{\alpha})$$

pour la première, et, pour la seconde, le groupe

$$X = ax, \quad Y = y + b \qquad (a = e^{b}).$$

Revenons maintenant à notre problème. En laissant d'abord de

côté le cas de la conique, nous aurons pour relation entre u et v le seul type

$$u^m = v^n,$$

m et n étant des entiers, puisque le second type est transcendant. Donc, pour l'équation linéaire E, en excluant les cas déjà étudiés et celui où la relation entre y_1, y_2, y_3 serait du second degré, on peut admettre que cette relation a la forme

$$u^m = v^n,$$

en posant toujours $u = \frac{y_2}{y_1}$, $v = \frac{y_3}{y_1}$. Le groupe relatif aux transformations de u et v, déduit du groupe de transformations de l'équation E, sera nécessairement, s'il dépend d'un paramètre arbitraire, le groupe

$$U = au, \qquad V = bv \qquad (a^m = b^n).$$

On voit que l'expression

$$\frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

est une fonction rationnelle de y_1, y_2, y_3 restant invariable par les substitutions du groupe de l'équation, et, par suite, u s'obtiendra par une quadrature et v s'en déduira immédiatement. Il en résulte que u et v seront de la forme

$$(x - a_1)^{\alpha_1}(x - a_2)^{\alpha_2}\ldots.$$

On aura ensuite y_1 par la formule (λ), et y_1 sera de même forme ainsi que y_2 et y_3.

Supposons, en particulier, que les racines des équations fondamentales déterminantes soient commensurables pour tous les points singuliers de E; il est visible que y_1, y_2, y_3 seront alors algébriques, et nous retrouvons alors un théorème donné par M. Fuchs dans le Mémoire cité :

Si la relation F *est de degré supérieur à deux, l'équation* E *s'intègre algébriquement.*

32. Il reste à examiner le cas où la relation F est du second degré. M. Fuchs démontre alors que l'équation E est l'équation donnant le

carré de l'intégrale d'une équation linéaire du second ordre. Nous allons l'établir, en nous plaçant toujours au point de vue de la théorie des groupes de transformations.

On peut supposer que la relation quadratique a la forme

$$y_3^2 - y_1 y_2 = 0.$$

Le groupe de transformations de l'équation

$$(S)\qquad \begin{cases} Y_1 = a y_1 + b y_2 + c y_3, \\ Y_2 = a' y_1 + b' y_2 + c' y_3, \\ Y_3 = a'' y_1 + b'' y_2 + c'' y_3 \end{cases}$$

sera nécessairement un sous-groupe du groupe général à quatre paramètres, transformant en elle-même l'équation $y_3^2 - y_1 y_2 = 0$. Posons alors

$$u = \sqrt{y_1}, \qquad v = \sqrt{y_2};$$

on en déduira

$$y_3 = uv;$$

nous avons donc

$$y_1 = u^2, \qquad y_2 = v^2, \qquad y_3 = uv.$$

Soit de même

$$Y_1 = U^2, \qquad Y_2 = V^2, \qquad Y_3 = UV;$$

nous aurons alors

$$\begin{aligned} U^2 &= a u^2 + b v^2 + c uv, \\ V^2 &= a' u^2 + b' v^2 + c' uv, \\ UV &= a'' u^2 + b'' v^2 + c'' uv. \end{aligned}$$

Or, u et v étant fonctions de deux quantités y_1 et y_2, ainsi que U et V, il est clair que U et V sont des fonctions de u et v, et ce sont les expressions de U et V en u et v que nous nous proposons précisément de trouver. Or, des trois dernières équations écrites, on peut conclure que U et V sont des fonctions linéaires de u et v. Les a, b, c sont, en effet, tels qu'on a, quels que soient u et v, l'identité

$$(a u^2 + b v^2 + c uv)(a' u^2 + b' v^2 + c' uv) = (a'' u^2 + b'' v^2 + c'' uv)^2.$$

Il en résulte, ou bien que les deux trinomes

$$a u^2 + b v^2 + c uv, \qquad a' u^2 + b' v^2 + c' uv$$

ne diffèrent que par un facteur constant, ou bien que chacun d'eux

est un carré parfait. La première hypothèse est inadmissible, car on aurait alors

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

et, par suite, le déterminant de la substitution (S) serait nul, ce qui est impossible, car les Y doivent être comme les y des intégrales formant un système fondamental. Il en résulte que nous sommes dans le second cas, et alors U et V sont des fonctions linéaires de u et v. Par suite, l'équation linéaire du second ordre ayant pour intégrales

$$\sqrt{y_1}, \quad \sqrt{y_2}$$

sera à coefficients rationnels, puisque les coefficients de cette équation, mise sous la forme

$$(\text{E}') \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} + \text{P}\frac{dz}{dx} + \text{Q}z = 0,$$

seront des fonctions rationnelles de y_1, y_2, invariantes par les substitutions du groupe de l'équation (E). Nous arrivons donc à la conclusion que *l'équation* (E) *est l'équation obtenue en posant*

$$y = z^2,$$

z étant l'intégrale générale d'une équation (E') *du second ordre :* c'est le résultat obtenu d'une autre manière par M. Fuchs. On pourra aussi consulter sur ce sujet divers Mémoires de MM. Laguerre, Appell et Goursat [1]. Je montrerai seulement, pour terminer, comment on pourra reconnaître si une équation linéaire donnée

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 3\text{B}\frac{d^2 y}{dx^2} + 3\text{C}\frac{dy}{dx} + \text{D}y = 0$$

rentre dans la catégorie précédente. Si l'on pose

$$y = z^2,$$

z étant l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = a\frac{dz}{dx} + bz,$$

[1] Laguerre, *Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 124 et 216; Appell, *Annales de l'École Normale*, 1881; Goursat, *Bulletin de la Société mathématique*, 1883.

on aura, pour y, d'après ce que nous vu (§ 10), une équation du troisième ordre; un calcul facile donne pour cette équation

$$\frac{d^3y}{dx^3}-3a\frac{d^2y}{dx^2}-\left(4b-2a^2+\frac{da}{dx}\right)\frac{dy}{dx}-2\left(\frac{db}{dx}-2ab\right)y=0.$$

En identifiant cette équation avec celle qui a été écrite plus haut, on a

$$B=-a,\qquad 3C=2a^2-4b-\frac{da}{dx},\qquad D=2\left(2ab-\frac{db}{dx}\right).$$

L'élimination de a et b entre ces trois équations donne l'équation de condition

$$4B^3+6B\frac{dB}{dx}+\frac{d^2B}{dx^2}-6BC-3\frac{dC}{dx}+2D=0,$$

qui exprime la condition cherchée.

VI. — Réduction du groupe de transformations d'une équation linéaire; théorème de M. Vessiot sur les équations intégrables par quadratures.

33. On peut, relativement à la réduction du groupe de transformations d'une équation linéaire, développer une théorie analogue à celle qui a été étudiée dans la Section VI du Chapitre précédent; c'est l'objet de la thèse déjà citée de M. Vessiot. Ce sujet, pour être approfondi, demanderait sur les groupes de transformations des études plus complètes que celles qui ont été faites plus haut; il appellerait d'ailleurs encore bien des recherches. Nous allons nous borner aux analogies les plus immédiates entre les deux théories en nous plaçant à un tout autre point de vue que M. Vessiot et en prenant toujours pour guides les idées de Galois sur la théorie des équations.

Nous considérons, pour un domaine donné de rationalité, une équation linéaire ayant le groupe G comme groupe de transformations. Soit

$$\varphi\left(y_1, y_2, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right)$$

une fonction rationnelle d'un système fondamental d'intégrales, dont les coefficients sont des fonctions de x appartenant au domaine de

rationalité. Reprenons aussi l'équation

$$(f) \qquad \left(\mathrm{V}, \frac{d\mathrm{V}}{dx}, \ldots, \frac{d^p\mathrm{V}}{dx^p}\right) = 0$$

d'ordre p qui joue dans notre théorie le rôle essentiel. En remplaçant les y par leurs valeurs en fonction de V, on peut regarder φ comme une fonction de V et de ses dérivées, et nous écrirons

$$(\alpha) \qquad \varphi = \chi\left(\mathrm{V}, \frac{d\mathrm{V}}{dx}, \ldots, \frac{d^p\mathrm{V}}{dx^p}\right).$$

Si la fonction φ est prise arbitrairement, elle dépend de p constantes arbitraires, quand on prend pour V l'intégrale générale de l'équation f; la fonction φ satisfera alors à une équation différentielle d'ordre p. Mais il pourra arriver que, V étant toujours l'intégrale générale de f, la fonction φ ne dépende que de p' constantes arbitraires ($p' < p$). Dans ce cas, φ satisfera à une équation différentielle d'ordre p',

$$\mathrm{S}\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dx}, \ldots, \frac{d^{p'}\varphi}{dx^{p'}}\right) = 0,$$

les coefficients étant des fonctions de x appartenant au domaine de rationalité. On voit que cette équation est analogue à l'équation $\mathrm{S}(\varphi) = 0$ considérée dans le Chapitre précédent au § 32.

Si l'on prend pour V une intégrale déterminée v de f, la fonction φ est complètement déterminée. Quand on y remplace v par la combinaison linéaire de v et de ses dérivées, qui donne l'intégrale générale de f (§ 20), on obtient par hypothèse une fonction dépendant, non de p, mais seulement de p' arbitraires. Il en résulte que la fonction φ restera invariable pour les substitutions d'un groupe G' de transformations dépendant de $p - p'$ arbitraires. Ce groupe G' dépendra, en général, de la solution choisie v, mais il peut arriver que ce groupe ait un sous-groupe Γ ne dépendant pas de v; alors ce sous-groupe Γ, dont nous désignerons par s le nombre des arbitraires, laisse invariables toutes les fonctions φ déduites de la fonction initiale par toutes les substitutions du groupe; on peut encore dire qu'il laisse invariables *toutes* les intégrales de S. Il est l'équivalent du groupe (H) qui, en Algèbre, laisse invariables les fonctions φ racines d'une équation $\mathrm{S}(\varphi)$ (§ 34 du Chapitre XVI).

34. Avant d'aller plus loin, cherchons quelle dépendance existe entre deux fonctions rationnelles des intégrales et de leurs dérivées restant invariables par les substitutions d'un même groupe G_1 contenu dans G et dépendant de q arbitraires; nous supposons que la fonction φ considérée ci-dessus reste invariable par les substitutions de G_1 et par ces substitutions seulement.

Quant on met à la place de V une intégrale déterminée v de l'équation f, la fonction

$$\chi\left(V, \frac{dV}{dx}, \dots, \frac{d^pV}{dx^p}\right),$$

envisagée plus haut (§ 33), représente une fonction déterminée de x, que nous désignons par φ, et elle reste invariable quand on met à la place de v une autre intégrale V dépendant de q constantes arbitraires, cette intégrale correspondant précisément au groupe G_1 de transformations; ceci revient à dire que les deux équations différentielles en V, désignées par (f) et (α), ont une solution commune dépendant de q constantes arbitraires. On peut former, par des calculs d'élimination, l'équation différentielle d'ordre q donnant cette solution; elle sera de la forme

$$R\left(V, \frac{dV}{dx}, \dots, \frac{d^qV}{dx^q}, \varphi, \frac{d\varphi}{dx}, \dots\right) = 0,$$

où nous avons mis en évidence φ et ses dérivées.

Soit maintenant φ_1 une seconde fonction rationnelle des intégrales restant invariable par les substitutions de G_1 ; nous pouvons exprimer les intégrales $y_1, \dots, y_n$ à l'aide d'une fonction V intégrale de l'équation R : cette fonction φ_1 prend alors la forme

$$\varphi_1 = \chi_1\left(V, \frac{dV}{dx}, \dots, \frac{d^qV}{dx^q}, \varphi, \frac{d\varphi}{dx}, \dots\right),$$

et elle doit rester invariable, quand on met à la place de V une intégrale quelconque de l'équation R. Si cette dernière équation est algébriquement irréductible par rapport à $\frac{d^qV}{dx^q}$ et que λ soit son degré par rapport à cette dérivée, on réduira dans χ_1, mis sous la forme d'un quotient de polynomes, le numérateur et le dénominateur à être seulement de degré $\lambda - 1$ en $\frac{d^qV}{dx^q}$, en se servant de l'équation R, et

dans χ_1 ainsi préparé on voit immédiatement, en raisonnant comme nous l'avons fait dans l'établissement du second théorème fondamental (Section IV de ce Chapitre), que V et ses dérivées doivent disparaître, et, par suite, φ_1 s'exprime rationnellement à l'aide de φ, de ses dérivées et des quantités du domaine de rationalité.

Si R n'était pas algébriquement irréductible, le groupe G_1 serait complexe; mais, φ_1 restant par hypothèse invariable pour le groupe G_1, le raisonnement précédent est applicable à tous les groupes non complexes composant G_1, et nous avons toujours la même conclusion qui rappelle entièrement le théorème de Lagrange étendu aux valeurs *numériques* des fonctions rationnelles des racines d'une équation : *la fonction φ_1 s'exprime rationnellement à l'aide de φ et de ses dérivées.*

35. Nous arrivons maintenant à la réduction du groupe d'une équation. Adjoignons au domaine primitif l'intégrale générale φ de l'équation S considérée plus haut, qui reste invariable par les substitutions du groupe Γ du § 33. Nous allons établir que *l'adjonction de φ réduira à Γ le groupe de l'équation donnée*, proposition toute semblable à celle qui a été établie au § 33 du Chapitre précédent. En effet, après l'adjonction de φ, le groupe de l'équation ne peut contenir que des substitutions du groupe initial G n'altérant pas φ; donc le groupe ne peut être que Γ ou un groupe contenu dans Γ. Mais il est facile de voir que toutes les substitutions de Γ feront partie du groupe cherché, car toute fonction des intégrales exprimable rationnellement, après l'adjonction de φ, s'exprimera rationnellement à l'aide de φ et de ses dérivées; elle restera donc invariable par toutes les substitutions de Γ. Inversement, toutes les fonctions des intégrales invariables par les substitutions de Γ, s'expriment rationnellement à l'aide de φ et de ses dérivées, d'après le théorème du paragraphe précédent. Le groupe de l'équation, après l'adjonction de φ, est donc bien le groupe Γ.

36. On peut étendre à un sous-groupe Γ, contenu dans un groupe G de transformations, la notion de sous-groupe invariant si important dans la théorie algébrique; il n'y a rien à changer à la définition. Montrons que le groupe Γ, auquel nous venons de réduire le groupe de l'équation, *est invariant dans le groupe initial* G. Nous

avons

$$\varphi = \chi\left(v, \frac{dv}{dx}, \ldots, \frac{d^p v}{dx^p}\right),$$

et cette fonction ne change pas quand on remplace v par une combinaison linéaire de v et de ses dérivées répondant précisément au groupe Γ. Soient h une substitution de Γ, et s une substitution quelconque de G; la substitution s transforme les y en Y, et, par suite, v en une certaine intégrale V de f. La fonction φ devient Φ, et l'on a

$$\Phi = \chi\left(V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}\right).$$

Cette fonction Φ, considérée comme fonction des Y, reste invariable quand on effectue sur ceux-ci la substitution h, ce qui revient à remplacer V par la combinaison linéaire de V et de ses dérivées dont nous avons parlé plus haut. Si, enfin, on remplace les Y par les y, c'est-à-dire si l'on effectue la substitution s^{-1}, on retombe sur la fonction φ; par suite, la substitution

$$s^{-1} h s$$

transforme la fonction φ en elle-même. Donc cette substitution appartient à Γ. Ainsi la transformée de h par une substitution quelconque s^{-1} de G appartient à Γ : c'est dire que *ce dernier groupe est invariant dans* G.

37. On voit que l'on est conduit par les théorèmes précédents à décomposer, s'il est possible, G de manière à avoir une suite de groupes algébriques linéaires et homogènes

$$G, \quad G_1, \quad \ldots, \quad G_s,$$

tels que chacun d'eux soit un sous-groupe invariant du précédent, le dernier groupe G_s n'ayant pas de sous-groupe invariant dépendant de paramètres arbitraires. Par l'adjonction successive des intégrales d'équations S, nous ramènerons à ne plus avoir d'arbitraires le groupe de l'équation qui sera alors intégrée. Déjà M. Lie, dans la théorie générale des groupes, avait été conduit à envisager, pour un groupe de transformations quelconque, une suite analogue à la précédente, où chaque groupe est un sous-groupe invariant du précédent. On peut même supposer de plus que chaque groupe est un sous-

groupe invariant *maximum* du précédent, c'est-à-dire que, étant considérés par exemple G et G_1, il n'existe pas de sous-groupe invariant de G, dépendant d'un plus grand nombre de paramètres que G_1. L'établissement d'une telle suite constitue ce que M. Lie a appelé une *décomposition normale* du groupe G en une série de sous-groupes, et l'on peut établir à ce sujet un théorème qui rappelle celui de M. Jordan. Mais nous n'insisterons pas sur tous ces points, qui nous entraîneraient trop avant dans la théorie des groupes de transformations. Nous allons étudier seulement le cas où l'on adjoindrait les intégrales d'une équation différentielle auxiliaire, étude analogue à celle qui a été faite au § 36 du Chapitre précédent.

38. Supposons que nous adjoignions au domaine primitif de rationalité l'intégrale générale r de l'équation

$$\frac{d^\lambda r}{dx^\lambda} - P\left(\frac{d^{\lambda-1} r}{dx^{\lambda-1}}, \ldots, r\right) = 0,$$

que nous désignerons par $F(r) = 0$. Nous supposons que l'équation n'a de solution commune avec aucune équation algébrique d'ordre moindre; les coefficients de P, qui est rationnel par rapport à r et ses dérivées, appartiennent au domaine de rationalité.

Si l'adjonction de r réduit le groupe, l'équation

$$f\left(V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}\right) = 0$$

aura une intégrale, correspondant à un système fondamental, commune avec une équation différentielle d'ordre moindre, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités du domaine primitif, de r et ses dérivées. Soit f_1 l'équation d'ordre minimum jouissant de cette propriété; l'équation

$$f_1\left(V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^{p'} V}{dx^{p'}}, r, \frac{dr}{dx}, \ldots, \frac{d^{\lambda-1} r}{dx^{\lambda-1}}\right) = 0 \qquad (p' < p)$$

joue, dans le nouveau domaine de rationalité, le rôle que jouait f dans le domaine primitif. Le groupe de transformations de l'équation, après l'adjonction de r, dépend de p' paramètres. Nous allons établir, au sujet de ce nombre, une inégalité très importante. Je dis que l'on a

$$p' \geqq p - \lambda.$$

Supposons, en effet, $p' = p - \lambda - \rho$; différentions λ fois l'équation f_1. Nous aurons ainsi $\lambda + 1$ équations entre

$$V, \quad \frac{dV}{dx}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{p-\rho}V}{dx^{p-\rho}}, \quad r, \quad \frac{dr}{dx}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{\lambda-1}r}{dx^{\lambda-1}}.$$

Nous pouvons entre ces équations éliminer r et ses $\lambda - 1$ dérivées, et nous aurons ainsi une relation de la forme

$$\Phi\left(V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^{p-\rho}V}{dx^{p-\rho}}\right) = 0 \qquad (\rho \geqq 1),$$

où les coefficients appartiennent au domaine initial de rationalité. L'expression V, correspondant à un système fondamental, satisferait donc à une équation d'ordre moindre que p, ce qui est impossible. Cette équation ne se réduira pas à une identité, car chaque équation contient une dérivée de V ne figurant pas dans les précédentes.

L'inégalité

$$p' \geqq p - \lambda$$

est donc établie, et nous pouvons, par suite, dire qu'*après l'adjonction de r, le groupe de l'équation contient au moins $p - \lambda$ paramètres*. Nous désignerons par G le groupe initial, et par Γ le groupe après l'adjonction de r.

Il importe d'approfondir davantage la nature de ce groupe Γ. Pour une intégrale r de $F(r) = 0$, nous avons une équation f_1 déterminée, et l'intégrale générale de cette équation s'obtient linéairement à l'aide d'une intégrale particulière et de ses dérivées, les coefficients qui appartiennent au domaine primitif dépendant de p' arbitraires. Je dis que, si l'on met à la place de r une autre intégrale R de F, l'intégrale générale de la nouvelle équation f_1 s'exprimera de la même manière au moyen d'une intégrale particulière et de ses dérivées. Désignons par

$$\theta\left(V, \frac{dV}{dx}, \ldots\right)$$

l'expression de l'intégrale de f_1, correspondant à r; les deux équations

$$f_1\left(V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^{p'}V}{dx^{p'}}, r, \frac{dr}{dx}, \ldots\right) = 0,$$

$$f_1\left(\theta, \frac{d\theta}{dx}, \ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots\right) = 0$$

sont deux équations en V, et toutes les solutions de la première appartiennent à la seconde : ceci entraîne des relations entre r et ses dérivées, qu'on peut ramener à l'ordre $\lambda - 1$ au plus. Ces équations de condition doivent être des identités, d'après l'hypothèse faite sur l'irréductibilité de F, et l'on en conclut de suite le résultat annoncé. On remarquera encore que l'on passe de l'équation f_1, correspondant à r, à l'équation f_1, qui correspond à R, en remplaçant V par une combinaison linéaire convenable de V et de ses dérivées.

39. L'intégrale générale de f_1 appartient à f; pour une intégrale r de F, l'équation f_1 en V a son intégrale générale dépendant de p' constantes arbitraires; en faisant varier r, on doit obtenir toutes les intégrales de f, car, si l'intégrale générale de f_1 dépendait de moins de p constantes (y compris les constantes figurant dans r), on formerait par des calculs algébriques l'équation d'ordre inférieur à p dont dépendrait cette fonction, et cette équation aurait ses coefficients appartenant au domaine initial de rationalité. Le nombre p ne pourrait pas alors correspondre au groupe de l'équation pour ce domaine.

Nous pouvons maintenant démontrer que Γ est un sous-groupe *invariant* de G. Soit une intégrale v correspondant à une équation f_1 dans laquelle on a mis une certaine intégrale r de F; il correspond à v des intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de l'équation proposée. Effectuons sur les y une substitution quelconque s du groupe G; les y deviennent des Y auxquels correspond une fonction V. Celle-ci est une intégrale d'une équation f_1 dans laquelle r a été remplacée par R. En effectuant sur les Y une substitution h de Γ, on remplace V par une autre intégrale V' de la même équation, d'après ce que nous avons dit plus haut; enfin la substitution s^{-1} nous ramène de V' à une intégrale v' de l'équation initiale f_1 relative à r. La conclusion est que la substitution

$$s^{-1}hs,$$

transformée de h par s^{-1}, appartient au groupe Γ, puisqu'elle est la substitution correspondant au passage de v à v'; *donc* Γ *est invariant dans* G.

Il est inutile d'insister sur l'analogie des théorèmes précédents avec les propositions établies au § 36 du Chapitre précédent.

40. Nous allons appliquer, avec M. Vessiot, le théorème précédent

à la recherche *des équations linéaires intégrables par quadratures;* c'est un problème que l'on peut regarder comme l'analogue du problème de Galois, relatif aux équations résolubles par radicaux. Mais il nous faut auparavant revenir un instant sur la théorie générale des groupes de transformations pour définir une classe particulière de groupes étudiés par M. Lie. Un groupe de transformations est dit *intégrable* s'il contient un sous-groupe invariant ayant *un* paramètre de moins que lui, celui-ci de même et ainsi de suite. Nous aurons donc une suite

$$G, \quad G_1, \quad \ldots, \quad G_s,$$

chaque groupe étant un sous-groupe invariant du précédent et ayant un paramètre de moins que lui, et le dernier groupe étant à un seul paramètre.

M. Lie a donné la condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe d'ordre r soit un groupe intégrable. Cette condition est la suivante: on pourra prendre les r transformations infinitésimales du groupe, que nous désignons comme précédemment par

$$X_1(f), \quad X_2(f), \quad \ldots, \quad X_r(f),$$

de telle sorte que tout crochet

$$(X_i X_{i+k}),$$

qui doit être une combinaison linéaire des X, soit seulement une combinaison linéaire de

$$X_1(f), \quad X_2(f), \quad \ldots, \quad X_{i+k-1}(f).$$

Il s'agit ici de groupes de transformations quelconques. Si l'on considère des groupes linéaires et homogènes, M. Lie [1] a démontré que, le groupe étant supposé intégrable, on peut choisir les variables de manière que toutes les transformations infinitésimales du groupe soient de la forme

$$\delta x_1 = \xi_1 \, \delta t, \qquad \delta x_2 = \xi_2 \, \delta t, \qquad \ldots, \qquad \delta x_n = \xi_n \, \delta t,$$

ξ_1 ne dépendant que de x_1, ξ_2 que de x_1 et x_2, ..., et, d'une ma-

[1] S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. I, p. 589.

nière générale, ξ_i de $x_1, x_2, \ldots, x_i$, toutes les lettres ξ représentant d'ailleurs des fonctions linéaires et homogènes.

41. Considérons maintenant une équation linéaire

$$a_0 \frac{d^m y}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + a_m y = 0,$$

que nous supposons *intégrable par quadratures*. Soit G son groupe. L'adjonction d'un certain nombre de quadratures, qui se présentent d'abord dans le calcul de l'intégrale, peut ne pas réduire G, mais il arrivera nécessairement un moment où l'adjonction d'une quadrature réduira le groupe de l'équation; or, adjoindre une quadrature, c'est adjoindre une intégrale de l'équation

$$\frac{dr}{dx} = b,$$

b appartenant ici au domaine primitif auquel on a adjoint les quadratures antérieures qui par hypothèse ne réduisaient pas le groupe. L'adjonction de r diminuant le nombre p des paramètres de G, le groupe se trouve ramené, d'après le théorème du § 39, à un groupe d'au moins $p - 1$ paramètres ($\lambda = 1$) : le groupe réduit G_1 aura donc ce nombre de paramètres. On continuera ainsi jusqu'à la réduction du groupe de l'équation à un groupe ne renfermant plus d'arbitraire, et alors l'équation sera intégrée.

Nous aurons donc une suite de groupes

$$G, \quad G_1, \quad \ldots, \quad G_s,$$

chaque groupe étant un sous-groupe invariant du précédent, la différence du nombre des paramètres de deux groupes consécutifs quelconques G_i et G_{i+1} étant égale à l'unité, et le dernier groupe ne dépendant que d'un paramètre. Nous pouvons donc dire que, *si une équation linéaire est intégrable par quadratures, son groupe de transformations est intégrable.*

42. La réciproque de ce théorème est exacte : nous allons montrer que, si le groupe de transformations d'une équation linéaire est intégrable, cette équation sera intégrable par quadratures.

Il résulte d'abord du théorème du § 40 que l'on peut choisir les

intégrales d'un système fondamental de telle sorte que les transformations finies du groupe soient de la forme

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_{11}y_1, \\ Y_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \\ Y_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_m &= a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mm}y_m. \end{aligned}$$

Le groupe G de l'équation ne comprenant que des transformations de cette forme, il est visible que l'expression

$$\frac{\frac{dy_1}{dx}}{y_1}$$

reste invariable par les substitutions de G *et est, par suite, exprimable rationnellement.*

Nous aurons donc une première intégrale dont la dérivée logarithmique sera rationnelle. Faisant alors le changement de variable

$$y = y_1 \int z\,dx,$$

nous aurons une équation d'ordre $m-1$, dont l'intégrale générale sera

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right).$$

En désignant par $z_1, z_2, \dots, z_{m-1}$ les intégrales de cette équation correspondant à $y_2, \dots, y_m$, son groupe aura seulement des substitutions de la forme

$$\begin{aligned} Z_1 &= a_{22}z_1, \\ Z_2 &= a_{32}z_1 + a_{33}z_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ Z_{m-1} &= a_{m,2}z_1 + a_{m,3}z_2 + \dots + a_{m,m}z_{m-1}. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc raisonner sur l'équation en z comme sur l'équation initiale. Nous aurons pour l'équation en z une intégrale dont la dérivée logarithmique sera rationnelle dans le nouveau domaine de rationalité, c'est-à-dire après l'adjonction de y_1 au domaine primitif. On continuera ainsi, de proche en proche, et l'on voit que

l'on trouvera, par des quadratures successives, tous les éléments d'un système fondamental. Le théorème énoncé est donc établi, et nous avons la proposition suivante, due à M. Vessiot:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation linéaire soit intégrable par quadratures est que son groupe de transformations soit intégrable.

43. Il résulte immédiatement de là et des théorèmes généraux de M. Lie sur les groupes linéaires que l'équation *générale* d'ordre m, c'est-à-dire une équation linéaire dont le groupe est le groupe général à m^2 paramètres, n'est pas intégrable par quadratures. M. Lie a, en effet, montré (¹) que le groupe linéaire à m^2 paramètres admet un seul sous-groupe invariant d'ordre $m^2 - 1$; c'est le groupe pour lequel le déterminant de la substitution est égal à l'unité. De plus, ce dernier groupe n'admet aucun sous-groupe invariant. Il est clair alors que les conditions du paragraphe précédent ne sont pas remplies.

Nous n'insisterons pas davantage sur la théorie des *groupes de transformations* d'une équation linéaire. Nous pensons avoir suffisamment montré, dans cette Section et dans la précédente, l'intérêt de cette théorie, qui n'est que l'extension bien naturelle à une question d'Analyse des idées si fécondes introduites en Algèbre par Galois.

(¹) S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. I, Chap. XXVI.

FIN DU TOME III.

ERRATA DU TOME II.

Page 507, ligne 4, *lire* (x, y), *au lieu de* (x', y').

ERRATA DU TOME III.

Page 65, ligne 4 en remontant, *lire* $a\theta^2$, *au lieu de* $a\int\theta^2$.

Page 155, ligne 6 en remontant. *lire* « entre α et b », *au lieu de* « entre a et b ».

Page 220, ligne 8, la ponctuation est mauvaise. *Il faut lire* « n'annulant pas P; pour $\omega_0 + 2k\pi$ (k étant assez grand), la fonction ζ ».

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME III.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES SINGULARITÉS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE II.

DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES DU PREMIER ORDRE A DEUX VARIABLES.

CHAPITRE III.

DES SOLUTIONS SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.

CHAPITRE IV.

SUR CERTAINES CLASSES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE V.

SUR CERTAINES MÉTHODES D'APPROXIMATIONS SUCCESSIVES.

CHAPITRE VI.

SUR CERTAINES ÉQUATIONS LINÉAIRES DU SECOND ORDRE.

CHAPITRE VII.

ÉTUDE DE QUELQUES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES.

CHAPITRE VII

DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES ET DES SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE IX.

POINTS SINGULIERS DES INTÉGRALES RÉELLES DES ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

CHAPITRE X.

SUR LA FORME DES COURBES SATISFAISANT A UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE ET DU PREMIER DEGRÉ.

CHAPITRE XI.

GÉNÉRALITÉS SUR LES POINTS SINGULIERS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

CHAPITRE XII.

DES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES.

CHAPITRE XIII.

SUR DES TRANSCENDANTES UNIFORMES DÉDUITES DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE HYPERGÉOMÉTRIQUE.

CHAPITRE XIV.

SUR CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES IRRÉGULIÈRES A L'INFINI.

CHAPITRE XV.

QUELQUES CLASSES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES INTÉGRABLES.

CHAPITRE XVI.

THÉORIE DES SUBSTITUTIONS ET DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

CHAPITRE XVII.

ANALOGIES ENTRE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ET CELLE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME III.

40176 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.





